28,491/C

N III 2
18

X XIII

Digitized by the Internet Archive
in 2018 with funding from
Wellcome Library

https://archive.org/details/b30410368


EUCLIDES
PHORONOMIA
Autore
1715
J. Wandelaar. inv: et fecit.

PHORONOMIA,

SIVE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS

CORPORUM

SOLIDORUM ET FLUIDORUM

LIBRI DUO,

AUTORE

JACOBO HERMANNO Baſil.

antehac in Illuſtri Patavino Lyceo; *nunc vero*

in Regio Viadrino *Math. Prof. Ord.*

& Reg. Scientiarum Societatis, quæ Berolini *eſt, Sodali.*



AMSTELÆDAMI,

Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS H.FF.

M. D. CCXVI.

WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY

VIRO

PERILLUSTRI

ATQUE

CONSULTISSIMO

GODOFREDO GULIELMO

LEIBNITIO,

CONSILIARIO IMPERIALI AULICO,

ET MAGNÆ BRITANNIÆ REGIS, PRINCIPISQUE ELECTORIS BRUNSVICENSIS

INTIMO &c.

REGIÆ SOCIETATIS BORUSSICÆ

PRÆSIDI.

ITEM ET RELIQUIS

EJUSDEM SOCIETATIS

MEMBRIS,

VIRIS CLARISSIMIS

SUIS QUIQUE TITULIS

CONDECORATISSIMIS,

OPUS HOC

PHYSICO-MATHEMATICUM

IN SUÆ ERGA COLLEGAS OBSERVANTIÆ

TESTIMONIUM

DICAT

JACOBUS HERMANNUS.

AD BENEVOLUM
LECTOREM.

CUm ante hoc quinquennium circiter in Illuſtri Lyceo Patavino Hydroſtaticam publicis meis Lectionibus exponendam eligerem, tam ob argumenti jucunditatem, quam ob utilitatem non contemnendam in Philoſophia Naturali, cogitatio ſimul animum ſubiit, forte non ab re futurum, ſi, quæ auditoribus meis explicuiſſem, in publicum mitterem. In hoc deinceps propoſito eo magis confirmatus fui firmiusque perſtiti, quo id magis amicis harum rerum intelligentibus probari cognovi.

Archimedes primus, quod conſtet, Hydroſtaticæ rudimenta tradidit in ſuis *De Inſidentibus Humido* Libris, ſed optima ab ipſo in Philoſophiam Naturalem ſparſa ſemina magno temporis tractu ſterilia jacuere, usque dum ſagaci Galilæi ingenio fœcundata germinare inciperent. Etenim magnum hoc Philoſophiæ lumen Archimedea principia non ſolum luculentius expoſuit, explanavit, nonnullisque novis ſpeculationibus auxit, ſed etiam ſingulare phænomenon, ab aquilege tamen acceptum, Philoſophos docuit, non poſſe aquam in antliis ſuctoriis ultra octodecim cubitorum altitudinem attolli, &, quanquam veram ejus rationem non aſſequutus eſſe videtur, de elegantiſſimo tamen invento optime eſt meritus, cum hoc ejus phænomenon, ſeu obſervatio, non tantum tubi Torricelliani experimentum pepererit, ſed etiam occaſio fuerit, qua Hydroſtaticæ principia ad aërem ipſum traducerentur. Nam Euangeliſta Torricellius Magni Ducis Hetruriæ FERDINANDI II. Mathematicus, & Galilæi in hoc munere ſucceſſor, obſervationem illam attenta mente

te revolvens pro ea, qua erat ingenii ſagacitate, limitatam illam duodeviginti cubitorum altitudinem in antliis à determinata atmoſphæræ preſſione provenire poſſe demum ſuſpicari cœpit, qua de re ut certior fieret, cum hydrargyro experimentum tentavit, &, ut præſagiebat, reſpondit eventus. Tam nobile inventum diu deliteſcere non poterat, nam paulo poſt ejus ortum ſtatim in Gallia aliisque regionibus percrebuit, & curioſorum animos in ſe convertit. Hinc Blaſius Paſcalius ſagaciſſimi ingenii juvenis, quæ fama ex Italia attulerat experiundi cupidus, non ſine inſigni voluptatis ſenſu ea omnia iteratis experimentis veritati conſentanea invenit, & experimenti proceſſum atque eventum in peculiari libello De Gravitate Atmoſphæræ (*De la Peſanteur de la Maſſe de l'Air*) expoſuit, cui alium ingenioſum tractatum De Æquilibrio Liquorum præmiſit. Paſcalii conatus deinceps Anglorum ingenia excitavit, atque inter ea Celeberrimum Philoſophiæ experimentalis cultorem Robertum Boylium, qui in Paradoxis ſuis Hydroſtaticis experimenta captu facillima, atque ab innumeris cum ſucceſſu repetita, memoriæ prodidit; hæc vero omnia latius pertractata multisque aucta fuere à Borellio & Mariotto, quorum opera notiora ſunt, quam ut ulla recenſione indigeant, ambo enim hi Autores, præter Hydroſtatica, etiam plura ad hydraulicam pertinentia attigerunt, de motibus aquarum aliisque, in quibus, quem antea laudavi, Torricellius, & Benedictus Caſtellus ipſis facem prætulerunt; Gulielminus verò doctrinam de motu aquarum magis deinceps auxit, atque fluminibus feliciter applicuit; verum laudatis hisce viris ulterius longe proceſſit Celeberrimus Petrus Varignon, qui eam Hydraulicæ partem, quæ menſuram liquorum fluentium reſpicit, plurimum protendit in duobus præclaris ſpeciminibus Actis Academiæ Regiæ Pariſienſis inſertis, quorum prius circa conſtructionem omnis generis Clepſydrarum verſatur; alterum verò argumentum de liquoribus effluen-

fluentibus eorumque menſuris ex profeſſo excolit. Ante hosce duos poſtremos laudatiſſimos viros Summus Geometra Iſaacus Newtonus in aureo opere, quod *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica* inſcripſit, plura tradidit corporum fluidorum vires & affectiones concernentia, quo referenda ſunt ea, quæ circa vim elaſticam aëris, denſitates atmoſphæræ; quæ circa reſiſtentias figurarum in fluidis incedentium, circa motus corporum in mediis reſiſtentibus, circa agitationem aëris in productione ſoni, atque alia demonſtrata exhibuit: ejusque exemplo permoti Illuſtris Leibnitius atque Nobiliſſimus Hugenius meditationes ſuas circa motus corporum in medio reſiſtenti publico diutius invidere noluerunt; quod argumentum poſtea generaliter pertractavit ſupra laudatus Varignonius. Celeberrimi vero deque reconditiori Geometria optime meriti Bernoullii Fratres diverſa Problemata circa fluidorum actiones in corpora dura, ſed flexibilia, contemplati ſunt, atque interiori Geometria ipſis opem ferente, elegantes curvas velariæ at lintei intus ſtagnantem liquorem continente, in apricum produxerunt, ut alia multa taceam.

Sed, quia eximia hæc inventa in variis Diariis aliisque libris diſperſa & ex diverſis ſæpe principiis elicita ſunt, gratum me iis facturum, qui hisce rebus delectantur, exiſtimavi, ſi omnia juxta genuinum ordinem in unum collecta, ex paucis iisque ſimplicibus principiis deducta & aucta publicæ luci ſiſterem. Verum hunc vix ingreſſus campum illicò perſpexi, propoſitum iſtud me nunquam feliciter ad exitum deducturum, niſi omnia altius repeterem, pluraque ex Mechanica corporum ſolidorum mutuarer, ad id ut tyrones opusculum citra offenſionem percurrere poſſent, nec ad ejus intelligentiam auxilia aliunde conquirere neceſſum haberent. Cum verò in rebus hisce ſubſidiariis explicandis materia in tantum excreverit, ut non contemnendam opusculi partem conſtitueret;

 natus

ris preſſiones perferre queant. De æquilibriis liquorum cum inter ſe, tum cum corporibus ſolidis ipſis immiſſis. De figuris, quas fluida corporibus flexibilibus, in quibus ſtagnant, inducunt. De gravitate & elaſticitate aëris ac denſitatibus atmoſphæræ in omnia tellure diſtantia & in quacunque elaſticitatis lege. De motu & menſura aquarum fluentium ex vaſis quibuscunque erumpentium, aut in canalibus devolutarum. De effectibus fluidorum ex percuſſione, quò pertinent reſiſtentiæ, quas figuræ in fluidis latæ patiuntur, harumque reſiſtentiarum mediæ directiones, item problema velariæ & id genus alia. De motibus corporum in mediis reſiſtentibus tam rectilineis quam curvilineis. De motu navium vento impulſarum. De motu circulari fluidorum. De motu aëris in productione ſoni; ac denique de motu inteſtino ſeu interno fluidorum, à quo calor pendet. Hiscè ſummatim recenſitis totum opusculum abſolvitur.

Cum brevitati in omnibus ſtuduerim, id cumprimis operam dedi, ut, quantum fieri poterat, cuncta generalibus theorematis comprehenderentur; ex quibus deinde particularia, tanquam Corollaria, poſſent deduci. Propterea liquores tanquam heterogeneos ſtatim ſpectavi, atque eorum leges preſſionis atque æquilibrii inveſtigavi, ex quibus deinceps leges æquilibrii fluidorum homogeneorum facillime elicui. Sic etiam vectem rectilineum vel curvilineum in omnibus ſuis punctis à potentiis quomodocunque variantibus impulſum mihi propoſui, in quo mediam potentiarum directionem inveſtigarem, hocque modo in inſignem proprietatem centrorum gravitatis, quam me primum inveniſſe putabam, incidi; ſed quam etiam Celeb. Joh. Bernoulli in Libro nuper edito (*Eſſay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux*) Cap. XII. §. VI. proponit. Sed Cl. hic Geometra recordabitur haud dubie ſe MStum meum vidiſſe, in quo theoremata huc facientia continebantur, priusquam laudatus ſuus liber editus eſſet, quemadmodum ego eius Propoſitio-

ſitionem propriam in eius libro, tunc adhuc inedito, pariter videram. Sic etiam problemata catenariæ, velariæ, &c. ad hoc generale reduxi: invenire figuram manentem lineæ flexilis in ſingulis punctis à potentiis ſecundum directiones quascunque impulſæ, cujus ſolutionem ſimpliciſſimam, ut mihi ſaltem videtur, exhibui. Et hoc modo in aliis procedere conatus ſum. Perſpicuitati, quantum potui, litavi; propterea multæ demonſtrationes provectioribus Geometris nimis prolixæ fortaſſe videbuntur, ſed ſciant velim Tyronum quoque rationem habendam mihi fuiſſe, quibus non ſemper in poteſtate eſt ea ſupplendi, quæ ſubinde ex demonſtrationibus brevitatis & elegantiæ gratia reſecantur mente neceſſario ſupplenda. Interim diffiteri nolo me etiam, quantum potui, elegantiam ſectatum eſſe, atque propterea demonſtrationes lineares algebraicis prætuliſſe, experientia multiplici edoctum, meditationem figurarum ſæpiſſime ſimpliciores & elegantiores ſuppeditare ſolutiones ac conſtructiones, quam Analyſin ſpecioſam. Specioſam dico, nam ſubinde utor analyſi geometrica, ſeu lineari absque ſymbolis algebraicis procedente, cujus beneficio multa elegantius obtinentur quam calculis analyticis, etſi non ſemper. Ejusmodi analyſi geometrica veteres uſos exiſtimo, quemadmodum ex Euclidis datis & Apollonii libello *de Sectione Rationis* à Celeberrimo Edmundo Hallæo edito non obſcure colligitur; ſimili etiam analyſi ſummus Newtonus ad ſtuporem usque uſus eſt in ſuis *Principiis*. In applicatione verò theorematum, tanquam loco magis idoneo, calculo algebraico ſubinde utor.

In his libris frequens curvarum eſt uſus ad repræſentandas virium, temporum, celeritatum, aliarumque ejusmodi affectionum proportiones, quas propterea curvas vocabulo *ſcalarum* inſignire ſoleo, prout Cavallerius & Vivianus Celeberrimi Geometræ diu ante me circa varios gravitatis gradus & momentorum corporum, Architectos imitati, qui lineam rectam

in plures particulas æquales interſtinctam (ad id, ut ex ea præconceptorum operum ideas proportionaliter delineare poſſint) *ſcalam* Geometricam vocant. Patet ergo curvarum linearum contemplationem non ſolum non eſſe inutilem, ſed abſolute neceſſariam ad accuratam phænomenorum atque virium naturæ repræſentationem.

Quantum ad notationis formam attinet, cum duæ pluresve lineæ cum interjectis punctis conjunguntur, hoc ſignificat lineas in ſe mutuo ductas eſſe, ut AB.CD ſignificat rectangulum ſub AB in CD, quod aliis ſic deſignari ſolet AB + CD. Sic etiam §. 172. *num.* 11. tBE = N.$\surd$A. ang. ICD indicat tempus per BE exponi, facto ex N & radice ipſius A in angulum ICD, & ſic in reliquis hujus Propoſitionis demonſtrationisque locis, & in Propoſitionibus duabus ſequentibus. Fractiones ſeu rationes ad Typothetarum commoditatem exprimuntur per duo puncta. Sic AB : CD idem eſt ac communiter $\frac{AB}{CD}$, & AB : CD = EF : MN idem ac vulgo AB. CD :: EF. MN. Cum plures fractiones ſibi invicem adduntur, eæ vel commate, aut commate cum puncto, aut etiam parentheſibus diſtinguuntur: ſic $f = a : b, + c : d.$ aut $f = a : b; + c : d$ idem eſt quod ordinarie $f = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Subinde quantitatibus aliæ parentheſibus incluſæ ſine ullo interpoſito ſigno annectuntur, quod indicat quantitates eſſe æquales; ſic, ſi haberetur A(a) id indicaret æquales eſſe vel æquivalentes magnitudines A & a, ſin verò cum puncto interpoſito diſtinguantur ut A.(a) hoc denotat factum ex A in a; & ſic in aliis. Expreſſiones vero $\surd(aa + bb)$; $(aa + bc)^m$ denotant $\surd\overline{aa + bb}$, & $\overline{aa + bc}^m$ reſpective. Reliqua ſigna uſitato ſenſu adhibentur.

HO-

HONORI AC MERITIS

Viri CL.

JACOBI HERMANNI,

LIBROS DUOS

DE VIRIBUS & MOTIBUS

CORPORUM

edentis.

SUblimioris qui ſapientiæ
Arces reviſis pectore candido,
HERMANNE, Rauracis ab oris
Pruteniæ ſociate Muſæ.

Nuper retentus non fueras, ubi
Olim penates fixerat inclitus
Antenor, in ſacro receſſu
Italiæ Patavinus hoſpes.

Nec Te jocoſi dulcis amœnitas
Rheni reluctantem in patrio ſolo,
Nec rura, nec clari ſodales
Ingenii tenuere nexu,

Carum POLENUS ſideribus caput
Et LAZARINI flumina, nec ſolum
Dives Camœnarum, aut ſtupendum
Adriaci regimen Senatus;

Quin Te citato proriperes gradu
Linquens amœni compita Livii, &
Rheni Padique oblivioſo
Anteferens Viadrum ſuſurro.

Sic

Sic Tu beato ſaucius æthere
Prudens amicos deſeris hoſpites,
Et porrigens lumen per orbem
Sidereos imitaris ignes.

Quæ cura vaſtum tendere limitem
Mortalis ævi & viſere cœlites
Immane pandentes theatrum
Per ſuperûm ſpatioſa regna!

Quæ mater artis conſcia lubricæ
Natura cœco clauſerat in ſinu,
Tu prodis & vires moventes
Cuncta jubes numeros ſubire;

Centrique amores latius explicas,
Pulchroque cingens æthercam facem,
Ductis per artem ceu choreis,
Ordine circumagis planetas.

Duris inhærens & fluidis onus
Tu curioſis in rationibus
Ducis, pererrans atque olympum
Cuncta domas abaco Minervæ.

NEWTONVS hoſpes divitis inſulæ,
Sed nil habentis ſe magis aureum,
Hac primus ivit, Tuque forte
Nil populis dederis ſecundum.

Felicis ævi pignora! queis amor
Rebus creatis lumina reddere,
Et, quæ potenti more luſit,
Subdere jura Patris papyro

Porrecta ponto, fuſa per ætherem
Terræque gyris indita: diſcite,
Mortalium cœtus moveri &
Centra ſequi potiora ſole,

Atque

Atque ordinatis doctius ignibus;
Huc mentis alas atque animum vagum
Conferte, nec ſoli cadente
Sub numerum effluitote motu.

Poſtquam volatum mentis, & igneos
Sic appetitus rite ſub orbitam
Egiſtis, ad naves regendas
Vertite & ad gravium librandam

Molem ruentum pondere corporum,
Aeſtus marinos & celerem fugam,
Sinas & Indos computate,
Subſidium decus atque vitæ.

Hæc in Poëſi Caſtalidum nemus
Aut in puellarum ordinibus novem
Non pandit, aut roſtra, aut tribunal
Mobile fulminibus Periclis.

Ite ergo Muſæ turba minor meæ, &
Humanitatis docta volumina
Submittite HERMANNO ſagaci,
Hunc hedera redimite veſtra.

COLLEGAE CONIVNCTISSIMO

POS.

NICOLAVS WESTERMAN,
Eloq. Profeſſor Ord. & Bibliothecarius Regius.

*** IN-

INDEX
SECTIONUM & CAPITUM.

DE Viribus & Motibus Corporum prænotanda. 1

LIBER PRIMUS, DE CORPORIBUS SOLIDIS.

SECTIO PRIMA.

De Solicitationum Corporibus varie applicatarum æquilibriis & mediis directionibus. 6

CAPUT I.

De proportione inter Solicitationes gravitatis, ſeu pondera Corporum, cum proportione Maſſarum eorundem Corporum collata. ibid.

CAPUT II.

De Solicitationibus, quibus Corpora rigida, id eſt inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus. 10

CAPUT III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipſis quomodocunque applicatis, & de mediis directionibus harum potentiarum. 36

SECTIO SECUNDA.

CAPUT I.

De generalibus Solicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis. 51

CAPUT II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis variabilis Hypotheſi. 68

CA-

CAPUT III.

De Motu Iſochrono Corporum in curvis deſcendentium juxta quamlibet gravitatis variabilis hypotheſin, atque gravium directionibus etiam in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum. 81

CAPUT IV.

De Solicitationibus centralibus, quibus Corpora in orbibus mobilibus detinentur, & de Motu Apſidum. 95

CAPUT V.

De Motibus gravium inter ſe connexorum, atque in arcubus circularibus concentricis junctim delabentium; ſeu de Motu Pendulorum compoſitorum eorumque centro oſcillationis in omni poſſibili gravitatis variabilis hypotheſi. 100

CAPUT VI.

De Regulis motus in colliſione Corporum. 110

LIBER SECUNDUS, DE CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO PRIMA.

De Viribus Fluidorum à gravitate. 125

CAPUT I.

De generalibus regulis gravitationis Liquorum in ſubjecta plana. 128

CAPUT II.

De gravitationibus Liquorum in Vaſorum latera, & de tuborum firmitatibus requiſitis ad perferendas liquorum preſſiones. 138

CAPUT III.

De Æquilibrio Corporum ſolidorum in Fluidis quibuscunque demerſorum, vel iisdem Fluidis innatantium.

CAPUT IV.

De Figuris, quas fluida in Corporibus flexibilibus ſtagnantia hisce Corporibus flexibilibus inducere debent. 162.

CAPUT V.

De Preſſionibus Aëris ex gravitate. 169

CAPUT VI.

De Vi Elaſtica Aëris in genere. 180

CAPUT VII.

De Viribus Elaſticis Aëris cum denſitatibus ejus comparatis. 189

CAPUT VIII.

De Denſitatibus Aëris in diverſis Atmoſphæræ locis in omni poſſibili elaſticitatum hypotheſi. 197

SECTIO SECUNDA.

De Motibus Aquarum. 213.

CAPUT IX.

De Motibus Liquorum per minora foramina erumpentium. 214

CAPUT X.

De Curſu Fluminum. 226

SECTIO TERTIA.

De Effectis fluidorum ex percuſſione. 235

CAPUT XI.

De generalibus Affectionibus percuſſionis fluidorum. ibid.

CAPUT XII.

De Reſiſtentiis figurarum in fluidis motarum. 242

CA-

CAPUT XIII.

De Figuris, quas ſuperficies flexiles induere debent, cum venti allapſus directè excipiunt, ſeu de curva Velaria. 265

SECTIO QUARTA.

De Motibus Corporum in mediis reſiſtentibus. 277

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quæ ad theoriam motus Corporum in mediis reſiſtentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria neceſſaria. 279

CAPUT XV.

De Motibus Corporum, quibus aër reſiſtit in ratione celeritatum mobilis. 287

CAPUT XVI.

De Motu Corporum in aëre reſiſtente in duplicata ratione celeritatum mobilis. 302

CAPUT XVII.

De Motibus Corporum in aëre reſiſtente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem earundem. 311

CAPUT XVIII.

Methodus inveniendi ſymptomata motuum Corporum in mediis utlibet reſiſtentibus, atque denſitate pro libitu variantibus. 325

CAPUT XIX.

De deſcenſu & aſcenſu gravium in lineis quibuscunque curvis, poſita medii reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali. 334

CAPUT XX.

De Motu projectorum in aëre, qui miſſili in duplicata ratione celeritatum reſiſtit, cum corpus à ſolicitationibus gravitatis non ad aliquod centrum poſitione datum, ut hactenus conſiderari ſolebant, tendenti-

bus, urgetur, ſed ſecundum directiones lineam quamcunque curvam poſitione datam contingentes. 345

CAPUT XXI.

De Motu navium vento impulſarum. 356

SECTIO QUINTA ET ULTIMA.

Continens Miſcellanea de motu circulari fluidorum, de Motu aëris in producendo ſono, & de Motu interno fluidorum. 361

CAPUT XXII.

De Motu circulari fluidorum. ibid.

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione ſoni. 373

CAPUT XXIV.

De Motu inteſtino fluidorum. 376

APPENDIX. 378

DE

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

PRÆNOTANDA.

1. COrpora abſolute *moveri* dicuntur, cum contiguitas eorum cum partibus ſpatii undequaque infiniti & immobilis continue mutatur; atque adeo *Motus* ipſe conſiſtit in iſtiusmodi contiguitatis mutatione.

2. Partes illæ ſpatii infiniti & immobilis corpori contiguæ ſunt, quæ ipſum immediate contingunt & ambiunt; ſpatiumque immobile dicitur, quia ſingulæ ejus partes eandem conſtanter diſtantiam, atque adeo eundem mutuo reſpectu ſitum ſervare intelliguntur, totumque ſpatium utpote undique in infinitum excurrens extra ſe ipſum vagari atque ſitum mutare, intelligi non poteſt.

3. Quia contiguitatis mutatio non niſi tractu temporis fieri poteſt, implicat enim ut unum idemque corpus ſimul & eodem tempore diverſis ſpatii partibus contiguum ſit, id eſt, in diverſis locis exiſtat; ideo omnis motus tempus involvit.

4. Tempus conſiderari poteſt tanquam æquabilis fluxus unius ejus ſigni indiviſibilis, quod Momentum vel Inſtans nominabimus; eodem ferme modo quo Geometræ lineas motu puncti generari intelligunt, hoc tamen cum diſcrimine; quod puncti lineam deſcribentis motus modo concitatior modo remiſſior fingi poſſit, cum è contrario fluxus momenti noſtri æquabili, ut ita dicam, paſſu fiat, ita ut æquales temporis partes æquales fluentis momenti diſtantias, ſeu intervalla, à prima ſtatione in qua ea incipiunt, ſibi vindicent.

5. Hinc eſt, quod fluxus momenti noſtri ſeu tempus ſoli intellectui hoc modo perceptibile, periodicis Corporum cæleſtium motibus vel Horologiorum uſu aliorumve inſtrumentorum ope, & ſenſibile quodammodo reddatur, atque ad menſuram qualemcunque revocetur. Sed tales temporis menſuræ & repræſentationes non ſunt exactæ in ultimo rigore, quandoquidem nec motus annuus ſolis,

nec qui ex eo atque diurno componitur, nec forte ipſe diurnus, ut nonnulli Aſtronomi ſuſpicantur, perfecte æquabiles ſunt, ac propterea non niſi temporis apparentis menſuræ eſſe poſſunt. Ideo etiam Aſtronomi, qui temporis veri & æquabilis menſuram exquirunt, ſubinde apparens tempus ad tempus, quod vocant medium, quodque pro uniformi habent, reducere neceſſum habent. Et quanquam Horologiis oſcillatoriis, prout ad inſignem perfectionis gradum ab Hugenio perducta ſunt, accurata veri ſeu æquabilis temporis menſura haberi poſſe videtur, eorum tamen motus Mathematice accurati & uniformes eſſe nequeunt, non quidem ob principiorum defectum, in quibus conſtructio eorum fundata eſt, ſed ob defectum executionis; conſtat enim machinas nunquam in ultimo rigore tales parari poſſe, quales theoria conſtruendas jubet, quia in theoria ab illis impedimentis atque circumſtantiis tantum non ſemper abſtrahi ſolet, quæ tamen in ipſa praxi nunquam abeſſe ſolitæ ſunt, ſucceſſum machinæ accuratiſſimum eludentes.

6. Si fluens noſtrum punctum, aut etiam corpus quodvis, uniformi paſſu incedit, perinde ac momentum temporis uniformiter fluere intelligitur, tunc motus puncti vel corporis *æquabilis* vocatur. Et iter ſeu longitudo, quæ etiam ſpatium vocari ſolet motu corporis deſcriptum, ad tractum temporis à fluente momento interea confectum, hoc eſt, ad tempus lationis applicatum ſeu diviſum *Celeritas* vel *Velocitas*, appellatur.

7. Id, quod corpus ad motum concitat, ſeu ex quo motus corporis reſultat, id eſt quo poſito ponitur motus corporis, vocatur *Vis motrix*, quæ dividi poteſt, in *Vivam* & *Mortuam*.

8. *Vis viva* eſt, quæ cum motu actuali conjuncta eſt. Sic corpus, quod dato tempore datam lineam tranſmittit, vi viva præditum dicitur.

9. *Vis Mortua* verò eſt, ex qua nullus motus actualis reſultat, niſi aliquamdiu in corpore continuata vel replicata fuerit. Talis vis foret unicus tantum gravitatis impulſus nullis aliis ei ſuccedentibus, etenim non, niſi poſt infinitos demum gravitatis ictus indeſinenter replicatos ſeu unos aliis continue ſuccedentes, motus ſenſibilis gravi acquiritur. Sic etiam conatus centrifugi ex circulari motu oriundi, perinde ac gravitatis impulſus, ſiſtunt exemplum vis mortuæ.

10. Majoris diſtinctionis gratia Vim Vivam ſimpliciter Vim, Mortuam verò cujuſcunque demum generis fuerit, *Solicitationem* poſthac vocabimus.

Præ-

Præcedentes virium definitiones ſatis aperte indicant in iis agi de *Vi activa* corporum.

11. Sed ineſt etiam corporibus *Vis* quædam *paſſiva*, ex qua nullus motus nec tendentia ad motum reſultat; ſed conſiſtit in *Renixu* illo, quo cuilibet vi externæ mutationem ſtatus, id eſt motus vel quietis, corporibus inducere conanti reluctatur. Quæ reſiſtentiæ vis ſignificantiſſimo vocabulo à ſummo Aſtronomo Joh. Keplero *Vis inertiæ* dicta eſt. Hæc Vis inertiæ in corporibus quieſcentibus ſe ſatis prodit; etenim corpus quodcunque A in aliud, ſed quieſcens, B impactum aliquid de ſua vi & motu amittet, excipienſque B aliquid virium & motus ab impellente A acquiret. Ex quo claret, quieſcens corpus B reapſe vim aliquam paſſivam habere à vi in id incurrentis corporis A frangendam atque ſuperandam; alioqui impellens A poſt occurſum nihil de ſuo motu amiſiſſe debuiſſet, cum corpus quieſcens B, ſi reſiſtendi facultate careret, alterius motui nullam remoram afferre poſſit, adeo ut ambo, impellens A & impulſum B, ea ipſa celeritate, qua corpus A ante occurſum ferebatur, etiam poſt contactum incedere deberent, quod phænomenis adverſari nemo non videt.

12. In hac Vi inertiæ materiæ fundata eſt Naturæ lex, qua *Cuilibet actioni æqualis & contraria eſt reactio.* In omni enim actione eſt luctatio inter corpus agens & patiens, & ſine ejusmodi luctatione nulla actio, proprie ſic dicta, agentis in patiens concipi poteſt, alioqui nulla ſtabilia haberentur Mechanicæ fundamenta, ſed quilibet effectus à qualibet cauſſa oriretur.

13. *Vires activæ*, cujuſcunque generis fuerint, gemino modo inter ſe collatæ variare poſſunt. Aliæ enim aliis intenſive majores ſunt, nulla habita ratione ſubjecti recipientis; cum duo corpora, quoad materiam æqualia, viribus inæqualibus pollent. Aliæ porro aliis etiam majores eſſe poſſunt, cum vires intenſive æquales corporibus quoad materiam inæqualibus applicatæ ſunt. Nam in genere vis cujuſque corporis eſt ea, quæ reſultat ex omnibus viribus partialibus, quibus ſingula corporis elementa ſeu minimæ particulæ pollent. Sic ſi vires, quibus ſingula corporis elementa afficiuntur, conſpirantes ſunt, *Vis totalis* erit complexus ſeu aggregatum omnium virium partialium.

14. *Quantitas materiæ* cujuſque corporis, quam *Maſſam* deinceps vocabimus, eſt complexus (aggregatum) omnium particularum, quibus corpus compoſitum eſt. Ipſæ verò particulæ corporis

conſtitutivæ, ejus *elementa* brevius dicentur. Idcirco materia fluida, quæ in corporum meatibus latere poteſt, ad corporis ſubſtantiam pertinere non cenſetur, perinde ac aqua in ſpongiæ poris deliteſcens ad ſpongiæ ſubſtantiam non refertur.

15. *Volumen* cujuſque corporis eſt ſpatium, quod corporis Materiam cum interſperſis poris occupat. Ex collatione Maſſæ ſeu quantitatis materiæ cum Volumine reſultat

16. *Denſitas*, quæ eſt ratio quam materiæ quantitas in quolibet corpore habet ad corporis Volumen. Ut, ſi corpus in maſſam poris carentem colliquatum intelligatur, facile etiam intelligitur ejusmodi maſſam minus ſpatium occupaturam, quam antea cum intermixtis poris occupârat: Ratio talis Maſſæ poris deſtitutæ ad corporis Volumen nobis eſt *Denſitas corporis*. Aliis denſitas major minorve conſiſtit in majore vel minore pororum amplitudine, quod cum noſtra definitione ſatis convenit; nam quo major eſt ratio maſſæ poris expertis ad corporis Volumen, eò minor erit meatuum amplitudo, atque adeo major corporis denſitas.

17. *Raritas* eſt corporum qualitas reciproca denſitati, conſiſtens in ratione Voluminis ad Maſſam ſeu Materiæ quantitatem, hæc enim duo ſemper unum idemque ſignificare ſciendum eſt.

Ex hiſce definitionibus prono alveo fluunt ſequentia conſectaria, quæ, quia in ſequentibus maximo uſui erunt, breviter hoc loco ſunt indicanda. Dicantur Corpora inter ſe collata C, c; eorum Maſſæ M, m; Volumina V, v; Denſitates D, d; Raritates R, r; atque, hiſce nominibus poſitis, erunt

18. *Quantitates Materiæ ſeu Maſſæ* (M, m) *in compoſita ratione Denſitatum* (D, d) *& Voluminum* (V, v). Id eſt, $M : m = D.V : d.v$. Nam (§. 16.) $D = M : V$ & $d = m : v$, ergo $M : m = D.V : d.v$.

19. *Volumina* (V, v) *erunt in compoſita ratione ex directa Maſſarum & inverſa Denſitatum*. Id eſt, $V : v = (M : D) : (m : d)$. Liquet ex §. 17.

Volumina ſunt etiam in compoſita ratione ex directa Maſſarum & directa Raritatum. Hoc eſt $V : v = M.R : m.r$. Nam (§. 16.) $R = V : M$, & $r = v : m$ ergo $V : v = M.R : m.r$.

20. *Denſitates Raritatibus ſunt reciproce proportionales*, *ſeu* $D : d = r : R$. Nam (§. 16. 17.) eſt $D = M : V$, & $R = V : M$, erit $1 : R = M : V = D$ atque adeò $D.R = 1$, & $d.r = 1 = D.R$; hinc $D : d = r : R$.

21. *Directio* cujuslibet vis motricis eſt linea, juxta quam hæc vis

vis in corpus agit, eſtque illa recta, quam mobile hac vi citatum actu deſcribit aut ſaltem deſcribere conatur.

22. *Vires* & *Motus conſpirantes* ſunt, quorum directiones congruunt, aut ſaltem parallelæ ſunt, & easdem ad partes tendunt.

23. *Vires* verò & motus *Contrarii* hoc eſt, *directe* oppoſiti, quorum directiones quidem congruunt aut ſaltem æquidiſtantes ſunt, ſed in oppoſitas partes vergunt.

Hactenus generales corporum affectiones, quibus recenſitæ virium ſpecies applicari poſſunt, breviter attigimus. Ordinis ratio inſuper requirit ut corporum ſpecies, quibus vires illæ variè poſſunt applicari, ab invicem diſtinguantur; corpora enim ſunt vel ſolida vel fluida; & ex diverſis hiſce ſpeciebus diverſa reſultant phænomena.

24. *Corpora ſolida* aut *conſiſtentia* dicuntur ea, quorum elementa ſaltem eousque cohærent, ut nulla corporis pars ſenſibiliter moveri poſſit, quin tota maſſa eundem motum participet. Cæterum ex obſervationibus Celeb. Dominici Caſſini conſtat metalla frigori expoſita nonnihil contrahi, & vice verſa, quoad Volumen, extendi in locis calidis; & ejusmodi metallorum extenſiones & contractiones, quibus haud dubie duriſſima quæque alia corpora plus minus obnoxia ſunt, absque interno partium motu fieri nequeunt: ſed quia hi motus, ex ſolis phænomenis per ratiocinia colligendi, in ſenſus immediate non incurrunt, definitioni iſti nihil officere poſſunt; quandoquidem in ea corporum durorum, ſeu ſolidorum, elementa non abſolute cohærere dicuntur, ſed tantum eousque, ut ea ab invicem avelli aut moveri ſenſibiliter nequeant, quin totum corpus eodem motu abripiatur.

25. *Fluida* verò corpora ſunt, quorum particulæ agiliſſimæ non cohærent, ſed facile moveri poſſunt non motâ univerſâ fluidi maſſâ. In fluidis viſcidis particulæ nonnihil cohærere videntur, ſed talis earum adhæſio miram earumdem inter ſe mobilitatem non tollit, ac propterea talia fluida ex allata hac definitione non excluduntur.

DE VIRIBUS ET MOTIBUS CORPORUM

LIBER PRIMUS.

HIc Liber reſpicit *Corpora ſolida* dividiturque in duas ſectiones, quarum prima verſatur circa Æquilibra ſolicitationum gravitatis aliaque huc pertinentia, & ſectio altera expendit motus, qui ex ejusmodi ſolicitationibus, ut libet variatis, reſultant.

SECTIO I.

De Solicitationum Corporibus varie applicatarum Æquilibriis & Mediis Directionibus.

26. CUm Solicitationes variis corporibus applicatæ ita inter ſe committuntur, ut nulla earum reliquas vincere queat, ipſæ in *Æquilibrio* conſiſtere dicuntur. Ejusmodi Solicitationes *Potentiarum Mechanicarum* nomine apud veteres inſigniebantur, quam nomenclationem nos etiam paſſim retinebimus. Quæ igitur ad harum Solicitationum ſeu Potentiarum mechanicarum Æquilibria, Medias Directiones, & id genus alia, pertinent, hac prima ſectione excutiemus, ſive corpora, ad quæ tales potentiæ pertinent, rigida ſint ſive flexibilia.

CAPUT I.

De proportione inter Solicitationes gravitatis, ſeu pondera corporum, cum proportione Maſſarum eorundem corporum collata.

APud Philoſophos Geometras elegans corporum proprietas celebratur, in eo conſiſtens quod corporum pondera in eadem prorſus ratione creſcant in qua ipſorum Maſſæ ſeu Quantitates Materiæ;

teriæ ; aut Geometrica phraſi eandem proferendo ; *quod corporum gravitates ſeu pondera Maſſis ipſorum proportionalia ſint.* Illuſtr. Newtonus, ſumtis accuratiſſimis pendulorum experimentis hanc, gravium proprietatem ſe ſemper comperiſſe teſtatur pag. 305. Princ. Phil. Nat. Math. primæ edit. quam etiam ex Coroll. I. Prop. XXIV. Lib. II. eleganter elicuit. Nobiliſſ. Hugenius hanc proprietatem non ſolum admittit, ſed etiam pag. 140. Diatribæ De Cauſſa Gravitatis ex regulis motus deducit. Et quia hæc corporum affectio per univerſam Philoſophiam Naturalem magni momenti eſt, aliam adhuc ejus demonſtrationem adducere tentabo, admiſſâ unicâ quæ ſequitur hypotheſi.

HYPOTHESIS.

27. *Eadem manente Materiæ quantitate, & directionibus gravium exiſtentibus parallelis, ſeu in Centro indefinite diſtanti convergentibus, pondera corporum non mutantur, variatis eorum poſitione reſpectu horizontis & figuræ.*

Hoc eſt, corpus quodvis idem pondus retinet, quocunque modo id poſitum ſit reſpectu horizontis, nec ejus pondus mutari cenſendum, ſi ejus figura in aliam, quamcunque ſcilicet, in globum, cylindrum, conum &c. mutata ſit, modo eadem manſerit materiæ quantitas, ſeu maſſa.

PROPOSITIO I. Lemma.

28. *Cauſſa gravitatis, quæcunque ea ſit, non tantum agit in partes exteriores corporum, ſed etiam in interiores omnes.*

Nam ſi gravitatis cauſſa in exteriores tantum corporum partes ageret, in eas ſolum ageret, quæ horizonti averſæ ſunt corporum ſuperficies, atque adeo corporum pondera hiſce ſuperficiebus proportionalia eſſent: atqui, pro varia corporis poſitione & ſitu, ſuperficies horizonti averſa modo major modo minor eſt; ergo, ſi gravitatis impreſſiones ſuperficiebus hiſce proportionales eſſent, ſequeretur, mutari corporis pondus, pro alio atque alio ejus ſitu, contra hypotheſin.

Deinde, ſi gravitas tantum ageret in exteriores corporum partes, non verò in interiores omnes, ſequeretur, quod, mutatâ figurâ corporis, ſed eadem manente materiæ quantitate, aliud atque aliud inde reſultet corporis pondus; quandoquidem variatis figuris varian-

riantur ſimul particularum & ſuperficierum horizonti averſarum poſitiones ac quantitates, atque adeo variarent corporum pondera eadem manente eorum materiæ quantitate. Quæ omnia ſunt contra hypotheſin articulo 27. aſſumtam.

Corollarium.

29. Idcirco nullius corporis pondus in omni poſitione & figura idem manere poteſt, niſi ſingula ejus elementa æqualia æquales gravitatis impulſus excipiant. Quo poſito facilis erit probatu ſequens

PROPOSITIO II. Theorema.

30. *Pondera corporum quantitatibus materiæ ſeu maſſis eorum proportionalia ſunt.*

Sint primùm duo corpora commenſurabilia C, c, unum eorum elementum e, numerus elementorum in Corpore C, N & numerus in altero c, dicatur n, & denique maſſæ corporum ſeu materiæ quantitates dicantur reſpective M, m. Quibus poſitis, quia (§. 29.) ſingula utriusque corporis elementa æqualem à gravitate impreſſionem ſubeunt, ſi una ejusmodi impreſſio nominetur i, pondus corporis C ſeu ſolicitatio totalis à gravitate, qua corpus ad deſcenſum urgetur (§. 13.) eſt aggregatum ſolicitationum, quibus ſingula elementa urgentur, & quoniam harum ſolicitationum directiones ex hypotheſi parallelæ ſunt, ipſæ ſolicitationes ſeu gravitatis impreſſiones conſpirantes erunt; atque adeo ſolicitatio totalis gravitatis in corpore C erit una ſolicitatio ſeu impreſſio i ducta in numerum N elementorum, quæ in hoc corpore continentur, hoc eſt pondus ipſius C quod indicabo per pC fiet $= N.i$ ac $pc = ni$. Eſt verò $N.i : n.i = N.e : n.e$; ergo quia N. e eſt aggregatum particularum e in corpore C, ſeu hujus corporis maſſa M, & n. e maſſa alterius c ſeu m, erit omnino $pC : pc = M : m$ hoc eſt pondera corporum C, c ſunt maſſis eorum proportionalia. Q. E. D.

Corollarium I.

31. Si corporis maſſa, quæ ſubinde eâdem literâ deſignabitur, qua ipſum corpus ſignatur, ducetur in ſolicitationem ſeu gravitatis impreſſionem (hæc enim duo hoc loco & ubique unum idemque ſignificant) qua unum corporis elementum urgetur, factum exponet ſemper

per

per pondus abſolutum corporis, ut ſi corpus fuerit C, & gravitatis ſolicitatio, qua ſingula ejus elementa afficiuntur, nominetur G, quantitas ſeu factum C.G exponit pondus abſolutum corporis C, intelligendo per hanc literam C maſſam hujus corporis.

Corollarium II.

32. Hinc ſi, ut ſupra, Corporis hujus volumen & denſitas dicantur V & D, & pondus pC, erit pC ut G.D.V. Id eſt, pondus cujuſque Corporis eſt ut factum ex ſolicitatione gravitatis G, qua ſingula ejus elementa *e* urgentur, & denſitate D in Volumen V. Nam (§. 31) pC eſt ut CG, & (§. 18) C, quæ hoc loco idem ſignificat ac illic M, ſcilicet maſſam corporis, eſt ut D.V, ergo pC ſeu CG eſt ſicut G.D.V.

Corollarium III.

33. Et quia gravitas ſpecifica corporum conſiſtit in proportione ponderum abſolutorum corporum, ſub voluminibus æqualibus, ideo gravitates ſpecificæ denſitatibus proportionales erunt, cum (§. 16.) maſſæ corporum volumine æqualium denſitatibus proportionales ſint, & per præſentem propoſitionem pondera corporum, eorum maſſis. Idcirco ſi corporis noſtri C gravitas ſpecifica dicatur S, erit ejus pondus abſolutum ſeu pC ut S.V, quandoquidem S eſt ut D.G.

Scholion.

34. Hæc ipſa propoſitio ex theoria motus pendulorum aliter adhuc demonſtrari poteſt, ut à Cel. Newtono, in loco ſupra in proëmio hujus capitis jam indicato, præſtitum. Similem propoſitionem ex principiis, quibus ad derivanda ſymptomata motuum acceleratorum gravium utemur, facillimo etiam negotio eliciemus.

CAPUT II.

De Solicitationibus quibus Corpora rigida, id eſt inflexibilia, urgentur, earumque mediis directionibus.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 1. 35. Cum quælibet vires, ac per conſequens etiam ſolicitationes ſint ex genere quantitatis, per lineas rectas hiſce ſolicitationibus proportionales rectè poſſunt exponi. Idcirco ſi puncta A, C, E a rectæ A E a ſolicitationibus ſecundum directiones AB, CD, EF agentibus urgentur, hæ ſolicitationes ſeu potentiæ exprimentur rectis AB, CD, EF in ipſis earundem directionibus homologe ſumtis, adeo ut hæ lineæ ſolicitationes vel potentias earumque directiones ſimul deſignent, & hoc in ſequentibus tantum non ſemper obſervabitur.

II.

Fig. 1. 36. Si plurium ſolicitationum vel potentiarum, in æquilibrio conſiſtentium, nonnullæ poſitæ ſint ad unam partem corporis ad quod pertinent, reliquæ verò vel reliqua ad partem oppoſitam, Solicitationes, quæ ſunt ad unam partem, reliquis in parte oppoſita *æquipollere* dicentur. Ut ſi rectæ A E, aut cuilibet alii corpori potentiæ AB, CD, EF applicatæ ſint ab una parte, in parte verò oppoſitâ potentia GH agens ex G in H, & hæc cum reliquis ipſi oppoſitis in æquilibrio conſiſtat. Potentia unica GH, reliquis omnibus AB, CD, EF æquipollere dicitur. Cæterùm monendus eſt tyro, quod potentia vel ſolicitatio, quæ reliquis æquipollere dicitur, ipſis ideo æqualis cenſenda non ſit; etenim *æquipollere* & *æquale eſſe* in Mechanicis non ſunt phraſes ſynonimæ. Unicus enim eſt
Fig. 2. caſus, quo potentia GH oppoſitis AB, CD, EF æquipollens ipſis ſimul ſumtis æqualis eſt, tunc ſcilicet, cum hæ conſpirantes ſunt (§. 22.) ipſisque altera GH (§. 23.) directè contraria.

III.

37. Producta GH in I, ejus continuatio GI *media directio* vel

axis

axis æquilibrii deinceps nominabitur potentiarum AB, CD, EF, Fig. 1, 2. & denique punctum G, in quo media directio corpori occurrit, & cui impedimentum O ſuppoſitum potentias ad æquilibrium compoſitas ſuſtinet, quod impedimentum ſeu ſuſtinaculum aliàs *hypomochlium* vocari ſolet, *centrum æquilibrii* poſthac appellabitur.

AXIOMA.

38. *Solicitatio quæ ex aliis ſolicitationibus conſpirantibus juxta directiones congruentes naſcetur, hiſce omnibus æquabitur directionemque habebit congruentem pariter ipſarum directionibus.*

Solicitatio vero ex directè oppoſitis reſultans, æquivalebit exceſſui quo fortiores ſuperant oppoſitas debiliores.

PROPOSITIO III. Theorema.

39. *Solicitatio ex duabus non conſpirantibus, nec directe oppoſitis, mobili cuidam impreſſis, naſcens, ſe habet ad alterutram earum ex quibus reſultat, ut diameter parallelogrammi, cujus latera exponunt has ſolicitationes earumque directiones, ad latus quod ſolicitationem exponit.*

Citetur mobile A ſolicitationibus quibuscunque AB, AC qua- Fig. 3. rum directiones angulum quemcunque CAB contineant: deſcripto parallelogrammo ABCD, ejus diameter AD directionem & ſolicitationem exponet, quæ ex lateralibus AC & AB reſultat.

Demonſtr. Cogitetur mobile A rectæ mobili AB inhærere; ſed ita tamen ut in ea liberè moveri queat ex A verſus B, lineam verò AB duntaxat motu parallelo ſibi ipſi & rectæ CD ſuper AC ferri poſſe, deinde rectam mobilem AB corpus A ſecum deferentem urgeri verſus CD ſolicitatione AC; mobile vero A in linea AB urgeri ſolicitatione AB; & manifeſtum erit conatum A2A, quo linea mobilis AB ad rectam ipſi parallelam CD accedere conatur, urgente ſolicitatione AC, ſe habere ad conatum 2A2D urgente ſolicitatione AB corpus A in hac rectâ mobili, ut AC ſe habet ad AB vel CD; jam quia ex hypotheſi 2A2B ipſi CD parallela eſt, &, ut modo vidimus, A2A : 2A2D = AC : CD, erit punctum 2D in diametro AD parallelogrammi BC: Porrò, quia mobile A participat motum A2A, vel potius conatum ad motum lineæ mobilis AB, in qua moveri poſſe intelligitur, & motum proprium, ſeu potius conatum, ad hunc motum

tum 2A2D, ac quia, ſi linea mobilis & corpus ſpatiola utlibet parva A2A & 2A2D ſimul deſcribere potuiſſent, idem id fuiſſet quam ſi corpus A ſpatiolum A2D tranſmiſiſſet; liquet utique, ex conatibus lineæ mobilis & corporis, A2A & 2A2D naſci conatum A2D juxta directionem AD, qui ſe habeat ad A2A vel ad 2A2D ſicut AD ad AC, vel ad AB; ergo ex ſolicitationibus AC & AB reſultat ſolicitatio AD in directione A2D. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

40. Solicitationes, quæ exponuntur lateribus AC, AB parallelogrammi BC, ideo dici poſſunt ſolicitationes *laterales*. Deinde in communi Mechanicæ ſcriptorum phraſeologia motus vel ſolicitatio juxta diagonalem AD ex motibus ſeu ſolicitationibus lateralibus AC, AB componi dicitur. Sed quia video non deeſſe Autores, qui neſcio quæ difficultatum ſpectra in hac re ſibi ſomnient, perperam exiſtimantes per compoſitionem & reſolutionem, additionem vel ſubductionem motuum vel potentiarum componentium intelligendas eſſe, ne ejusmodi æquivocatio tyronibus negotium faceſſeret, motus vel potentias ex aliis componi dici ſolitas, ex iis naſcentes vel reſultantes appellare, conſultius duxi.

Corollarium I.

41. Producta parallelogrammi diametro in M, ac facta AM = AD, ſolicitatio AM in hac directione AM reliquis AC & AB æquipollebit. Nam ſolicitatio AM alteri æquali & directè contrariæ AD æquipollet, atqui AD naſcitur ex lateralibus AC & AB; neque plus aut minus præſtare poteſt quam ſolicitationes hæ laterales ſimul agentes, proptereaque perinde eſt ſive mobile A unica ſolicitatione AD, ſive duabus collateralibus AC, AD urgeatur, ergo AM ipſi AD contraria & æqualis lateralibus AC & AB omnino æquipollet.

Corollarium II.

Fig. 4. 42. Hinc ſi tres ſolicitationes eidem mobili impreſſæ AM, AB, AC in æquilibrio conſiſtant, erit quælibet earum ad alterutram ex reliquis, id eſt AM ad AB, ut ſinus anguli BAC à reliquis comprehenſi, ad ſinum anguli MAC à ſolicitatione AM & altera AC ex reliquis formati. Nam (§. 41.) AM = AD, atque adeo

AM:

AM : AB ſicut AD ad AB, verum ex trigonometria conſtat, eſſe AD ad AB, ut ſinus anguli ABD ad ſinum anguli BDA, ergo etiam AM eſt ad AB ut ſinus anguli ABD, vel ejus ſupplementi ad duos rectos BAC ad ſinum anguli BDA, vel ejus alterni æqualis DAC, aut etiam hujus ad duos rectos ſupplementi MAC. Et ſic ex ternis ſolicitationibus, ad æquilibrium compoſitis, duæ quælibet ſunt inter ſe ut ſinus angulorum ipſis oppoſitorum, hoc eſt AB : AC = ſin. MAC : ſin. MAB, & AM : AC = ſin. BAC : ſin. MAB. Et ſic ubique.

Elegans hoc theorema à Cel. Petro Varignon primùm, quod ſciam, demonſtratum eſt, cui ferme totam ſuam novam Mechanicam, anno 1687. Lutetiæ editam, ſuperſtruxit.

Corollarium III.

43. Ex hiſce etiam patet ratio theorematis non inelegantis, quod Robervallius Torricellio quondam propoſuit, ſed ſine demonſtratione, ut videre eſt in Opere Academiæ Regiæ Scientiarum Pariſienſis, quod inſcribitur *Divers Ouvrages de Mathematique & de Phyſique de Meſſieurs de l'Academie Royale des ſciences*, fol. 301. Theorema vero noſtris loquendi phraſibus expreſſum, eſt hujusmodi: Si per terminos rectarum AM, AB, AC trium ſolicitationum eidem puncto A applicatarum, repræſentatricium, ducantur rectæ MB, BC & MC, punctum A, cui ſolicitationes in æquilibrio conſiſtentes impreſſæ ſunt, exiſtet in centro gravitatis trianguli MBC. Circa AM, AB & AM, AC deſcripta ſint parallelogramma AMSB, ARMC, quibus deſcriptis, & quia tres ſolicitationes AM, AB, AC in æquilibrio ſunt, ſecundùm hypotheſin AC æquipollebit (§. 36.) ipſis AM & AB atque adeo (§. 41.) AC = AS, & hæ duæ in directum poſitæ erunt, unde CA producta latus trianguli MB ſecabit in medio Q, ſimiliter AB producta ſecabit latus trianguli MC in ejus medio P; jam ex ſtaticis conſtat trianguli MBC centrum gravitatis eſſe in ſingulis lineis CQ, BP ex quibusvis trianguli angulis C & B ad puncta Q & P in medio laterum BM ac CM angulis illis oppoſitorum ductis, propterea centrum gravitatis trianguli BMC, eſt in communi interſectione A harum linearum CQ & BP.

Propositio IV. Lemma.

44. *Si ſingula corpora poſitione data* A, B, C, D &c. *in ſuam quod-*

que diſtantiam à plano poſitione dato a P d *ducantur, erunt omnium facta æqualia facto ex aggregato omnium corporum in diſtantiam* E e *centri eorum gravitatis* E *à dato plano, in caſu quo omnia corpora ad eandem plani* a P d *partem ſita ſunt.*

Sin verò nonnulla corpora A, B &c. *poſita fuerint ad unam plani* PQ *partem, & reliqua* C, D *ad alteram partem; Exceſſus, quo facta ex corporibus ad partes centri omnium gravitatis* E *ſitis, in ſuas homologas à plano* PQ *diſtantias, ſuperant facta ex corporibus reliquis in ſuas ab eodem plano diſtantias, æquabitur facto ex omnibus corporibus ſimul ſumtis in diſtantiam* e P, *communis omnium centri gravitatis* E *à plano* PQ.

Fig. 5. Caſu primo oſtendi debet, quod, poſitis $A + B + C + D +$ &c. $= M$, ſit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee$. Et ſecundo caſu, eſſe $C. cP + D. dP - A. aP - B. bP = M. eP$, deſignantibus cP, dP, aP, bP diſtantias corporum C, D, A, B &c. à plano PQ.

Demonſtr. I. Per centrum gravitatis E omnium corporum tranſeant $\alpha\delta$ parallela plano *ae*, & eE parallela plano PQ alteri *ad* recto, & $\alpha\delta$ conſiderari poteſt tanquam axis æquilibrii ponderum A, B, C, D, atque adeò erit ob caſum æquilibrii $A. A\alpha + D. D\delta = B. B\beta + C. C\kappa$, vel quod eodem recidit, $B. B\beta + C. C\kappa - A. A\alpha - D. D\delta = o$. Item $A. ae + B. be = C. ce + D. de$, vel $C. ce + D. de - A. ae - B. be = o$ reſpectu axis æquilibrii eE.

II. Quia $Aa = \alpha a - \alpha A = Ee - A\alpha$, $Bb = Ee + B\beta$, $Cc = Ee + C\kappa$, & $Dd = Ee - D\delta$, erit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = A. Ee + B. Ee + C. Ee + D. Ee + B. B\beta + C. C\kappa - A. A\alpha - D. D\delta = M. Ee$, quia $A + B + C + D = M$, & (num. 1 hujus.) $B. B\beta + C. C\kappa - A. A\alpha - D. D\delta = o$. Quod eſt primùm.

III. Quia $aP = ae - eP$, $bP = be - eP$, $cP = ce + eP$; & $dP = de + eP$, erit $C. cP + D. dP - A. aP - B. bP = C. eP + D. eP + A. eP + B. eP + C. ce + D. de - A. ae - B. be = M. eP$, quia (num. 1 hujus.) eſt $C. ce + D. de - A. ae - B. be = o$, & $C + D + A + B = M$ ut antea. Quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium I.

Fig. 6. 45. Si corpora rectà aſcendant in lineis Aa, Bb, Cc, Dd &c. horizonti perpendicularibus, eorumque centrum gravitatis E in recta Ee illis parallela, erit $A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee$. Nam ducta ut libet recta $\alpha\delta$ ipſis Aa, Bb &c. perpendiculari, eritque (§. 44.) $A. A\alpha + B. B\beta + C. C\kappa + D. D\delta = M. E\varepsilon$, & $A. \alpha a +$

B.

B. βb + C. κc + D. δd = M. ϵe, ergo A. Aa + B. Bb + C. Cc + D. Dd = M. Ee.

Corollarium II.

46. Si omnia corpora A, B, C, D &c. ſint æqualia, omnes eorum diſtantiæ à plano aPd, erunt multiplum diſtantiæ communis eorum centri gravitatis E ab eodem plano ſecundum ponderum numerum. Exceſſusque quo diſtantiæ illorum à plano PQ ſecundi caſus, quæ ad partes centri omnium gravitatis poſita ſunt, excedunt diſtantias illorum, quæ ſunt in parte oppoſita, eſt diſtantiæ centri omnium gravitatis E ab eodem plano PQ multiplum, ſecundùm corporum A, B, C, D &c. numerum. Fig. 5.

Scholion I.

47. Ex hiſce nunc tam facile deduci poteſt regula Guldini jam à Pappo diſertè indicata, ut haud abs re futurum exiſtimem, ſi eam hoc loco demonſtratam darem, quanquam ea à pluribus jam demonſtrata ſit. Guldini Regula ita habet: *Figuram ex converſione cujuslibet magnitudinis circa aliquam rectam poſitione datam oriundam, æquari facto ex Magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis.* Figura genitrix dicatur F, diſtantia centri ejus gravitatis ab axe rotationis D, ordinata figuræ y ad axem rotationis, dx elementum axis, ſolidum ex converſione figuræ F circa axem x dicatur S, ejus elementum dS; quibus poſitis per præſentem propoſitionem erit D. F = ſummæ momentorum elementorum magnitudinis F $= \int \frac{1}{2} yydx$, nam elementum ipſius F eſt ydx, & hujus momentum $\frac{1}{2}yydx$. ſit p circumferentia circuli cujus radius eſt I, & ducatur antecedens æquatio in p, ut fiat pD. F $= \int \frac{1}{2} pyydx$. Jam pD eſt circumferentia radii D, & py circumferentia radii y, atque adeò $\frac{1}{2}pyy$ area circuli ejusdem radii y, & per conſequens $\frac{1}{2}pyydx$ cylindrulus ſolido S inſcriptus, ſeu ejus elementum dS; ergo pD. F $= \int$dS = S. Quod erat oſtendendum pro ſolidis rotundis; eadem eſt demonſtratio in aliis.

Scholion II.

48. Quanquam in hac propoſitione gravitas in ſingulis corporibus A, B, C, D eadem ſeu uniformis ſumta ſit, ita ut pondera eorum abſoluta maſſis proportionalia ſint, quoniam tamen gravitas di-

diverſa eſſe poſſet, & hoc lemma etiam generaliter verum eſt, ſcilicet tunc etiam, cum revera gravitatis ſolicitationes ipſis corporum maſſis A, B, C, D proportionalia non exiſtunt, id ſaltem indicandum fuit hoc loco. Nam ſi per A, B, C &c. non amplius, ut in propoſitione, maſſæ horum corporum, ſed pondera eorum abſoluta intelligantur, canon propoſitionis adhuc obtinebit. Verum ſatius foret, per A, B &c, ut in propoſitione, intelligere maſſas horum corporum, &, juxta articulum 31, eorum pondera deſignare per facta ex maſſis in gravitatis ſolicitationes P, Q, R, S quibus ſingula A, B, C, D reſpectivè urgentur, id eſt per AP, BQ, CR, & D. S &c. Quod alibi in applicatione obſervabimus.

PROPOSITIO V. Theorema.

Fig. 7. 49. *Solicitationum quarumlibet* PA, PB, PC, PD &c. *eidem mobili* P *impreſſarum media directio* PE *eſt recta jungens centrum gravitatis mobilis* P *& centrum gravitatis* E *omnium punctorum* A, B, C, D &c. *quibus rectæ ſolicitationum repræſentatrices terminantur; & ſolicitatio ex omnibus corpori impreſſis reſultans exponi debet multiplo rectæ* PE, *ſecundum punctorum ſeu ſolicitationum impreſſarum numerum.*

Per mobilis P centrum gravitatis ducta intelligantur plana PS & aPd ſibi invicem recta, & per terminos rectarum PA, PB &c. perpendiculares ad planum ad demittantur Aa, Bb, Cc, Dd, & ex centro gravitatis E punctorum A, B, C &c. normalis Ee. Solicitationum numerus dicatur N, & in producta PE ſumatur PR = N, PE. Dico PR exponere ſolicitationem ex omnibus mobili P impreſſis PA, PB, PC, PD &c. naſcentem.

I. Per E & R agantur EL & RS plano aPd æquidiſtantes, ob triangulorum PLE & PSR ſimilitudinem, & propter PR = N, PE, erunt PS = N, PL & SR = N, LE.

II. Quia E eſt centrum gravitatis punctorum A, B, C, D &c. quorum numerus ſecundum hypotheſin eſt N, erit (§. 46.) $aA + bB + cC + dD +$ &c. $=$ N. eE, & Pc + Pd + &c. − Pa − Pb − &c. = N. Pe.

III. Quia ſingulis ſolicitationibus obliquis (§. 39.) æquipollent ſolicitationes earum laterales plano aPd perpendiculares & parallelæ, ſcilicet ipſi PA æquipollent laterales aA, Pa, ipſi PB verò laterales bB & Pb & ſic in cæteris, omnibus obliquis æquipollebunt omnes earum laterales ſolicitationes, id eſt conſpirantes aA, bB,

cC,

cC, dD, & oppoſitæ Pa, Pb ex una & Pc ac Pd ex altera plani PS parte; atqui ex conſpirantibus reſultat ſolicitatio ipſis omnibus (§. 38.) æqualis id eſt ſolicitatio $aA + bB + cC + dD +$ &c. (n. 11.) $=$ N. eE (n. 1.) $=$ PS, & ex omnibus contrariis (§. 38.) naſcitur ſolicitatio æqualis exceſſui quo fortiores excedunt debiliores, id eſt ipſi Pc + Pd + &c. − Pa − Pb − &c. (num. 11.) $=$ N. Pe (num. 1.) $=$ SR, ergo omnibus obliquis PA, PB &c. æquipollent duæ laterales PS & SR, & (§. 39.) hiſce unica PR: hæc ergo denotat mediam directionem ſolicitationum PA, PB, PC, PD &c. & ſolicitationem ex ipſis naſcentem, vel quod idem eſt, ipſis æquipollentem. Quod erat demonſtrandum.

Elegans hoc theorema Illuſtri Leibnitio acceptum eſt ferendum, utpote quod in aliqua ejus epiſtola, jam pridem ad Walliſium data, ſine demonſtratione exhibetur. Vid. Tom. III. Oper. Walliſii fol. 687.

Corollarium I.

50. Hinc punctum P, cui quatuor ſolicitationes PA, PB, PC, PT ad æquilibrium quidem compoſitæ; ſed non in eodem plano exiſtentes, impreſſæ ſunt, erit in centro gravitatis pyramidis TAC, in cujus angulis ſolicitationum repræſentatrices lineæ terminantur. Sit E centrum gravitatis punctorum A, B, C & jungatur PE, quæ media directio erit ſolicitationum PA, PB & PC, ac hisce æquipollebit ſolicitatio 3.PE; hinc quia omnes in æquilibrio ſunt, erit PT $=$ 3.PE; atque adeo eſt PT : PE $= 3 : 1 =$ A + B + C : T conſiderando hæc puncta tanquam ponduſcula æqualia, ac proinde P eſt in centro gravitatis punctorum quatuor angularium pyramidis A, B, C, T. Sed idem eſt centrum gravitatis pyramidis, quod punctorum ejus angularium. Ergo liquet aſſertio. Fig. 8.

Hoc eſt alterum theorema, quod Robervallius Torricellio olim propoſuerat in loco ſupra (§. 43.) jam indicato.

Corollarium II.

51. Hinc etiam, ſi mobile P ad ſingula ſuperficiei curvæ ABC puncta urgeatur ſolicitationibus expreſſis punctorum ſuperficiei diſtantiis à mobilis centro; media omnium ſolicitationum directio erit recta PE, jungens centra gravitatis mobilis P & ſuperficiei curvæ ABC, ac ſolicitatio ex omnibus naſcens ipſisque æquipollens Fig. 9.

eſt,

eſt, ut factum ex ſuperficie ABC in diſtantiam EP centri ejus gravitatis à centro corporis P. Nam numerus punctorum ſeu ſolicitationum eſt ipſa ſuperficies ABC, ejusque centrum gravitatis eſt centrum omnium punctorum, quibus rectæ ſolicitationum repræſentatrices terminantur.

Corollarium III.

Fig. 10. 52. Quinimo ſi idem mobile P, ad ſingula curvæ ABC puncta urgeatur, ſed ſolicitationibus non ipſis PB diſtantiis punctorum à mobili, ſed ipſis LP in ſingulis BP ſumtis, & in curva quacunque DLH terminatis, proportionalis. Erit etiam nunc omnium ſolicitationum PL media directio PE recta jungens centra mobilis P & curvæ DLH, ac ſolicitatio ex illis omnibus reſultans, factum ex gravitate curvæ DLH in rectam EP; ſed hujus curvæ partes non uniformiter graves intelligendæ, verùm difformiter; ita ut ductis per homologa utriusque curvæ AB & DLH puncta B, L tangentibus BM & LM in puncto M concurrentibus, gravitas puncti B curvæ ABC uniformiter gravis, ſit ubique ad homologi puncti L curvæ DLH, gravitatem ut rectangulum MBP ad rectangulum MLP.

PROPOSITIO VI. Problema.

Fig. 11. 53. *Invenire mediam directionem ſolicitationum quarumvis* AG, BG, CG, DG *quibus puncta* A, B, C, D *lineæ rectæ inflexilis* AD *urgentur.*

Ex quolibet extra lineam AD puncto O agantur per ſingula lineæ puncta A, B, C, D in quibus linea juxta directiones AG, BG &c. urgetur, rectæ indefinitæ OAF, OBF, OCF, ODF, ductisque per ſingula puncta G in quibus lineæ ſolicitationum aut potentiarum applicatarum repræſentatrices terminantur rectis indefinitis FG lineæ AD parallelis & lineis OA, OB, OC, OD &c. quantum opus eſt productis in punctis F occurrentibus. Dehinc ſingulis AF, BF, CF, DF &c. in ſuis directionibus transferantur à puncto concurſus O, reſpectivè æquales O*a*, O*b*, O*c*, O*d* &c. punctorumque *a*, *b*, *c*, *d* centrum gravitatis *e* inveniatur atque in linea OM per hoc centrum *e*, & punctum O ducta lineæque AD occurrente in E, ſumatur EM, quæ ſit ad O*e* ut numerus punctorum *a*, *b*, *c*, *d* ad unitatem; ductaque per punctum M recta NL æquidiſtante ipſi AD, aſſumatur in ea ML omnibus FG inter AF,

BG,

BG, & BF, BG &c. interceptis, æqualis, eo caſu, quo omnes GF conſpirantes ſunt, vel juxta ordinem literarum ex F verſus G ſumtæ omnes ad eandem plagam vergunt, tunc enim ML in eandem plagam & omnibus FG æqualis ſumenda eſt; ſin vero nonnullæ FG vergerent ad unam plagam, reliquæ vero FG in plagam oppoſitam, eo caſu ML æqualis facienda eſſet exceſſui quo fortiores FG ſimul ſumtæ, excedunt reliquas FG in plagam priori oppoſitam agentes. eamque in partem ducenda eſſet in quam agunt fortiores FG: Linea EL jungens puncta E, L dabit mediam directionem omnium ſolicitationum AG, BG, CG, DG &c. ejusque longitudo EL exponet ſolicitationem omnibus applicatis æquipollentem in hac media directione EL, ſeu etiam onus quod ſuſtinaculum V puncto E ſubjectum ab iisdem applicatis potentiis AG, BG, CG &c. ſuſtineret. Quod erat inveniendum.

Demonſtratio. Quælibet ſolicitatio vel potentia applicata AG æquipollet (§. 39.) lateralibus AF & FG; atque adeo omnes AG, BG, CG &c. æquipollebunt omnibus AF, BF, CF, DF ſecundum hypotheſin in puncto O convergentibus, omnibusque harum collateralibus FG. Cogitetur jam virga ſeu linea AD, cui potentiæ applicatæ vel ſolicitationes AG, BG &c. impreſſæ ſunt, plano gravitatis experti, perinde ac ipſa linea, infixa eſſe, ita ut linea moveri nequeat, quin planum ſimul moveatur; hoc enim modo fiet ut potentia AF eandem vim habeat movendi planum, in quocunque directionis OA puncto ipſi plano applicata ſit, ſive in puncto A, aut in quovis alio *a*, O &c. hoc per ſe ſatis evidens eſt; nam ſi potentia AF rectæ AD in A applicata in directione OA majorem vim haberet ad movendum planum AODF quam hæc eadem potentia AF ac in eadem directione OA ſed plani AOD puncto O applicata, ſequeretur potentiam AF cum alia ipſi æquali, puncto O applicata in eadem directione, ſed in partem oppoſitam ex *a* verſus O, vel potius in linea AO extrorſum trahente punctum plani O, non eſſe in æquilibrio, ſed ipſi prævalere, aut hanc illa fortiorem exiſtere; atque adeò duæ potentiæ æquales AF & *a*O juxta eandem lineam AO in oppoſitas partes agentes ſe mutuo in æquilibrio non tenerent, quod eſt abſurdum. Ergo potentia AF rectæ AD applicata eundem effectum præſtat ac potentia O*a* ipſi AF æqualis & in eadem directione OA puncto plani O applicata, quod de reliquis BF, CF &c. etiam intelligendum: ac proinde potentiarum AF, BF, CF, DF eadem eſt media directio, quæ potentia-

rum hiſce æqualium Oa, Ob, Oc, & Od &c. atqui harum media directio OeM (§. 49.) eſt linea jungens punctum O & centrum gravitatis e punctorum a, b, c, d &c. & potentia omnibus applicatis puncto O, aut rectæ in punctis A, B, C, D &c. æquipollens eſt multipla ipſius Oe ſecundum punctorum a, b, c, d &c. numerum, atque adeo exponitur recta EM, quæ (conſtr.) eſt ad Oe ut numerus punctorum a, b, c &c. ad unitatem. Æquipollet ergo potentia EM omnibus AF, BF, CF & DF, ex omnibus vero FG lineæ AD parallelis naſcitur ſolicitatio ipſis omnibus æqualis, ſi conſpirantes fuerint, vel æqualis exceſſui, quo fortiores FG ſuperant debiliores & oppoſitas FG, ac proinde utroque caſu exponitur recta ML quæ pro varietate circumſtantiarum (conſtr.) æqualis eſt ſummæ omnium FG eandem plagam reſpicientium, vel differentiæ earum quæ in diverſas plagas tendunt, unde cum omnibus AF, BF, CF, DF & omnibus FG æquipolleant duæ laterales EM & ML & hiſce duabus (§. 39.) unica EL, omnino patet hanc EL etiam æquipollere omnibus AG, BG, CG, & DG, quæ lineæ AD applicatæ ſunt. Propterea EL ſignificat mediam directionem potentiarum applicatarum & ſolicitationem in hac media directione ipſis omnibus æquipollentem. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

Fig. 11. 54. Si lineæ AD perpendiculares AH, BH, CH, DH agantur ipſis FG occurrentes in punctis H, hæ perpendiculares totidem potentias lineæ AD applicatas repræſentabunt, momentaque omnium earum, quæ ſunt ex una parte puncti E, æquabuntur momentis earum, quæ ſunt ex altera parte, id eſt, AH. AE + BH. BE = CH. CE + DH. DE. Ductis enim af, bh, dg, ci rectæ AD & AI, BI, CI, DI &c. rectæ OM parallelis, eritque propter centrum gravitatis e, $af + bh = dg + ci$, vel adſcita communi altitudine OE erunt facta ſeu rectangula OE. af + OE. bh = OE. dg + OE. ci. Vel Of. AE + Oh. BE = Og. DE + Oi. CE, quia OE. af = Of. AE propter triangula ſimilia OAE & Oaf, item OE. bh = Oh. BE, ob triangulorum OBE & OBh ſimilitudinem, & quia ob ſimiles rationes rectangula reliqua OE. dg, OE. ci rectangulis Og. DE, OI. CE reſpective æquantur. Porrò ob AI, BI, CI &c. parallelas (conſtr.) rectæ OM, & ſingulas Oa, Ob, Oc, Od æquales ſingulis AF, BF, CF, DF, æquabuntur etiam Of, Oh, Oi, Og ipſis AI, BI, CI, DI,

quia

quia quodvis triangulum Oaf reſpectivo AFI ſimile & æquale eſt, propterea ſubſtitutis in rectangulis æqualibus Of. AE + Oh. BE = Og. DE + Oi. CE, loco rectarum Of, Oh, Og & Oi, æqualibus AI, BI, DI ac CI eodem ordine ſumtis, fiet AI. AE + BI. BE = DI. DE + CI. CE. Vel ſubſtitutis adhuc loco ipſarum AI, BI, CI, DI, aliis rectis AH, BH, CH, & DH, quæ ipſis propter triangula ſimilia AHI, BHI, CHI, DHI analoga ſunt, hoc eſt, proportionalia, erunt tandem AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE. Porrò ſicut EM = Of + Oh + Og + Oi, = AI + BI + DI + CI, ita etiam EN rectæ ML perpendicularis, erit = AH + BH + DH + CH.

Corollarium II.

55. Ex centro æquilibrii E demiſſis ad directiones potentiarum AG, BG, CG, DG productas perpendicularibus EP, EQ, ER & ES, momenta potentiarum obliquarum ex una parte, æqualia erunt momentis potentiarum in parte altera. Hoc eſt, AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER. Nam quia quælibet triangulorum PAE, & HAG paria ſimilia ſunt, fient rectangula AH. AE, BH. BE, DH. DE ac CH. CE æqualia homologè rectangulis AG. EP, BG. EQ, DG. ES & CG. ER, unde quia (§. 54.) AH. AE + BH. BE = DH. DE + CH. CE, erit etiam AG. EP + BG. EQ = DG. ES + CG. ER. Fig. 12.

Scholion.

56. Caſus Corollarii hujus ſecundi obtinet non ſolum tunc, cum linea AD eſt recta, cui potentiæ obliquæ AG, BG &c. applicantur; ſed etiam in caſu, quo ipſa linea applicatas potentias habens eſt curva, imo etiam in rotis aliisque ejusmodi organis. Uno verbo, ſi circa aliquod punctum potentiæ aut ſolicitationes quæcunque in æquilibrio ſunt, momenta potentiarum, quæ agunt in unam partem, æqualia ſunt momentis potentiarum, quæ agunt in partem oppoſitam; atque ſic inopinatò incidimus in demonſtrationem directam & immediatam principii Archimedei de æqualitate momentorum, in caſu æquilibrii potentiarum inter ſe commiſſarum, quod varii varie demonſtrare conati ſunt. Cæterum ope Corollarii primi hujus, ipſum problema hujus propoſitionis multo ſimplicius jam ſolvetur, imò plura alia præſtabuntur quam antea, ut ex ſequentibus facile pateſcet.

PROPOSITIO VII. Theorema.

57. *Si lineæ inflexili & gravitatis experti (qualis etiam in præcedenti Propoſitione eſt ponenda)* AD *quotcunque ſolicitationes ſeu potentiæ obliquæ* A1A, B1B, C1C, D1D *applicatæ, atque hæ potentiæ omnes in ſuas laterales potentias lineæ* AD *perpendiculares & parallelas reſolutæ fuerint, erit, ductis per centrum æquilibrii* H *potentiarum lineæ* AD *perpendicularium* A2A, B2B, C2C, D2D, *rectâ* HI *ipſis omnibus ſimul ſumtis æquali & parallela, & per punctum* I *recta* IK *lineæ* AD *parallela ac æquali exceſſui, quo potentiæ lineæ æquidiſtantes, quæ ſunt ad unam lineæ* HI *partem ut* 2D1D, *ſuperant eas, quæ ipſi in parte contraria oppoſitæ ſunt* 2A1A, 2B1B, 2C1C, *recta jungens puncta* H, K *erit media directio potentiarum obliquarum virgæ ſeu lineæ* AD *applicatarum, ejusque magnitudo exponet onus, quo hypomochlion, ſeu ſuſtinaculum puncto virgæ* H *ſubjectum, juxta mediam directionem* HK *ab omnibus potentiis urgetur.*

Fig. 13. Cum quælibet ſolicitatio ſeu potentia obliqua A1A (§. 39.) ſpectari poſſit, tanquam naſcens ex ſuis lateralibus ſolicitationibus A2A & 2A1A virgæ AD perpendiculari & parallela, omnes potentiæ obliquæ conſiderari poſſunt tanquam naſcentes ex omnibus perpendicularibus A2A, B2B, C2C, D2D, & ex omnibus parallelis 2D1D, 2C1C, 2B1B, & 2A1A. Atqui (§. 54.) ex omnibus perpendicularibus reſultat ſolicitatio vel potentia ipſis omnibus ſimul ſumtis æqualis & parallela, tranſiens per earum centrum æquilibrii H, id eſt (conſtr.) ſolicitatio $HI = A2A + B2B + C2C + D2D$, ex parallelis verò naſcitur ſolicitatio æqualis (§. 38.) exceſſui, quo fortior vel fortiores excedunt debiliores ipſis contrarias, unde cum (conſtr.) ſit $IK = 2D1D - 2A1A - 2B1B - 2C1C$, hæc IK exponet ſolicitationem ex ſolicitationibus virgæ parallelis naſcentem; adeoque cum ex omnibus potentiis lateralibus virgæ perpendicularibus & parallelis naſci intelligantur, tum omnes obliquæ A1A, B1B &c. tum etiam duæ laterales HI & IK & ex hisce (§. 39.) unica HK, patet hanc ſolicitationem HK omnibus obliquis æquipollere ejusque directionem harum eſſe Mediam directionem, atque adeo punctum virgæ H in hac media directione urgeri ſolicitatione ſeu onere, quod exponitur magnitudine rectæ HK. Quod erat demonſtrandum.

Scho-

Scholion.

58. Eadem methodo, mutatis mutandis, obtinetur media directio potentiarum lineæ curvæ DAA utlibet applicatarum. Nam ſi potentiæ vel ſolicitationes applicatæ repræſententur per lineas AB, quarum unaquæque reſolvatur in ſuas laterales potentias AC, axi curvæ DE perpendiculares, & CB eidem æquidiſtantes, productisque CA ultra axem DE, ut ſingulæ EF ſingulis AC æquales fiant, potentia IN ſingulis EF ſimul ſumtis æqualis & per earum centrum æquilibrii ducta axique perpendicularis (§. 54.) erit potentia ſeu ſolicitatio omnibus EF æquipollens, unde cum ſingulæ hæ EF ſingulis AC æquales atque directæ oppoſitæ ſint, omnes EF cum omnibus AC in æquilibrio manebunt, ergo etiam unica potentia IN univerſis EF æquipollens cum iisdem AC in æquilibrio conſiſtet; pariter ductis DG axi DE normali, & rectis indefinitis AH eidem axi parallelis, & in iis factis GH ſingulis CB reſpective æqualibus, erit potentia IL univerſis GH æqualis & parallela tranſiens per centrum æquilibrii K harum GH, cum iisdem GH (§. 54.) in æquilibrio, ergo duæ potentiæ laterales IN & IL cum univerſis AC & univerſis CB in directionibus AG agentibus, id eſt, univerſis GH in æquilibrio conſiſtent, atque adeo cum omnibus obliquis; at vero ex potentiis IN & IL (§. 49.) naſcitur potentia, cujus directio IO tranſit per punctum I & centrum gravitatis O punctorum L & N, & quæ exponitur per multiplum rectæ IO ſecundum punctorum L & N numerum, hoc eſt per 2.IO; ergo talis potentia ſola in æquilibrio erit cum univerſis AB curvæ DAA applicatis, idcirco (§. 37.) recta OI producta in M, dat mediam directionem IM omnium potentiarum AB, & hypomochlium R curvæ DAA applicatum ſuſtinebit onus æquale 2.OI ab omnibus applicatis potentiis AB. Quod erat inveniendum. Cæterum etſi punctum I, quod eſt communis interſectio rectarum KL & SN in curva DA eſſe videtur, in eam tamen incidere non debet, ac propterea puncta I & R ſunt ſemper diverſa. Fig. 14.

Conſtructioni hujus Scholii non multum abſimilem etiam reperit Cl. Varignon. Verum in hac conſtructione non omnia curvæ puncta ab applicatis potentiis urgentur, nam caſus quo ſingulis ejus punctis potentiæ applicantur, pendet à quadraturis & centris gravitatis quarundam figurarum curvilinearum, ut ex ſequenti Propoſitione elucefcet.

PRO-

PROPOSITIO VIII. Theorema.

Fig. 15. 59. *Si Vectis curvilineus* ABB, *cujus axis* AT *ordinatas* BC *ad angulos rectos excipit, à potentiis vel ſolicitationibus utlibet obliquis* BG, BG &c. *in ſingulis punctis urgeatur, protracta* GB *in* T, *ductisque per* B *rectis* BS *curvæ* ABB *normali, & * BE *axi* AT *parallela, demiſſaque ex* S *normali* SV *ſuper* BT, *in ordinata* BC *producta ſumatur* CD, *quæ ſit ad* BG *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræſentatricem, ut* BV *ad* BT, *& in recta* BE *producta accipiatur* EF, *quæ ſit ad eandem* BG, *ut rectangulum* BV.CT *ad rectangulum* SC.BT, *& hoc reſpectu cujusvis alius curvæ puncti* B *fieri intelligatur, indeque naſcentur figuræ mixtilineæ* AXDC, AXFE, *quarum centra gravitatis ſint in* R *&* Q, *per quæ agantur* MR *rectæ* AN, *&* QO *axi* AT *æquidiſtantes, ſeque mutuo ſecantes in* M; *ſi rectangulum ſub* MO *& data recta* A *æquale areæ* AXFE, *& rectangulum ſub recta* MR *& eadem data* A *æquale areæ* AXDC *facta fuerint, linea recta* IM *per punctum concurſus* M *rectarum* QO *&* LR, *& per medium* I *rectæ* OR *jungentis puncta* O *&* R *ducta atque verſus* P *protracta, dat mediam directionem* MP, *omnium potentiarum* BG *curvæ* AB *applicatarum, & Onus quod hypomochlion* Z *ab omnibus potentiis ſuſtinebit, exponetur rectangulo* 2MI.A *ſub dupla* MI *& data* A.

Sic Bb elementum curvæ AB, per cujus terminum b ducantur bd rectæ BD & bf lineæ BF parallelæ, tum etiam per terminum G potentiæ BG recta GH axi parallela, quæ ordinatæ CB productæ occurrat in H, & denique demittatur ba perpendicularis ad GT, quibus poſitis,

I. Quia (conſtr.) CD : BG = BV : BT, & propter triangula ſimilia BHG & BCT, eſt BG : BH = BT : BC, erit etiam ex æquo CD : BH = BV : CB. Porrò quia triangula BVS & Bba, propter angulos bBa, VBS recto æquales, atque adeò ipſis VBS & VSB (qui ſimul ſumti etiam recto æquantur) æquales, adeò ut ablato communi VBS remaneant æquales bBa & VSB, & propter angulos ad a & V rectos, ſimilia ſunt; habebimus inſuper BV : BS = ba : Bb, triangula verò ſimilia bBβ & BCS præbent BS : BC = Bb : Bβ, igitur denuo ex æquo BV : BC = ba : Bβ. Sed initio hujus inveniebatur etiam BV : BC = CD : BH, ergo CD : BH = ba : Bβ, adeoque BH.ba = CD.Bβ = rectangulo Cδ areæ AXDC inſcripto.

II. Quoniam (conſtr.) EF : BG = BV.CT : SC.BT, & BG : GH

GH = BT : CT = SC. BT : SC. CT, erit ex æquo EF : GH = BV. CT : SC. CT = BV : SC. Præterea, ut num. I. oſtenſum, eſt etiam BV : BS = *ba* : B*b*, & BS : SC = B*b* : *b*β, ergo iterum ex æquo BV : SC = *ba* : *b*β, at modo habuimus etiam BV : SC = EF : GH, ergo EF : HG = *ba* : *b*β, atque adeò HG. *ba* = EF. *b*β = rectangulo Eφ areæ AXFE inſcripto.

III. Jam quia potentia BG curvæ puncto B applicata (§. 39.) reſultat ex lateralibus BH axi AT perpendiculari, & HG eidem parallela, & ſingula puncta elementi B*b* ab eadem potentia obliqua BG urgentur, potentia, qua totum elementum afficitur, eſt ut rectangulum BG. *ba* cujus altitudo *ba* multitudinem potentiarum obliquarum omnibus elementi B*b* punctis applicatarum exponit, rectangulum BH. *ba*, exponet potentiam axi perpendicularem, & HG. *ba* potentiam eidem axi parallelam, quæ ex obliqua BG. *ba* ad elementum curvæ B*b* pertinente derivantur, & ex quibus hæc (§. 40.) reſultat. Unde, quia (num. I. & II.) oſtenſum BH. *ba* = rec-lo Cδ & HG. *ba* = rec-lo Eφ, omnes potentiæ BG. *ba* reſultabunt ex omnibus Cδ areæ AXDC inſcriptis, & ex omnibus Eφ areæ AXFE inſcriptis, cum ſingulæ BG. *ba* ex ſingulis Cδ & Eφ naſcantur. Atqui ex omnibus potentiis Cδ (§. 54.) reſultat potentia A. MR cum hoc rec-lum (conſtr.) æquale ſit omnibus Cδ, ſeu areæ AXDC, cui inſcripta ſunt, & potentiæ A. MR directio tranſeat per centrum gravitatis areæ AXDC; & ex omnibus potentiis Eφ reſultat potentia A. OM, quoniam (conſtr.) hoc rec-lum A. MO = AXFE ejusque directio OQ tranſit per centrum gravitatis Q ejusdem areæ AXFE. Propterea potentiæ A. MO & A. MR in directionibus ſuis MO, MR in æquilibrio conſiſtent cum omnibus potentiis obliquis BG, BG, &c. curvæ AB in ſingulis punctis applicatis. Sed ex potentiis A. MO & A. MR reſultat (§. 49.) potentia 2. MI. A cujus directio MI tranſit per centrum gravitatis I punctorum O & R, quorum gravitas fingitur eſſe A. Ergo etiam hæc potentia 2. MI. A in æquilibrio erit cum omnibus BG, &c., atque adeo ejus directio MI in contrariam partem P producta MP (§. 37.) erit media directio omnium potentiarum BG, BG &c. & 2. MI. A exponet onus quod hypomochlium Z in media directione MP à potentiis rectis ſuſtinebit. Quod erat demonſtrandum. In figura male confunduntur puncta Z & M, quorum hoc non in curva AB, ſed intra figuram ABC ſitum eſſe debet.

Corollarium I.

60. Si omnes potentiæ BG curvæ AB perpendiculares ſint, evaneſcent anguli TBS, eritque ubique CD = EF = BG. Nam coincidentibus BF & BS, rectæ BV & BT æquales fient ipſi BS, & CT = CS; unde cum (conſtr.) ſit CD : BG = BV : BT fiet omninò CD = BG. Sic etiam quia TE : BG = BV . CT : SC . BT, & hoc caſu BV = BS, CT = CS, & BT = BS, ratio BV . CT ad SC . BT erit ratio æqualitatis, atque adeo EF = BG.

Corollarium II.

61. Et ſi præterea omnes BG inter ſe æquales fuerint, figuræ mixtilineæ AXCD & AXFE mutabuntur in parallelogramma rectangula CAX & EAX.

Corollarium III.

Fig. 16. 62. Unde ſi ſingulis curvæ AOM punctis potentiæ perpendiculares curvæ, & omnes inter ſe æquales BG applicatæ ſint; vis totalis qua curva AOM urgebitur, eadem erit ac vis totalis, qua urgeretur curvæ baſis AM, ſi etiam ſingulis ejus punctis potentiæ æquales ipſis BG, & baſi AM etiam perpendiculares applicatæ, eſſent, atque adeo exponetur rectangulo MAXZ. Nam deſcriptis circa curvam rectangulo ME, EA, cujus latus EE baſi æqualis tangat curvam in O, & ad latera ME, AE rectangulis MXFE, AXFE, conſideretur baſis MA inſtar axis curvæ AOM, & quoniam ſecundùm hypotheſin omnes potentiæ BG curvæ normales ſunt atque inter ſe æquales, erunt (§. 61.) ef = CD = BG & hisce æquales exiſtent homologæ lineæ reſpectu cujusvis alius curvæ puncti B; adeoque omnes potentiæ curvæ parti ABO normales, æquipollebunt duabus potentiis, quarum una axi perpendicularis exponitur rec-lo AXQP, alteraque axi parallela exponitur rectangulo AXFE. Sic etiam omnes curvæ OBM potentiæ æquipollent duabus, quarum una axi perpendicularis alteraque eidem parallela, & quarum hæc rec-lo MXFE, illa verò rec-lo PQZM exponitur. Atqui ob æqualia rec-la MEFX & AEFX, potentiæ axi AM parallelæ & directe oppoſitæ pertinentes ad curvæ partes ABO, MBO, utpote inter ſe æquales, ſe mutuo elidunt, ſolæque potentiæ axi perpen-

pendiculares conſiderandæ veniunt; illæ ſcilicet, quæ exprimuntur rec-lis XAPQ, & ZMPQ; ergo vis, qua tota curva AOM ab omnibus ipſi applicatis potentiis BG urgetur, exponitur rectangulo AXZM. Sed eandem vim baſis AM quoque ſubibit, ſicubi in ſingulis ſuis punctis ejusmodi æqualibus potentiis perpendiculariter premitur vel trahitur. Potentia enim, qua tota baſis afficitur, eſt, ut hæc baſis ducta in potentiam, qua ſingula ejus puncta urgentur, id eſt ut rectangulum AMXZ.

Corollarium IV.

63. Pariter, ſi loco curvæ AOM intelligatur ſuperficies cylindri recti, cujus altitudo ſit Mm; ac ſuperficiei iſti in ſingulis punctis potentiæ perpendiculares & æquales BG applicatæ cogitentur; tunc potentia, qua cylindrica ſuperficies ab omnibus ipſi applicatis potentiis urgetur, ſive id fiat preſſione ejus contra planum *m*M, A*a*, ſive tractione ab eodem plano, exponetur per parallelepipedum baſeos AZ altitudinisque M*m*; adeoque æquatur potentiæ, qua afficeretur planum *m*MA*a*, ſi pariter ſingula ejus puncta æqualium potentiarum impreſſiones ſubirent. Nam in ſuperficie cylindrica tot curvæ intelligi poſſunt ipſi AOM parallelæ ſimiles & æquales, quot puncta ſunt in altitudine cylindri vel priſmatis *Mm*, quarum quælibet urgetur à potentia exprimenda rec-lo æquali AZ. Adeoque vis, qua omnes curvæ, id eſt cylindrica ſuperficies, urgentur, exponetur per omnia rec-la ipſi AZ æqualia, quæ in parallelepipedo continentur, id eſt per parallelepipedum ipſum, ſub baſi AZ & altitudine M*m*. Et tanta potentia etiam urgetur rec-lum M*ma*A à potentiis æqualibus, ſingulis ejus punctis applicatis.

DEFINITIONES.

IV.

64. *Solidum patiens* dicitur omne ſolidum ABCD, cujus ſingula ſuperficiei curvæ CBAD puncta à potentiis quibuslibet ſuperficiei perpendicularibus, BM, *bu* &c. urgentur, ſed ita tamen, ut ſingula puncta curvæ *cbd*, ſectionis ſolidi baſi parallelæ, eadem potentia *bu* vel huic æqualibus afficiatur. Potentiarum verò *actio* in ſolidum patiens generali nomine *Preſſionis* deinceps inſignietur. Fig. 19. 20.

V.

65. *Preſſio interna* eſt, cum potentiæ BM, *bu*, &c. cavæ ſuperficiei punctis B, *b* &c. applicatæ, eam extrorſum juxta BM, *bu* premunt.

VI.

66. *Preſſio externa* verò, cum convexæ ſuperficiei puncta B, *b* &c. à potentiis ipſis applicatis introrſum premuntur, juxta MB, *ub* &c.

Ex ordine igitur literarum, quibus lineæ potentiarum applicatarum repræſentatrices ſignantur, ſtatim dignoſci poterit utrum applicatæ potentiæ introrſum, an verò extrorſum premant. Nam ſi litera vel ſignum, quo punctum ſuperficiei ſignatur, cui potentia applicata eſt, primum locum tenet, preſſio eſt interna, externa verò, ſi ſecundum locum. Sic BM, *bu* &c. denotant preſſiones internas, quia puncta applicationis B, *b* &c. primum locum tenent, & MB, *ub*, &c. ſignificant preſſiones externas.

VII.

67. Per *Baſin ſolidi patientis* intelligo quodvis ejus planum vel ſectionem planam CBD horizonti æquidiſtantem.

VIII.

68. *Sectio* verò *recta ſolidi patientis* nobis eſt figura plana CAD ſolidi noſtri, baſi ejus recta, cujus ſectionis rectæ *vertex* eſt punctum curvæ CAD à ſua baſi CD maxime diſtans, & linea AE ex vertice A ad CD perpendiculariter ducta dicetur *axis ſectionis rectæ*, & forte etiam ipſius ſolidi patientis.

IX.

69. *Scala potentiarum* ſolido patienti applicatarum, eſt figura mixtilinea KL*r*QP in plano ſectioni rectæ ſolidi patientis recto, atque per axem ſectionis rectæ AE, tranſeunti, cujus figuræ ordinata quælibet 3*er* ejus axi KP, qui ipſi AE æquidiſtans ponitur, perpendicularis, exponit potentiam, qua unumquodque punctum curvæ *cbd* ſectionis *cbdc* baſi CBDC parallelæ, afficitur. *Origo* ſeu *vertex* hujus curvæ O eſt punctum occurſus curvæ Q*r*L cum ſuo axe KP.

X.

X.

70. *Planum ſublime* eſt GFI, quod baſi patientis ſolidi æquidiſtans, per originem O ſcalæ potentiarum tranſit.

XI.

71. *Planum humile* eſt, quod ſublimi parallelum, per maximam ordinatam PQ, ſcalæ potentiarum tranſit.

XII.

72. *Priſma redundans* eſt ſolidum GFBADIG, quod componitur ex ſolido patiente CBAD vertice ejus deorſum reſpiciente, & ex priſmate recto GFBDI ſuper baſi CBD & terminato ad planum ſublime GFI. Fig. 19.

XIII.

73. *Priſma deficiens* eſt ſolidum GFBADIG, quod remanet detracto ſcilicet ſolido patiente CBAD, vertice ejus A nunc ſurſum converſo ex priſmate recto GFBDI ſuper baſi CBDC, & terminato itidem ad planum ſublime GFI. Fig. 20.

XIV.

74. *Solidum patienti analogum* juxta ſcalam potentiarum eſt ſolidum 2C2B2A2D, cujus quælibet ſectio *2c2b2d* homologæ ſectioni *cbd* in ſolido patienti ſimilis, æqualis & parallela intervallo 2H2e æquali reſpectivæ ordinatæ 3*er* ſcalæ potentiarum à plano humili 2G2F2I diſtat, dum homologa ſolidi ipſius patientis ſectio cbd, intervallo He æquali abſciſſæ O3e ad ordinatam 3*er* pertinenti, diſtat. Fig. 19, 20.

XV.

75. *Solidum priſmati redundanti analogum* eſt ſolidum 2G2F2B 2A2D2I, quod componitur ex ſolido patienti analogo 2C2B2A2D & ex Priſmate recto 2G2F2B2D2I, ſuper baſi 2C2B2D atque terminato ad planum humile 2G2F2I. Fig. 19.

XVI.

76. *Solidum priſmati deficienti analogum* eſt ſolidum 2G2F2B2A 2D2I, quod relinquitur ablato ſolido 2C2B2A2D patienti analogo ex priſmate recto 2G2F2B2D2I ad planum humile 2G2F2I etiam terminato. Fig. 20.

XVII.

Fig.19,20. 77. *Pſeudo-cuneus* ſectionis rectæ ſolidi patientis eſt ſolidum, cujus ſectiones, plano humili vel ſublimi parallelæ, ſunt rectangula, quorum baſes ſunt ordinatæ figuræ cujusdam ſimilis & æqualis ſectioni rectæ ſolidi patientis; altitudines verò ordinatis modo nominatis reſpondentes ordinatæ Scalæ Potentiarum.

Circa axem KP ſit figura 3C3A3D ſimilis & æqualis ſectioni rectæ CAD ſolidi patientis, cujus ordinata quælibet 3c3d proinde æquabitur ordinatæ cd tranſienti per punctum e, quod reſpondet puncto 3e, per quod ordinata 3c3d ducta eſt, quæ ordinata in ſcala potentiarum reſpondentem habet 3*er*. Pſeudo-cuneus ſectionis rectæ CAD eſt ſolidum, cujus ſingulæ ſectiones plano GFI parallelæ ſunt parallelogramma rectangula, quorum baſes ſunt ordinatæ 3c3d & altitudines ordinatæ 3*er* ſcalæ potentiarum, in eodem plano ſecante poſitarum, id eſt rectangula 3c3d. 3*er*. &c.

Hi Pſeudo-cunei hac etiam ratione generari intelligentur: ſuper figuris 3C3A3D & PLQ, tanquam baſibus, erecta intelligantur priſmata recta, quæ, ob baſes ſuas ad angulos rectos ſibi invicem occurrentes, ſe mutuo perforabunt. Solidum illud, quod à priſmatis ad angulos rectos transverſim ſe invicem perforantibus intercipitur, eſt Pſeudo-cuneus, de quo agitur.

Si ſcala potentiarum eſt triangulum vel trapezium, tunc ex Pſeudo-cuneo fit verus Cuneus.

XVIII.

78. *Projectio* cujusque figuræ in plano quodam, quod ideo etiam *projectionis planum* audit, eſt figura, quæ in plano projectionis formatur, demittendo ex ſingulis figuræ projectæ punctis perpendiculares ad planum projectionis. Sic curvæ *kim* projectio in plano projectionis 2G2F2I eſt curva 1*p*1*n*1*q*, quæ à perpendiculis ex ſingulis punctis curvæ *kim* ad planum 2G2F2I demiſſis, formatur.

PROPOSITIO IX. Theorema.

Fig.17,18. 79. *Si in ſingulis punctis conicæ ſuperficiei* kcbimd *duobus planis* cbd *&* kim, *ad diſtantiam indefinite parvam* el *vel* ni *aut* pk *à ſe invicem diſtantibus, interjectæ, atque lineolis* ck *&* dm *terminatæ, potentia* fg *ad angulos rectos applicata fuerit, preſſio, quam univerſa ſuperficies*

ficies conica ſubibit, æquipollebit preſſionibus, quas armilla pbq *duabus curvis* cbd *&* pnq (*quæ alterius* kim *projectio eſt in plano* cbd) *intercepta, & lineolis* cp, dq *terminata; & cylindrica ſuperficies* knm *ad baſin* kigm *& ad altitudinem* el *vel* ni *erectam terminatamque lineolis* pk *&* qm, *paterentur ab eadem potentia* gf, *in ſingulis armillæ & cylindricæ ſuperficiei punctis perpendiculariter applicata.*

Sumatur in curva exteriore *cbd* quilibet arcus infiniteſimus *sx* & per puncta *s*, *x* curvæ perpendiculares ductæ *st*, *xy* intelligantur curvæ interiori *pnq* occurrentes in punctis *t*, *y*. Porrò ſolidum *cbmd* ſectum cogitetur duobus planis per lineolas *st*, *xy* ductis & plano *cbd* rectis, eruntque ſolidi *cbmd*, & planorum ſecantium communes ſectiones triangula rectangula *stg*, *xyh* ac ſolidum hisce triangulis interjectum *txg* priſma erit. Quibus intellectis, preſſiones, quas ſubibunt facies *tghy* & *styx* (quæ conſiderandæ ſunt, tanquam continuam ſuperficiem in *ty* incurvatam *stghyxs* baſin *sghx* habentem) componentes
æquipollent (§. 63.) preſſioni, quâ ab eadem potentia *gf* afficietur baſis *sghx*. Et cum hoc accidat, reſpectu cujuslibet alius *sghx* in ſuperficie conica *kbm*; & homologarum areolarum *styx* in armilla, & *tghy* in ſuperficie cylindrica; perſpicuum eſt, preſſiones quas omnes areolæ *sghx* in ſuperficie conica ſubeunt, æquipollere preſſionibus, quas ſuſtinent omnes areolæ *tsxy*, quæ ſunt in armilla, & quas ſuſtinent omnes *tghy*, quæ in cylindrica ſuperficie *knm* continentur. Ac propterea preſſio, quam ſubit zona conica *kbm* ab omnibus ipſi perpendiculariter applicatis potentiis æqualibus *gf*, æquipollet preſſionibus, quas ab omnibus perpendiculariter applicatis potentiis ipſis *gf* æqualibus patientur armilla *pbq* & ſuperficies cylindrica *knm*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X. Theorema.

80. *Si ſingulis punctis ſuperficiei convexæ aut cavæ* CBAD, *qua ſolidum patiens* CBADC *ex parte terminatur, potentiæ inæquales quidem & ſuperficiei perpendiculares* MB, ub &c. *vel* BM, bu &c. *applicatæ ſint, ſed quarum eæ ſaltem omnes, quæ ſingulis punctis cujusque ſectionis* bcd *baſi* CBD *parallelæ applicantur, æquales ſint, & exponantur per homologam ordinatam* 3er *ſcalæ potentiarum; Preſſio, quam ſuperficies curva ſolidi patientis ab omnibus potentiis patietur, æquivalebit preſſioni, qua urgeretur baſis ſolidi patientis* CBD *juxta directionem baſi perpendicularem* αβ *per centrum gravitatis* δ *ſolidi* Fig. 19, 20.

2G2F2B2A2D2I *quod priſmati redundanti (deficienti)* GFBADI *analogum eſt, ductam, quam preſſionem idem hoc ſolidum analogum exponat; & ſimul etiam preſſioni, quam exponit pſeudocuneus ſectionis rectæ in ſolido patienti, ſeu ſolidum* 3C3ALQ3D *exſerendæ in ſectionem ſolidi patientis rectam* CAD *juxta directionem* er *huic ſectioni perpendicularem, & per centrum gravitatis ω pſeudocunei ductam.*

Hoc eſt, ſi β deſignet ſolidum illud priſmati redundanti (deficienti) analogum, & ω pſeudocuneum memoratum in propoſitione; Potentiæ β & ω in directionibus αβ, eω, vel in directionibus βα & ωe patienti ſolido applicatæ, in æquilibrio conſiſtent cum omnibus potentiis BM, *bu* &c. cavæ ſuperficiei CBAD, vel cum omnibus MB, *ub* convexæ applicatis.

Solidum patiens ſectum intelligatur duobus planis *cbd*, *kim* baſi CBD æquidiſtantibus & indefinite vicinis. Portio ſuperficiei curvæ ſolidi patientis duobus planis ſecantibus intercepta, quam deinceps per *kbm* deſignabimus, eſt inſtar ſuperficiei conicæ duabus curvis *cbd*, & *kim* atque lineolis *ck*, *dm* terminatæ. Curvæ *cbd* projectio in plano humili 2G2F2I ſit 1*c*1*b*1*d*, & curvæ *kim* projectio in eodem plano humili 1*p*1*n*1*q*, in plano vero *cbd*, curva *pnq*.

Jam preſſio quam ſuperficies conica *kbm* ſubibit à potentia *bu* (ſecundum hypotheſin) = 3*er*, in ſingulis ejus punctis perpendiculariter applicata (§. 79.) æquipollet preſſionibus, quas paterentur armilla *pbq* (qualis in præcedenti propoſitione conſiderata) & Cylindrica ſuperficies *knm*, ſi etiam ſingula armillæ & cylindricæ ſuperficiei puncta eadem potentia *bu* = 3*er* perpendiculariter afficerentur; atqui potentia qua armilla *pbq* afficietur erit, ut hæc armilla ducta in potentiam *bu* vel 3*er*, qua ſingula ejus puncta urgentur, id eſt, exponi debet per ſolidum *pbq*. 3*er*, vel quia armilla *pbq* = ſuæ projectioni 1*p*1*b*1*q*, ac 3*er* (§. 74.) = 2H2*e* = 1*b*2*b*, per ſolidum 1*p*1*b*1*q* in 1*b*2*b*, id eſt per ſemitubum 1*p*1*b*2*b*1*q*1*d*, ſolido 2G2B2A2I inſcriptum. Preſſio verò quam ſuperficies cylindrica *knm* ab applicatis potentiis pateretur, æqualis (§. 63.) preſſioni, quam ſubiret rectangulum *kpqm*, quod cylindricam ſuperficiem ſubtendit, exponetur ſolido ſeu parallelepipedo *km*. *el*. 3*er*, vel parallelepipedo 3*k*3*m*. 3*eβl*. 3*er*, quod alteri æquale eſt atque pſeudocuneo inſcriptum. Unde, quia preſſio, quam quælibet alia zonula conica *kbm* ſolidi patientis ab applicatis potentiis patietur, ſimiliter æquipollet preſſionibus, quibus homologa armilla *pbq*, & homologa ſuperficies cylindrica *knm* ab eadem potentia ſingulis zonulæ conicæ punctis perpendiculariter

lariter applicata, urgentur: ultrò ſequitur fore, ut preſſiones, quas ſubibunt omnes zonulæ conicæ, quæ in univerſa ſuperficie curva ſolidi patientis continentur, id eſt preſſio, quam ipſa hæc ſolidi patientis ſuperficies curva patietur, æquipolleant preſſionibus, quas omnes armillæ, & omnes cylindricæ ſuperficies zonulis conicis homologæ ab applicatis potentiis patientur; atqui cum paulo ante oſtenſum ſit, preſſionem à qualibet armilla *pbq* exceptam exponi homologo ſemitubo cylindrico *1p1b2b1q* cujus baſis *1p1b1q* duabus curvis *1p1n1q* lineoliſque *1c1p* & *1q1d* intercepta æqualis eſt ipſi armillæ *pbq*, cujus projectio eſt, altitudo verò *1b2b* (§. 74.) æquatur ordinatæ *3er* ſcalæ potentiarum, preſſionemque cujuſque ſuperficiei cylindricæ *knm* exponi parallelepipedo *3k3m. 3el. 3e3l* Pſeudocuneo inſcripto; preſſio omnium armillarum exponetur per omnes ſemitubos cylindricos *1p1b2b1q*, qui in ſolido 2G2F2A2D2I priſmati redundanti (deficienti) analogo continentur, id eſt per ipſum hoc ſolidum analogum, & potentia, quæ ex omnibus illis quæ ſuperficies cylindricas *knm* in ſolido patienti urgent, naſcitur, exponetur per omnia parallelepipeda Pſeudocuneo inſcripta; ſeu quia ejuſmodi parallelepipeda collective ſumta figuræ, cui inſcripta ſunt, & in quam ultimo evaneſcunt, (perinde ac omnes ſemitubi ſolido analogo inſcripti, in hoc ſolidum priſmati redundanti vel deficienti analogum) æquantur, per ipſum Pſeudocuneum. Ergo omnes potentiæ ſingulis punctis univerſæ ſuperficiei curvæ CBAD applicatæ BM, *bu* &c. vel MB, *ub* &c. æquipollent duabus potentiis, quarum una, per ſolidum 2G2F2B2A2D2I exponenda, agat juxta directionem *αδ* (§. 54.) baſi CBD ſolidi patientis perpendicularem & transeuntem per centrum gravitatis *δ* ſolidi modo nominati, quod brevitatis gratiâ unica litera *δ*, qua ejus centrum gravitatis ſignatur, deinceps indicabimus, vel, quod idem eſt, omnium potentiarum conſpirantium planoque CBD perpendicularium, quæ per ſemitubos *1p1b1q* ſolido illi *δ* inſcriptos exponuntur; altera verò per Pſeudocuneum Q3C3A3D (unica itidem litera *ω* qua centrum ejus gravitatis ſignatur poſthac indicandum) juxta directionem *re* vel *bγ* per centrum gravitatis *ω* Pſeudocunei ductam, ſectionique rectæ CAD ſolidi patientis perpendicularem, quandoquidem parallelepipeda Pſeudocuneo *ω* inſcripta repræſentant potentias conſpirantes planoque CAD perpendiculariter applicatas, quarum media directio (§. 54.) per centrum earum gravitatis *ω* tranſibit. Propterea potentia *δ* in directione *αδ* plano CBD perpendiculariter applicata, & po-

E tentia

tentia ω plano CAD normaliter applicata in directione εγ, ſimul agentes eundem effectum præſtabunt ac potentiæ BM, *bu* &c. atque adeò eædem potentiæ δ & ω contrario ſenſu agentes, ſecundum directiones αβ & εω, quæ omninò contrariæ ſunt directionibus αδ & *b* , conſiſtent in æquilibrio cum potentiis BM, *bu* &c. ſingulis punctis B, *b* univerſæ ſuperficiei curvæ CBAD applicatis. Sed potentiæ eædem δ & ω agentes juxta directiones αδ & εγ etiam in æquilibrio manebunt cum omnibus potentiis MB, *ub* &c. Quæ erant demonſtranda.

Corollarium I.

Fig. 21. 22. 81. Si nunc loco ſolidi BAE ſuperficie curva BbA duobusque planis AE & BE invicem rectis terminati, intelligatur ſolidum BAS ſuperficie curva BbAsS unicoque plano BS terminatum, quod totius ſolidi (§. 67.) baſis ſit, & planum EA (§. 68.) ejus ſectio recta, ſitque pro altera ſolidi parte EA*s*S eadem ſcala potentiarum, quæ partis ſolidi patientis EAbB, ita ut potentiæ *bu*, *su* ſingulis punctis ſectionis *bs* parallelæ BS applicatæ inter ſe æquales ſint & ordinatæ 3*er* hujus ſcalæ potentiarum; ſignentur, ut in propoſitione, in ſolido analogo omnes lineæ iisdem litteris, quibus homologæ lineæ in ſolido patienti, ſed præpoſito binario tanquam nota diacritica, eruntque adeò ſolida 2F2B2*b*2A2H, & 2R2S2*s*2A2H analoga priſmatis redundantibus (deficientibus) FB*b*AH, RS*s*AH. Analoga illa ſolida notentur literis δ & κ, quibus eorum centra gravitatis ſignantur, &, ut in præcedenti articulo, ω deſignet & pſeudocuneum ſectionis rectæ AE in ſolido patiente BAS, ejusdemque pſeudocunei centrum gravitatis: quibus poſitis omnes potentiæ SM, *su* ſolido EAS applicatæ non aliam vim in ſolidum exſerent, quam potentia κ trahens curvam AS ſecundum directionem ξκ ſectioni rectæ AE parallelam & per centrum gravitatis κ transeuntem, una cum potentia ω trahente ſolidum juxta εω baſi BS parallelam, adeoque omnes potentiæ BM, *su*, *bu*, SM &c. toti ſolido BAS applicatæ æquivalent potentiis δ, & κ ſolido in directionibus αδ & ξκ applicatis, cum ejus vertex A deorſum reſpicit ut fig. 21, vel in directionibus αβ & ξθ cum ſolidi vertex ſurſum converſus eſt ut fig. 22; ac inſuper potentiæ ω ſolidi alis A*b*B, A*s*S hinc inde applicatæ in directionibus *b*γ *s*ω utroque caſu. Sed ſi potentiæ ſolido patienti applicatæ ſunt exterius prementes, eæ ſpectandæ ſunt tanquam agentes juxta MB, *ub*, MS, *us* &c. eoque caſu hæ potentiæ æquipollebunt

iisdem

iiſdem ac prius δ, $\varkappa$, ω ſed in directionibus, $\delta\alpha$, $\varkappa\xi$, γb, & ωs prementibus ſolidum BAS in caſu figuræ 21, & juxta directiones $\beta\alpha$, $\theta\xi$ in figura 22.

Corollarium II.

82. Adeoque, ſi ſolidi BAS partes B*b*A & S*s*A circa verticem A converti atque inſtar alarum alicujus follis ab invicem diduci atque iterum ad ſe mutuo conſtringi queant, erit $\gamma.\ Ae + \delta.\ \alpha E$ momentum totale potentiarum γ vel ω, & δ, quæ æquipollent potentiis curvæ ſuperficiei A*b*B in ſingulis perpendiculariter applicatis BM, *bu*, &c. vel MB, *ub* &c. Et $\omega.\ Ae + \varkappa.\ \xi E$ momentum totale potentiarum ω & $\varkappa$ ſolidi parti A*s*S applicatarum & æquipollentium potentiis SM, *su* &c. vel MS, *us* &c. ſingulis punctis ſuperficiei curvæ A*s*S applicatis.

Corollarium III.

83. Si nunc ſolidum patiens *a*BAS unica ſuperficie curva terminatum ſit, cujus ſingula puncta à potentiis ipſi perpendicularibus urgentur & quæ potentiæ determinentur ſcala potentiarum KLQP, ita ut ſupremum punctum *a* urgeatur à potentia $ba = $ KL, infimum A à potentia $2A2H = PQ$, ſingulaque puncta circumferentiæ ſectionis BS à potentia $MB = MS = 3er$ & ſic de cæteris reſpective: tale ſolidum *a*BAS in altum urgebitur juxta directionem planis FO, vel 2FQ perpendicularem, vi quam exponit ſolidum 2*a*2B 2A2S, quod (§. 74.) patienti analogum eſt. Nam ſicut ſupra (§. 81.) vis ſeu potentia æquipollens ſingulis potentiis toti ſuperficiei curvæ BAS (figuris 21. & 22.) perpendiculariter applicatis, conſtat potentiis contrariis atque æqualibus γ & ω perpetuo in eadem directione $\gamma\omega$ baſi BS parallela in contrarias partes agentibus, & potentiis δ & $\varkappa$ conſpirantibus atque juxta directiones $\delta\alpha$, $\varkappa\xi$ baſi normales agentibus; quarum potentiæ γ & ω toties ſe mutuo deſtruunt, quoties totum corpus BAS firmum eſt, nec ejus partes BAE, SAE ab invicem deduci poſſunt, adeo ut ſolæ potentiæ $\varkappa$ & δ conſpirantes ſuperſint conſiderandæ, reliquis γ & ω, quaſi non eſſent, ſepoſitis; jam hæ potentiæ, quæ potentias efficaces ſignificant, δ & $\varkappa$ ſimul ſumtæ ſignificant totum ſolidum 2F2B2A2S2R quod priſmati redundanti (fig. 21.) vel deficienti (fig. 22.) FBASR analogum eſt. Ita etiam in ſolido noſtro *a*BAS potentiæ directe contrariæ per pſeudocu- Fig. 25.

 neum

neum ω expoſitæ ſe mutuo elidunt, ipſæ verò, quæ juxta directiones planis BS vel FR perpendiculares agunt, hoc loco conſiderandæ veniunt; nam pars ſuperior BaS ſolidi noſtri deorſum urgebitur vi ſeu potentia 2F2B2a2S2R, & inferior BAS potentia, quam exponit ſolidum 2F2B2A2S2R, quod priſmati redundanti FBASR analogum eſt, in altum urgetur juxta directionem plano BS rectam. Adeoque (§. 38.) detracta potentia minore, quæ exponitur ſolido 2F2B2a2S2R analogo priſmati deficienti FBaSR, ex potentia majore, quam ſolidum redundanti priſmati FBASR analogum exponit, quandoquidem minor potentia corpus patiens perpendiculariter deorſum, major verò verticaliter in altum urget; & remanebit vis corpus in altum cogens exponenda ſolido 2a2B2A2S, quod patienti ſolido aBAS analogum eſt.

CAPUT III.

De Figuris, quas Corpora flexibilia induere debent à potentiis ipſis quomodocunque applicatis; & de Mediis directionibus harum potentiarum.

EGimus hactenus de potentiis corporibus inflexibilibus applicatis, earum medias directiones aſſignavimus; in hoc verò capite potentias corporibus cedentibus ſeu flexibilibus appendemus, quæ circumſtantia flexibilitatis duo indaganda jubet. Primum quamnam corpus flexile figuram debeat acquirere ab applicatis potentiis, vel potius, quamnam retinere debeat formam, ubi potentiæ ad æquilibrium ſeſe compoſuerunt. Secundum reſpicit mediam directionem ejusmodi potentiarum in æquilibrio conſiſtentium, & vim impulſus ſecundum hanc mediam directionem.

DEFINITIONES.

I.

84. Corporis perfectè flexilis ZAX terminis ſuis Z, X alicubi affixi *Figura* ZBABX *manens* dicitur, quam corpus retinet, poſteaquam omnes potentiæ BH, βH &c. curvæ, punctis per totam ejus longitudinem quomodocunque applicatæ, ad æquilibrium ſe compoſuerunt.

II.

II.

85. *Tenacitas* vel *Firmitas* fili aut corporis in quolibet ejus puncto ſeu elemento curvæ, eſt vis illa fili aut corporis, qua potentiæ illi aut vi ex omnibus applicatis potentiis naſcenti, atque filum in contrarias partes trahendo id dilacerare conanti, reſiſtit; atque adeo æquipollet, vel æquatur, ipſi vi dilaceranti, ex omnibus corpori applicatis potentiis reſultanti.

III.

86. *Potentiæ laterales* ex fili aut corporis tenacitate in quolibet ejus elemento, *derivatæ*, ſunt duæ potentiæ ſecundum directiones ſibi invicem ad angulum rectum occurrentes, ex quibus conjunctim agentibus reſultaret vis aut potentia æqualis corporis tenacitati in dicto ejus elemento, aut etiam vi ejus dilaceranti.

Sic cum filum, vel potius fili elementum B*b*, vi quadam ex omnibus applicatis BH, βH &c. reſultante tenditur, idque ſua tenacitate æquali vi tendenti impedit ne extendatur aut prorſus rumpatur, hæc tenacitas, aut vis illa tendens tenacitati æqualis, intelligi poteſt, tanquam potentia reſultans ex potentiis lateralibus, ſecundum BM & B*l* ſimul agentibus. Et vis qua tenditur elementum Bβ, cui tenſioni id ſua tenacitate reſiſtit, ſpectari poteſt tanquam naſcens ex duabus lateralibus potentiis juxta directiones BN & B*k*. Ejusmodi potentias laterales juxta BM vel B*l*, & juxta BN aut B*k* deinceps deſignabimus per *p*BM, *p*Bl, *p*BN & *p*Bk. Tenacitates vero duorum elementorum contiguorum B*b* & Bβ indicabimus per T & *t*. Fig. 29.

Cæterum in hisce ſupponimus filum quidem flexile eſſe in omnibus ſuis partibus, non vero extenſibile.

Propositio XI. Lemma.

87. *Si fuerint quotcunque decreſcentes magnitudines* A, B, C, D, E, *erunt omnium differentiæ ſimul ſumtæ æquales exceſſui maximæ ſupra minimam.* Nam ultro liquet, eſſe A — B, + B — C, + C — D, + D — E = A — E, unde ſi E = o, erit ſumma differentiarum maximæ A æqualis.

Scholion.

88. Quanquam hoc lemma ſimplicitate ſua nullius uſus prima fronte videatur, in eo tamen omnes quadraturarum methodi fundantur, quod prolixius quidem oſtendi poſſet tam in antiquorum methodis quam recentiorum; ſed brevitatis gratia id tantum in uſu Calculi integralis uno alteroque exemplo illuſtrabitur. Calculus integralis vel ſummatorius eſt inverſus calculi differentialis, & conſiſtit in eo, ut inveniatur quantitas A ex indeterminata quadam & conſtantibus compoſita, ejus indolis, ut, ſi loco indeterminatæ in ea ſubſtituantur ſucceſſive eadem indeterminata, ſed elemento ſuo ſimplici, ejusve 2plo, 3plo, 4plo, 5plo &c. mulctata inde exſurgant quantitates B, C, D, E &c. quarum differentiæ A—B, B—C, C—D, D—E, &c. ſint ejusdem formæ cum elemento ſeu quantitate infiniteſima ſummanda, ita ut prima differentia A—B, exhibeat ipſam quantitatem differentialem, cujus ſumma ſeu integrale quæritur. Ut ſi curva quædam ſit quadranda, cujus axis dicatur x, & ordinatæ ad hunc axem y, ita ut areæ elementum futurum ſit ydx. Area ipſa invenietur, ſi haberi poſſit, quædam quantitas A ex indeterminata x & quantitatibus datis ſeu conſtantibus compoſita, itaque comparata, ut, ſi in ea ſubſtituantur loco indeterminatæ x, aliæ $x-dx$, $x-2dx$, $x-3dx$, $x-4dx$ & ſic deinceps in infinitum, inde proveniant magnitudines B, C, D, E, &c. quarum prima differentia A—B det ydx, ſecunda B—C det ſecundum elementum areæ ydx in quo ordinata y jam reſpondeat non axi x ſed axi $x-dx$, ſuo ſcilicet elemento dx imminuto, atque ſic de reliquis reſpective. Hac enim ratione perſpicuum eſt, omnes A—B, B—C, C—D &c. exhibere aggregatum omnium ydx, quæ in area continentur, ſeu hanc aream ipſam; jam ſi in ſerie quantitatum decreſcentium A, B, C, D, E &c. minima dicatur M, area quæſita, juxta Lemma (§. 87.) perpetuo erit A—M, & ſi contingat, ut aliquando M ſit O, tunc area æquatur ipſi A. Minima vero quantitas M ſemper habebitur ex Maxima A, ſi ſcilicet loco indeterminatæ x ſubſtituatur in ea $x-ndx$, ubi n eſt numerus elementorum, in quæ axis diviſus eſt, adeo ut ndx ſit $=x$, vel quod eodem recidit, ſi loco x ibi ſubſtituatur o, quandoquidem $x-ndx$ eſt o; quantitasque ex hac ſubſtitutione reſultans erit minima M. Unde ſi contigat ut, facta ſubſtitutione ipſius o loco indeterminatæ x in quantitate A, hæc evaneſcat, tunc M erit $=$ o, atque adeo area quæ-

quæſita, ſeu ſumma omnium ydx, erit A compoſita ex indeterminata x varie affecta & cum conſtantibus implicata. Pro inveniendo vero valore ipſius A, ex dato elemento ydx, loco ipſius y ſubſtitui debet ejus valor in x & conſtantibus, quem æquatio curvæ quadrandæ præbet. Quod de quadratura ſpatiorum ſeu arearum dictum eſt, id etiam de dimenſione ſolidorum imò, de omnibus ſummationibus, pariter eſt intelligendum.

89. In hiſce ſuppoſuimus literas A, B, C, D, E &c. uſque ad M denotare ſeriem magnitudinum decreſcentium, ſed infiniti etiam ſunt caſus, in quibus eædem literæ iisdem ac præcedenti articulo factis ſubſtitutionibus indeterminatarum $x - dx$, $x - 2dx$ &c. loco ipſius x in magnitudine A, proveniant B, C, D &c. majores quam A, adeo ut tota earum ſeries repræſentet progreſſionem earundem creſcentem ita ut differentiæ futuræ ſint B − A, C − B, D − C, E − D, &c. quo caſu M, quæ antea minimam ſeriei magnitudinem denotabat, nunc ſit maxima, & quæ antea erat maxima A nunc ſit minima, neceſſe eſt. Utriusque caſus exemplum eſt adducendum.

90. *Exempl.* 1. Sit ſummanda quantitas $mdm : \surd(aa + mm)$, in qua m eſt variabilis & a data ſeu conſtans. Eritque hoc caſu $A = \surd(aa + mm)$, adeoque $B = \surd(aa + mm - 2mdm + dm^2)$ $= \surd(aa+mm), - mdm : \surd(aa+mm) +$ &c. Hinc $A - B = \surd(aa+mm)$ $- \surd(aa + mm), + mdm : \surd(aa + mm) = mdm : \surd(aa + mm)$, unde ſeries magnitudinum A, B, C, usque ad M eſt deſcendens: & ſi loco ipſius m in quantitate A (§. 89.) ponatur o, fiet eo caſu $A = a = M$; cum igitur ſumma omnium A − B, B − C &c. vel omnium $mdm : \surd(aa+mm)$ ſit (87.) A − M, erit $\int mdm : \surd(aa + mm) = \surd(aa + mm), - a$.

91. *Exempl.* 2. Sin detur elementum ſummandum $aamdm : \overline{aa+mm}\,\sqrt{aa+mm}$, tunc erit $A = aa : \sqrt{aa+mm}$, atque adeo $B = aa : \sqrt{aa+mm-2mdm\ dm^2}$ hoc eſt extrahendo revera radicem ex denominatore $= aa : (\sqrt{aa+mm} - mdm : \sqrt{aa+mm})$ quæ fractio ob denominatorem minorem, quam in fractione A, hac ipſa fractione minor eſt, atque adeo hoc caſu erit $B - A = aamdm : \overline{aa+mm}\,\sqrt{aa+mm}$. Hinc progreſſio quantitatum A, B, C, D &c. eſt aſcendens ſeu creſcens; atque adeo ſumma omnium (87.) B − A, C − B, &c. eſt M − A, verum hoc caſu M iterum eſt a, quoniam facta $m = 0$ in æquatione $A = \surd\,a$ fiet $\surd(aa + mm) = a$, atque adeò $M - A = a, - aa : \sqrt{aa+mm}$. ∧ $aa : \sqrt{aa+mm}$

92.

92. *Exempl.* 3. Pari ratione infinitæ hyperbolæ intra aſymptotas poſſunt quadrari. Sit earum æquatio generalis $x^{\alpha}y = 1$, in qua x abſciſſas à centro in alterutra aſymptotarum, & y ordinatas ſignificant; elementum areæ abſciſſæ adjacentis erit $ydx = x^{-\alpha}dx$. Invenietur verò $A = 1 : (\overline{\alpha - 1}) . x^{\alpha - 1}$, & $B = 1 : \overline{\alpha - 1} . (\overline{x - dx})^{\alpha - 1} = 1 : (\alpha - 1) . x^{\alpha - 1} - (\overline{\alpha\alpha + 2\alpha - 1}) . x^{\alpha - 2} dx +$ &c. hinc B major eſt quam A ob denominatorem minorem quam in A, atque adeo invenietur $B - A = dx : x^{\alpha} = x^{-\alpha}dx = ydx$, unde cum A, B, C, D ſit ſeries aſcendens, fient omnes B − A, C − B, D − C &c. id eſt omnia ydx, $= M - A$, At verò ſubſtituendo in æquatione $A = 1 : \overline{\alpha - 1} . x^{\alpha - 1}$ vel $= (1 : x)^{\alpha - 1} : \alpha - 1$, loco x, o fiet $M = (1 : 0)^{\alpha - 1} : \alpha - 1$, at verò $1 : 0$ eſt magnitudo infinita, quam deſignabimus per ∞, ergo $M = \infty^{\alpha - 1} : \alpha - 1$, atque adeò M − A ſeu area hyperbolarum abſciſſæ adjacens, erit $= \infty^{\alpha - 1} : \alpha - 1, - 1 : \overline{\alpha - 1}\, x^{\alpha - 1}$, vel quia $1 : x^{\alpha - 1} = xy$, erit $M - A = (\infty^{\alpha - 1} - xy) : \alpha - 1$. Ex quo apparet ejuſmodi areas juxta diverſos gradus infinite magnas eſſe, ſiquidem α ſit quilibet numerus poſitivus & unitate major. Sed de his ſufficit.

PROPOSITIO XII. Theorema.

Fig. 29. 93. *Tenacitas fili* ZBABX *ad figuram manentem redacti à potentiis* BH, βH &c. *ipſi applicatis, æquatur in quolibet fili elemento* Bb, *tenacitati fili in vertice* A *auctæ omnibus* GH, *quæ ex ſingulis potentiis* BH, βH &c. *curvæ* AB *applicatis derivantur, reſolutione illarum* BH *in æquipollentes potentias laterales* BG *&* GH *ſingulis curvæ* AB *elementis* Bb *perpendiculares & parallelas. Hoc eſt exponendo tenacitatem fili in* A^; *erit* $T = A + \int GH$.

^ per A

Et demiſſa ex elementi curvæ Bb *termino* b *perpendiculo* bg *ad tangentem* Bg *curvæ in* B, *ſumatur in hac tangente*, B*h æqualis elemento curvæ* Bβ, *& agantur* hm *parallela ordinatæ* BC, bf *verò æquidiſtans axi curvæ* AC, *& per curvæ punctum* B, *indefinita* BME *eidem* AC *etiam parallela, in quam* ME *cadat perpendicularis* HF *ex termino* H *lineæ* BH *potentiæ curvæ puncto* B *applicatæ repræſentatricis: ac denique jungantur lineola* bh, *atque hisce factis habebitur in angulo contactus* bBg *figura* bfhg *ſimilis, & ſimiliter poſita cum figura majore* BFHG, *ſi elementum* Bb *fuerit ad elementum* Bβ *ut illius tenacitas* T *ad hujus tenacitatem* t; *atque adeo erit quælibet lineola in*

figu-

ſigura bfhg *ad elementum curvæ* Bb, *ſicut homologa linea in ſigura majore* BFHG *ad lineam* T, *quæ tenacitatem ejusdem curvæ elementi* Bb *exponit.*

Demonſtr. I. Quoniam potentiæ BH (§. 39.) laterales BG & GH æquipollent, & ex hisce potentia GH curvæ puncto B in directione tangentis vel elementi Bβ applicata potentia conſpirans eſt cum potentia, qua idem elementum Bβ tenditur, cui tenſioni (§. 86.) tenacitas elementi *t* æqualis dicta eſt, hæ potentiæ conſpirantes ſcilicet GH & *t* æquales erunt directe contrariæ vel oppoſitæ potentiæ T, qua elementum B*b* tenſioni reſiſtit, cum (ſecundùm hypotheſin) omnia in ſtatu manenti ſeu æquilibrii exiſtant, atque adeo $T = t + GH$, vel $T - t = GH$. Atqui (§. 87.) omnes differentiæ $T - t$, inter ſingulorum curvæ contiguorum elementorum tenacitates, æquantur exceſſui maximæ T ſupra minimam, quæ eſt tenacitas in vertice, A, ergo $T - A = \int GH$, vel $T = A + \int GH$.

II. Quia (§. 39.) *p*BM : *p*Bb quæ eſt T, = BM : Bb, per hypotheſin verò T : t = Bb : Bβ, & *p*Bβ id eſt t ad *p*Bk = Bβ : Bk, erit ex æquo *p*BM : *p*Bk = BM : B*k* vel B*m* (quoniam in triangulis ſimilibus βBN & Bhm hypothenuſæ Bh, Bβ æquales ſunt; atque adeo ipſa triangula æqualia), & convertendo *p*BM − *p*Bk : *p*BM = M*m* vel *bf* : BM. Atqui, quoniam omnia in æquilibrio ſunt, duæ potentiæ conſpirantes *p*Bk & BF, quæ (§. 40.) ex potentia BH derivatur, æquales erunt directe oppoſitæ *p*BM, unde *p*BM − *p*Bk = BF, atque adeo, ponendo hunc valorem in antecedenti analogia, habebimus BF : *p*BM = *bf* : BM, ſed *p*BM : *p*Bb, id eſt T = BM : Bb ergo ex æquo BF : T = *bf* : B*b*.

Simili prorſus argumento probabitur, quod *p*BN − *p*Bl = FH, & (*p*BN − *p*Bl) vel FH : *p*Bl = *fh* : Mb; unde quia etiam (§. 39.) *p*Bl : *p*Bb vel T = Mb : Bb; erit pariter ex æquo FH : T = *fh* : Bb; vel invertendo T : FH = Bb : *fh*, & quia paullò ante habuimus BF : T = bf : Bb, erit denique ex æquo BF : FH = bf : fh, atque adeo triangula BFH, *bfh* ſunt ſimilia & propter parallelas *bf* ac BF ſimiliter poſita. Præterea, quia ipſæ BG, & *bg* utpote eidem tangenti B*g* perpendiculares inter ſe parallelæ ſunt, æque ac lineæ BH & bh, liquet etiam triangula BGH & *bgh* ſimilia eſſe, ac propterea figuræ BGHF & *bghf* ex triangulis ſimilibus compoſitæ, ſimiles erunt & ſimiliter poſitæ. Porrò cum invenerimus ſupra FH : T = *fh* : Bb, erit permutando FH : fh = T : Bb, atque adeo duæ quælibet aliæ lineæ homologæ in figuris ſimilibus BFHG & *bfhg* erunt in hac

F eadem

eadem ratione T ad Bb, vel permutando, quælibet lineola in figura minore erit ad elementum curvæ Bb, ſicut homologa linea in figura majore ad tenacitatem T ejusdem curvæ elementi. Quæ erant demonſtranda.

Corollarium I.

94. Ducta, ſi placet, per verticem A recta AO arbitrariæ magnitudinis, axi AC perpendiculari, ac ſuper ea deſcripto ſemicirculo APO, agantur AP parallela elemento Bb, & Ap æquidiſtans alteri curvæ elemento contiguo Bβ, & jungantur cum Po rectam Ap ſecans in Q, tum etiam pO; quibus peractis, erit BG : T = PQ : AP. Nam (§. 93.) eſt BG : T = bg : Bb, atque ob parallelas AP, B*b* & A*p*, Bβ, ſectores ſeu triangula B*bg* & APQ ſimilia ſunt, atque adeo *bg* : B*b* = PQ : AP; ergo etiam BG : T = PQ : AP.

Corollarium II.

95. Quælibet recta in figura BGHF eſt ad homologam in figura *bghf*, ut alterutra ex potentiis pBl vel pBM, quæ elementi Bb tenacitati T æquipollent, ad homologum, id eſt reſpondens latus in triangulo characteriſtico BMb: hoc eſt, quælibet linea in figura majori eſt ad homologam in minori ſicut *p*Bl ad Bl, vel ſicut *p*BM ad BM. Nam quia in utraque figura duæ quælibet lineæ homologæ ſunt inter ſe, ſicut T ad Bb, & quia T ad Bb, ſicut *p*Bl ad Bl vel Mb, aut ſicut *p*BM ad BM, liquet aſſertio hujus corollarii.

Corollarium III.

96. Si omnes applicatæ potentiæ BH curvæ perpendiculares ſint, ut BD; puncta G & H confundentur cum puncto D, evaneſcentibus GH, *gh* in utraque figura majore & minore; atque adeò tenacitas curvæ ubique æqualis erit tenacitati in vertice A, atque adeo conſtans ſeu data. Id eſt habebitur ubique T = A.

Corollarium IV.

97. Idcirco, cum (§. 94.) ſit BG : T = PQ : AP = ſin. anguli PAQ ſeu anguli gBb, id eſt ſinus curvitatis in B ad radium; erit in caſu potentiarum curvæ perpendicularium una earum BD cuilibet curvæ puncto B applicata ad tenacitatem fili (§. 96.) conſtan-

tem

tem A, ſicut ſinus curvitatis in curvæ puncto, cui potentia applicata eſt ad radium; & permutando erit potentia applicata BD ad ſinum curvitatis in B ſicut A ad radium, id eſt, in ratione data.

Elegans hæc proprietas ab Acutiſſimo Geometra Joh. Bernoulli primùm animadverſa eſt; ſed eam, quantum ex Commentariis Acad. Reg. Scient. Pariſ. 1706. ad diem 12. Maji apparet, ex alio fundamento deduxit.

Corollarium V.

98. Iisdem adhuc poſitis, quæ in duobus proxime antecedentibus Corollariis, quia (§. 93.) HF : hf = BF : bf = T : Bb (vel §. 96.) = A : Bb, erit ∫FH : ∫fh = ∫BF : ∫bf = A : Bb, ſi ſingula curvæ elementa æqualia aſſumta fuerint. Atqui (§. 87.) ∫hf, ſeu omnes hf vel Nn, poſita Bn = bM, reſpectu curvæ portionis AβB æquantur exceſſui maximæ ordinatarum differentiæ ae (poſito arculo curvæ Aa = Bb = Bβ = Zz) ſupra minimam bM, id eſt, ae − bM (vel etiam, quia ae ac aA æquales fiunt cum axis CA curvæ perpendicularis eſt in A) Aa − bM = Bb − bM; & ∫bf = ∫Mm = BM − Ae (vel quia Ae hoc caſu evaneſcit præ Aa vel Bb) = BM. Ergo ∫FH : Bb − bM = ∫BF : BM = A : BC. Ubi omnes FH ſeu ∫FH, & ∫BF pertinent ad arcum curvæ AβB.

Sin verò ∫FH & ∫BF pertinuerint ad arcum curvæ BZ & tangens hujus arcus in Z axi AC parallela fuerit, erit Zy − o, poſita ut ſupra Zz = Bb = Bβ &c. atque adeo zy = Zz = Bβ; unde ∫hf vel ∫Nn erit hoc caſu (§. 87.) BN − Zy = BN, & ∫bf − ∫Mm = yz − Nβ = Zγ − Nβ = Bβ − Nβ, atque adeò ∫FH : BN = ∫BF : Bβ − Nβ = A : Bβ.

Corollarium VI.

99. Si potentiæ curvæ applicatæ BH, βH &c. axi AC æquidiſtantes ſunt, coincident BH, BE, & *bh* ac *bf* evaneſcentibus HF, *hf*; atque adeò omnia ordinatarum elementa bM, BN &c. hoc caſu æqualia ſumenda ſunt; ac proinde omnes potentiæ ſecundùm directiones ordinatarum ex tenacitate elementorum curvæ derivatæ in iſta hypotheſi æquales exiſtent. Propterea, vocando unamquamque harum æqualium potentiarum B, fiet nunc (§. 95.) BE : bf vel Mm = B : bM, adeoque cum B & bM conſtantes ſint hoc caſu, erit ∫BE : ∫Mm = B : bM, vel quia (§. 98.) ∫Mm = BM − Ae = BM evaneſcente Ae præ Aa; fiet ∫BE : BM = B : bM & permutando

 ∫BE:

$\int BE : B = BM : bM$. Porro, quia ordinata *ae* vertici A proxima in ipſam curvam Aa deſinit, & B generaliter conſtantem potentiam juxta ordinatarum directiones denotans, etiam eam, quæ juxta directionem *ea* vel A*a* agit, exponet, ſed potentia juxta A*a* eſt tenacitas curvæ in vertice A, ergo $A = B$, atque adeo $\int BE : B = \int BE : A = BM : bM$.

Scholion.

100. Ex Corollariis theoremati noſtro adjectis ſatis conſtare poteſt quam latè pateat ejus uſus, revera enim infinitorum id problematum ſolutionem continet, quorum Problemata *Catenariæ*, *Velariæ*, & figuræ lintei ab incumbente liquore inflexi nonniſi caſûs ſunt ſpecialiſſimi noſtri theorematis. Sed priusquam ad applicationem ejus nonnullis ſpecialibus ejusmodi caſibus accedam, monendum eſt atque notandum, potentias applicatas BH, βH, etſi ſimplicibus & finitæ magnitudinis lineis expreſſas, nonnunquam lineolas tantum infinitè parvas, quandoque etiam rectangula infiniteſima ſignificare; & tenacitates fili in ſingulis punctis ejusdem ſemper generis magnitudines exiſtere quidem cum potentiis applicatis, ſed præ hisce infinitas; ut id ex ipſa applicatione clarius eluceſcet.

101. Sint ergo $AC = x$, $CB = y$, $BM = dx$, $bM = dy$, $Bb = ds$, $AO = a$, $AP = m$ & $PO = n = \sqrt{(aa - mm)}$. Hinc $PQ = dn$, & $Qp = dm$. Hisce poſitis, triangula ſimilia BbM, & OAP præbent $ds = adx : n$, & $dy = mdx : n$. Idcirco ſubſtitutis his valoribus in analogia $BG : T = PQ : AP$, §. 94. reperta, erit $BG : T = dn : m$, primus Canon. Et $T = A + \int GH$, altera formula generalis.

102. Sint potentiæ applicatæ BH curvæque perpendiculares $= bds$, ubi b eſt magnitudo data, eritque hoc caſu (§. 96.) $T = A$, & A (§. 100.) ejusdem generis magnitudo cum potentia applicata, atque adeò dicatur $= ab$. Hinc ex $BG : T$ fiet $bds : ab$, vel $ds : a$ atque adeo $ds : a = dn : m = BG : T$, vel quia (§. 101.) $ds = adx : n$, erit $(adx : n) : a = dn : m$, atque adeò $dx : n = dn : m$ ergo $mdx = ndn = -mdm$, & $dx = -dm$, & integrando $x = a - m$ vel $m = a - x$, ergo $n = \sqrt{(aa - mm)} = \sqrt{(2ax - xx)}$, hinc $dy (= mdx : n) = adx - xdx : \sqrt{(2ax - xx)}$, ergo $y = \sqrt{(2ax - xx)}$ quæ eſt æquatio ad circulum.

103. Si potentia curvæ perpendicularis BD vel BG aut BH (hæ tres in hoc caſu unum idemque ſignificant) ſint $= dy^2 : ds$, qui eſt caſus

caſus *Velariæ*, ut ſuo loco plenius oſtendetur, erit, factis debitis ſubſtitutionibus, $BD = mmdx : an$, atque poſita $A (= T.) = a$, analogia (§. 101.) $BG : T = dn : m$, nunc fiet $mmdx : aan = dn : m$, hinc $aandn = m^3 dx$ & $m^3 dx = aamdm$ vel $dx = - aadm : mm$, hinc $x = aa : m, - a$. atque $m = aa : a + x$ & $n = \sqrt{(aa - mm)} = a \sqrt{(2ax + xx)} : a + x$, ergo $dy (= mdx : n) = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$. Pro æquatione *Velariæ*.

104. Si potentia applicata curvæ itidem perpendicularis BD ſit kds, ubi k denotat quantitatem utlibet datam in x & conſtantibus, ponatur juxta ſuperiorem (§. 100.) notam $T = A = \frac{1}{2} aa$; factiſque ex (§. 101.) convenientibus ſubſtitutionibus analogia $BG : T = dn : m$, mutabitur in $2kdx : an = dn : m$, hinc $2kdx = andn : m = - adm$, vel $2kdx = adm$. Ponatur $x + u =$ conſtanti b, ergo $du = - dx$, & $2kdu = - 2kdx = adm$. Unde ſi fiat $2kdu = adp$, erit $dp = dm$, atque adeo $p = m$ & $dy = pdx : \sqrt{(aa - pp)}$. Quæ ex aliis principiis reperta eſt à Celeberrimis Bernoulliis. Si $k = u$, fiet $dy = - uudu : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ pro æquatione figuræ lintei vel Elaſticæ Acutiſſimi Jac. Bernoullii.

105. Si applicatæ potentiæ BH ſunt axi AC parallelæ, ut BE; ducatur EI perpendicularis ad BD, unde ſi $BE = dq$, propter triangulorum BIE, APO ſimilitudinem invenietur latus $EI = ndq : a$, & $BI = mdq : a$. Idcirco loco BG nunc eſt ſumenda BI, in analogia $BG : T = dn : m$, fietque $(mdq : a) : t = dn : m$, vel $atdn = mmdq$; ſed $a + \int IE = a + \int ndq : a = T = t$, & differentiando $ndq : a = dt$, vel $dq = adt : n$, quod in æquatione $atdn = mmdq$ ſuffectum, præbet $atndn = ammdt$ vel $dt : t = ndn : mm = - mdm : mm = - dm : m$; hinc $t = aa : m$, quod in ſuperiori analogia ſubſtitutum, dat $(mdq : a) : (aa : m) = dn : m$, ex quâ elicitur $dq = a^3 dn : m^3$ (vel propter $aa = mm + nn$) $= ammdn + anndn : m^3 = ammdn - amndm : m^3 = amdn - andm : mm$; unde, facta ſummatione, invenietur $q = an : m$, id eſt $mq = an$, vel ſubſtitutis loco m & n ipſarum proportionalibus dy, dx; reperietur $dy = adx : q$. Quæ æquatio omnis generis *Catenarias* continet.

Etſi vero modo inventa æquatio jam continetur in Corollario ſexto, quod dat analogiam $\int BF : A = BM : bM$, in qua ſi $\int BF = \int dq = q$, $A = a$, $BM = dx$, & $bM = dy$, habebitur $q : a = dx : dy$, atque adeò $dy = adx : q$. Non tamen abs re mihi viſum eſt, ſi uſum analogiæ $BG : T = dn : m$ etiam hoc caſu illuſtrarem.

106. Sit $q = s$, per s intelligendo curvam AβB, erit $dy = adx : s$, qui caſus eſt ſimpliciſſimus problematis *Catenariæ*. Foret enim

 ms

$ms = an$, & $s = an : m$, ac $ds = \frac{amdn - andm}{mm}$, vel quia $ds = adx : n$, erit $dx = mndn - anndm : mm = - mmdm - nndm : mm = - aadm : mm$, ergo ut ſupra (§. 103.) invenietur $dy = adx : \surd(2ax + xx)$, æquatio *Catenariæ*, quæ eadem prorſus eſt cum *Velaria*. Sin verò gravium directiones in puncto ad diſtantiam finitam ponantur convergere, *Catenaria* erit *hyperbola æquilatera*, cujus demonſtratio brevitatis gratia aliis relinquenda eſt, quanquam cæteroquin non longa ſit, ſed ferme una linea & absque calculo poteſt perfici.

PROPOSITIO XIII. Problema.

107. *Inventa curva manente, in quam velum, linteum, aut quodvis aliud corpus flexile à potentiis applicatis arcuatur, aſſignare mediam directionem potentiarum & impreſſionem earum, juxta hanc mediam directionem.*

Fig. 30. Sit A*e*D inventa curva terminis ſuis tigillo ſeu lineæ inflexili ACD alligata, quæritur media directio omnium potentiarum *eb*, *db* &c. curvæ applicatarum, & quantitas impulſus, ſeu impreſſionis, quæ ſecundùm mediam directionem CB in tigillum DCA exeri debet.

Solutio. Per terminos curvæ A, D ductæ ſint tangentes curvæ AB, DB convenientes in puncto B, in quarum alterutra, ut AB, capiatur ſegmentum AF, quod ſit ad reliquam tangentem totam DB, ut tenacitas curvæ in A ad tenacitatem ejus in D, quæ tenacitates ex ſuperius (§. 93.) demonſtratis habentur. Per puncta A & D agantur perpendiculares AG, DM, rectæ DA, & per F ac B eidem AD æquidiſtantes FG, BE perpendicularibus occurrentes in G & E. Dividatur AD in C, ut ſit AC : DC = DE : AG, & in perpendiculari lineæ AD per punctum C ſurſum ducta ſumatur portio CH = AG + DE, & in parallela eidem AD per punctum H ducta ſumatur HI = BE − FG, & jungatur denique IC, ejusque continuatio CB erit media directio quæſita, impulſus vero ex omnibus curvæ applicatis potentiis reſultans, ſecundùm hanc mediam directionem, erit ad tenacitatem fili in A vel D, ſicut IC eſt ad AF vel ad DB.

Demonſtr. Linea AD non aliam à potentiis *eb*, *db* &c. curvæ A*e*D applicatis impreſſionem ſubire poteſt, quam quæ reſultat ex potentiis, quibus in directionibus tangentium curvæ AB, DB urgetur, ſeu ex tenacitatibus curvæ in A & D, quandoquidem in his

tan-

tantum punctis curva AeD lineæ inflexili ACD alligata eſt. Verùm reſolvendo potentias AF & DB in ſuas æquipollentes laterales AG & GF, atque DE & EB, quia ex conſpirantibus AG & DE (§. 54.) naſcitur potentia ipſis æqualis AG + DE in directione per C tranſeunte ſcilicet per ipſarum AG & DE centrum gravitatis, & rectæ AD perpendiculari, & quia potentia CH = AG + DE per conſtructionem contrario ſenſu agit, hæc CH in æquilibrio conſiſtet cum potentiis AG & DE. Potentia vero, quæ ex contrariis EB, & GF reſultat (§. 38.) æquabitur exceſſui majoris EB ſupra minorem GF, atqui etiam (conſtr.) HI = EB − GF, ergo ex contrariis & lineæ AD parallelis potentiis reſultat potentia HI, quæ in recta AD agens ex C verſus D in æquilibrio foret cum contrariis EB & GF, ergo duæ potentiæ CH & HI in æquilibrio conſiſterent cum potentiis AG, DE, GF & EB, quibus obliquæ AF & DB æquipollent atque adeo cum hiſce obliquis, vel quia (§. 39.) ex lateralibus CH & HI unica potentia CI naſcitur, hæc etiam in æquilibrio maneret cum potentiis obliquis AF & DB. Hinc (§. 37.) rectæ IC continuatio CB dat mediam directionem obliquarum AF, DB, vel, quod idem eſt, omnium potentiarum *eb*, *db* curvæ AeD applicatarum; ipſa vero IC exponit impreſſionem ſecundùm mediam directionem CB ex omnibus applicatis potentiis provenientem. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

108. Recta IC producta tranſit per concurſum B tangentium AB, & DB. Protrahatur enim AB in N ut fiat BN = AF, oſtendetur DN æqualis & parallela ipſi IC. Nam ſi per punctum N agantur NM, NO rectis DA vel BE & DE æquidiſtantes, propter parallelas NO, AG & OB, FG ac (conſtr.) BN = AF, erunt triangula AFG, NBO ſimilia & æqualia, adeoque NO = ME = AG, totaque DM = DE + AG (conſtr.) = HC; ſic etiam MN = EO = EB − OB = EB − FG (conſtr.) = IH; idcirco etiam DN = CI, atque propter parallelas DM & CH atque angulos æquales MDN & ICH ipſæ DN & IC parallelæ erunt. Porro quia (conſtr.) AC : DC = DE : AG vel EM (& propter parallelas EB ac MN) = AB : BN, atque adeo AC : DC = AB : BN, lineæ DN & CB non tantùm ſunt æquidiſtantes, ſed etiam DN & IC parallelæ oſtenſæ ſunt; ergo IC & CB in directum poſitæ ſunt, ac proinde ipſa IC producta per concurſum B tangentium AB & DB tranſibit.

Co-

Corollarium II.

109. Hinc AF eſt ad DB, ſicut ſinus anguli ABC ad ſinum anguli DBC. Nam in triangulo DBN, ſinus angulorum NDB, DNB lateribus oppoſitis NB, DB ſunt proportionales, & anguli illi propter parallelas DN & CB angulis DBC, ABC æquantur. Propterea præcedens, & hoc alterum corollarium, hanc facillimam problematis ſuppeditant conſtructionem. Producta tangente AB in N, ut ejus continuatio BN ſit ad alteram tangentem totam DB, ſicut tenacitas curvæ in A, quæ exponitur per rectam AF, ad tenacitatem ejusdem in D, quam exponit DB, recta BC per punctum concurſus B tangentium AB, DB tranſiens & parallela lineæ DN, jungenti puncta D & N, erit media directio quæſita.

Corollarium III.

110. Si tenacitates fili in A & D æquales ſint, media directio BC angulum tangentium ABD bifariam dividit. Nam quia AF æqualis DB hoc caſu, & AF ad DB, ut ſinus anguli DBC ad ſinum anguli ABC per præcedens Corollarium, erit omnino angulus ABC æqualis angulo DBC.

Scholion.

111. Corollarium tertium nos manuducit ad novum illud curvarum genus, quod apud Cel. Jac. Bernoulli in Act. Lipſ. 1695. Fig. 31. pag. 548. *Linearum mediarum directionum* nomine venit. Nam ſi filum aliudve corpus flexile à potentiis *ae*, R*e* &c. in ſingulis punctis ipſi perpendiculariter applicatis in lineam ERA arcuatur, recta BD angulum ABE à tangentibus curvæ in utroque ſui termino formatum bifariam dividens (§. 110.) eſt media directio omnium potentiarum *ae* &c. toti curvæ ERA applicatarum, & ducta tangente ab per punctum aliud curvæ *a*, recta *b*D, angulum abE bifariam dividens, eſt media directio potentiarum arcui ERa applicatarum. Jam omnes mediæ directiones BD, bD &c. contingent aliquam curvam CVD, quæ ideò *Linea mediarum directionum* vocatur.

PRO-

PROPOSITIO XIV. Theorema.

112. *Recta* AD *curvæ* ERA *perpendicularis, mediæ directioni* BD *potentiarum curvæ perpendiculariter applicatarum, occurret in puncto* D *lineæ mediarum directionum* CVD. Fig. 31.

Sit Aa curvæ elementum, & *ab* tangens curvæ in *a*, & bD linea biſecans angulum, *ab*E erit media directio potentiarum arcui curvæ ER*a* applicatarum: unde cum *b* ipſi B infinite vicinum ſit, ſequitur unam *b*D alteram BD ſecare in puncto D curvæ quæſitæ. Igitur probandum tantum reſtat, perpendicularem curvæ AD tranſire per punctum illud interſectionis D, duarum infinite vicinarum BD, *b*D. Centro quolibet F in tangente BE aſſumto, & radio FE deſcripto ſemicirculo EGH, agantur radii FG tangenti AB, & F*g* tangenti *ab* paralleli, junctisque EG, E*g*, agatur G*m* radio FE parallela, rectæ E*g* productæ occurrens in *h*, & radio Fg prolongato in *m*: denique ductæ ſint ſemicirculi tangens GK in puncto G, & EM eidem tangenti parallela, quæ proinde radio FG perpendicularis erit. Jam quia FG tangenti AB parallela eſt, erit angulus ABH = EFG, & duo FEG & FGE ſimul æquales angulo ABE, ſeu duplo anguli DBE, quandoquidem BD angulum ABE bifariam dividit, igitur FEG = DBK, unde rectæ BD & GE ſunt parallelæ. Pari argumento probatur, parallelas eſſe *b*D & *g*E. Igitur ducta *m*L parallela ipſi *h*E, vel *g*E, figura AB*b*D & FG*m*L erunt ſimiles, cum compoſitæ ſint ex triangulis ſimilibus AB*b*, BD*b*, & FG*m*, GL*m*. Hisce poſitis, parallelæ FK & G*m* à media E*h* proportionaliter dividentur, atque adeò G*m* : G*h* = FK : EK (vel propter parallelas ME & GK) = FG : MG. Triangula vero ſimilia GE*h*, & GL*m* (nam per conſtr. E*h* & L*m* parallelæ ſunt) præbent, G*m* : G*h* = GL : GE. Igitur FG : MG = GL : GE; atque adeo FL jungens puncta F, L parallela eſt rectæ ME, ac proinde LFG eſt rectus, cum EM perpendicularis ſit ipſi FG. Unde propter ſimilitudinem figurarum AB*b*D, & FG*m*L, erit AB : BD = FG : GL, hinc, quia angulus LFG rectus eſt, angulus DAB itidem rectus erit, atque adeo AD curvæ ERA perpendicularis in A. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

113. Adeoque etiam triangula ADB & MEG ſimilia ſunt, ex

quo facile elicitur valor lineæ AD. Nam ſi $FE = a$, $AP = y$, $Af = dy$, $EP = x$, $Pp = dx$, & $Aa = ds$: erit $AB = xds : dx$; & quia angulus $MFE = aAf$, atque adeò triangula rectangula FME, & Aaf ſimilia ſunt, invenietur $FM = ady : ds$; & $MG = (ads - ady) : ds$, tum etiam $ME = adx : ds$; hinc quia $MG : ME = AB : AD$, invenietur $AD = xds : ds - dy$.

Cl. Jac. Bernoullius (Act. Lipſ. loco ſupra citato) calculo analytico uſus, quem tamen illic non appoſuit, reperit $AD = xds^2 + xdyds : dx^2$, ex qua formula noſtra paulò ſimplicior & nonnihil diverſa ratione à Bernoulliana ex præcedentibus elicita, nullo negotio derivatur, ſubſtituendo tantum loco dx^2 æqualem quantitatem $ds^2 - dy^2$, & numeratorem ac dominatorem dividendo per $ds + dy$.

SECTIO II.

POſteaquam ea, quæ ad æquilibria ſolicitationum, quibus unum idemque mobile urgeri poteſt, ſpectant, excuſſimus: ipſi etiam motus varie accelerati atque retardati examinari debent, qui ex ſolicitationibus continue replicatis, & utlibet variabilibus, reſultare poſſunt. Propterea in hac ſecunda Sectione Motus Corporum acceleratos & retardatos generaliſſime contemplabimur tanquam oriundos ex ſolicitationibus continue quidem replicatis, non tamen utique uniformiter, ut in Galilæi ſyſtemate, in quo gravia in quacunque diſtantia à centro gravium eadem gravitatis ſolicitatione urgeri intelliguntur; ſed quacunque ratione variabilibus, ſive corpora rectà ad centrum gravium ſeu ſolicitationum acceleratricium ferantur, ſive in lineis curvis incedant. Hæc igitur Sectio complectetur quæcunque ad motus acceleratos, retardatos, ad motus projectorum in vacuo, quæ ad iſochroniſmum motus corporum in lineis quibuscunque curvis, quæ ad motus pendulorum &c. pertinent, in omni poſſibili gravitatis, ſeu ſolicitationum centralium, hypotheſi, demonſtrata, methodo non minus univerſali, quam perſpicua atque facili: nam præter ſolutionem generalem Problematis inveniendi ex lege gravitatis, utlibet variabilis, ſemitam curvilineam projectorum in ſpatiis reſiſtendi vi carentibus, tradet etiam hæc ſecunda Sectio regulam generalem, ſecundum quam gravitatem variare oportet ad id, ut curvæ projectorum ſemper algebraicæ, atque adeò geometrica conſtruibiles evadant, ex qua multa deinceps curioſa atque utilia deducentur.

tur. Theoriam centri oſcillationis proponet multo magis quam antea generalem, iis namque corporibus applicabilem, quæ in diverſis fluidis oſcillantur, vel in quocunque ſyſtemate gravitatis variabilis; loco ejus, quod Hugenius, & qui eum ſequuti ſunt, tantum egerunt de centro oſcillationis in caſu ſpeciali gravitatis uniformis, excepto ſolo, quod ſciam, Cel. Joh. Bernoulli qui nobis in Act. Lipſ. 1713. pag. 88. regulam generaliorem ex ſuis principiis eliciendam promittit, ſed quæ nondum, ni fallor, lucem publicam aſpexit, quamque ex fundamentis, à noſtris diverſis, aut ſaltem diverſa methodo ab incomparabili Geometra erutam exiſtimo, tametſi ipſam regulam nondum vidi. Nec reticendum hanc Sectionem ſecundam etiam acturam de ſolicitationibus requiſitis ad id, ut mobilia in orbibus mobilibus revolvi queant, & de motu qui dicitur Apſidum; ſed diverſa ratione ab ea, qua Ill. Newtonus Sect. IX. Lib. I. Princip. Phil. Nat. Math. uſus eſt. Sectionem denique claudet diſſertatio de regulis motus ex percuſſione, quas ex unico fundamento æqualitatis virium ante & poſt conflictum corporum, nova, ut nobis videtur, ratione deducemus.

CAPUT I.

De generalibus Solicitationum continuatarum affectionibus, & de motibus in Vacuo inde oriundis.

DEFINITIONES.

I.

114. PEr vacuum deſignatur omne medium, quod corpora absque impedimento aut adjumento liberè trajicere poſſunt, ſolo ſuo motu à vi motrice accepto.

II.

115. Si mobilia quæcunque, quæ in lineis rectis feruntur, aut in curvis lineis incedunt, ſolicitationibus citantur, quarum directiones in aliquo puncto, poſitione dato, concurrunt, ſolicitationes ejusmodi vocentur centrales, vel etiam ſolicitationes gravitatis variabilis. Et punctum poſitione datum ad quod gravia ſolicitantur, centrum ſolicitationum. Solicitationes centrales ab Ill. Newtono vires centripetæ vocantur.

III.

116. Solicitationes continuari vel continue mobili applicari dicuntur, cum corpus in ſingulis ſpatii percurrendi punctis ad motum recens citatur, ſeu, quod idem eſt, à quadam ſolicitatione urgetur.

IV.

117. *Scala ſolicitationum centralium* ſeu *gravitatis variabilis* appellatur quælibet linea curva, ad aliquem axem per centrum ſolicitationum transeuntem relata, cujus ordinatæ axi rectæ ſolicitationes exponunt, quibus mobile in illis axis punctis, per quæ ordinatæ ductæ ſunt, verſus centrum urgetur, ſi ſcilicet corpus in axe feratur; vel, ſi ipſum in curva aliqua incedat, in illis curvæ punctis, quæ cum punctis in axe, per quæ ordinatæ transeunt, à centro ſolicitationum æque diſtant:

V.

118. *Solicitatio* gravitatis *tangentialis* vocatur quælibet ſolicitatio ex centrali derivata, qua mobile, in qualibet curva delatum, juxta directionem tangentis curvæ ſolicitatur.

VI.

119. *Solicitatio* gravitatis curvæ mobili deſcribendæ *perpendicularis*, eſt ea, quæ ex centrali derivatur, cujusque directio ubique curvæ perpendicularis eſt. Hæc ſolicitatio perpendicularis conatui mobilis à directione tangentis recedere nitentis ubique æqualis eſt, alioqui corpus non moveretur in curva, quam deſcribere ponitur, etenim, ſi hac vi perpendiculari conatus à curva receſſorius major eſſet, mobile revera à curva recederet, recederet itidem accedendo magis quam par eſt ad centrum ſolicitationum, ſi minor exiſteret, utrumque contra hypotheſin. Igitur ut conatus receſſorius à curva retundatur & inutilis reddatur, tantam ſolicitationem coërcentem mobili applicari oportet, quantus eſt conatus deſtruendus; adeo ut ejusmodi conatus & ſolicitatio, juxta eandem directionem curvæ perpendicularem, ſed in oppoſitas partes agentes in æquilibrio detineantur impedianturque quominus alterutra ejusmodi ſolicitationum ſuper alteram effectum aliquem ſortiatur, atque adeò mobile curvam, in qua incedere debet, deſerat.

VII.

120. *Scala* ſolicitationum *tangentialium* eſt curva quælibet ad axem per centrum ſolicitationum centralium transeuntem relata, cujus ordinatæ ſolicitationes tangentiales exponunt in curvæ punctis, à centro ſolicitationum tantundem diſtantibus, ac ordinatæ.

121. Feratur mobile M in curva MON, alterumque A in recta AD per centrum D, ad quod ſolicitationes gravitatis centrales diriguntur, atque mobile M ad quodlibet curvæ punctum N delatum urgeatur verſus D ſolicitatione centrali $N\alpha$, & hac eadem ſolicitatione urgeatur etiam mobile A delatum in punctum E rectæ AD, quod punctum E tantum diſtet à centro D, quantum curvæ punctum N, adeo ut ambo puncta N & E reperiantur ubique in aliquo arcu circulari EN centro D deſcripto, ductisque per ſingula puncta axis E, perpendicularibus EB ipſi AD & æqualibus ubique homologis lineis $N\alpha$, per ſingularum puncta B transibit curva ABC, quæ vocatur ſcala ſolicitationum centralium, quoniam quælibet ejus ordinata BE reſpectivæ $N\alpha$ (ſecundùm hypotheſin) æqualis repræſentat ſolicitationem centralem in rectæ AD & curvæ MO punctis E & N centro D æquidiſtantibus. Porrò, quia ſolicitatio cantralis $N\alpha$ in quolibet curvæ MO puncto N (§. 39. 40.) æquipollet lateralibus $N\beta$ & $\beta\alpha$, quarum hæc ſit in directione tangentis curvæ Nq, alteraque eidem perpendicularis $\beta\alpha$, per ſe patet illam, ſcilicet $N\beta$, vocandam eſſe ſolicitationem tangentialem ex centrali $N\alpha$ derivatam; propterea ſi in qualibet ordinata BE reſpondenti cuique $N\alpha$, ſumatur $SE = N\beta$, & idem factum intelligatur reſpectu omnium reliquorum curvæ MON punctorum, reſultabit inde curva RSC, quæ ſcala ſolicitationum tangentialium mobilis M in curva MON audit. Solicitatio perpendicularis $\beta\alpha$ nullam habet ſcalam, vel ſaltem nulla indigemus, quandoquidem in ſingulis punctis deſtruendo conatui receſſorio mobilis M à curva (§. 119.) adhibetur, nec proinde alia ſub ratione in conſiderationem venit. Fig. 32.

VIII.

122. Quoniam ſolicitationes centrales BE æque ac tangentiales SE continuantur, atque in mobili continue replicantur effectu præcedentium in ſuccedentibus non ſublato, quandoquidem per ſingula rectæ AD puncta ordinatæ ejusmodi BE transeunt: neceſſe eſt, ut ab hujusmodi ſolicitationibus indeſinenter replicatis proveniant

motus continue *accelerati*, cum mobilia A, M in recta AD & curva MON deſcendentia ad ſolicitationum centrum D accedunt; *retardati* verò cum certis quibusdam celeritatibus, quas *initiales* deinceps nominabimus, ex punctis E & N aſcendere incipientia in recta & curva ab eodem centro D recedunt. Propterea ſolicitationes gravitatis centrales vel tangentiales vocantur *acceleratrices* mobilis in recta vel curva deſcendentis; eædemque ſolicitationes vocantur *retardatrices* mobilis aſcendentis, vel à ſolicitationum centro recedentis.

IX.

123. *Momentum cujusque ſolicitationis* quocunque hæc nomine veniat, eſt rectangulum ſub recta, quæ ſolicitationem exponit, & elemento ſpatii quod mobile ejusmodi ſolicitatione continue urgente transmittit. Sic rec-lum BEe eſt momentum ſolicitationis acceleratricis BE vel N*α*, durante deſcenſu mobilis A in ſpatiolo E*e* ordinatæ BE adjacente; rec-lum verò *be*E momentum ſolicitationis retardatricis *be* mobilis ejusdem in ſpatiolo eE aſcendentis. Sic etiam facta E*m* = N*n* elemento curvæ MON, rec-lum SE*m* vel SE. N*n*, eſt momentum ſolicitationis tangentialis & acceleratricis SE vel N*β*, cum mobile in curva per ejus arculum N*n* deſcendit, & rec-lum *se*. *m*E vel *se*. *n*N eſt momentum ſolicitationis tangentialis retardatricis *se*, cum mobile in curvæ arculo *n*N aſcendit.

X.

124. *Scala celeritatum* eſt curva circa axem ſcalæ ſolicitationum centralium, vel ſaltem huic parallelum deſcripta, cujus ordinatæ ordinatis in ſcala ſolicitationum in directum poſitæ, vel iisdem ſaltem reſpondentes, celeritates mobili in illis rectæ AD, vel curvæ MON punctis, ad quæ ordinatæ ſcalæ ſolicitationum reſpiciunt, acquiſitas exponunt. Sic, ſi ordinatæ PV, EF &c. ſcalæ ſolicitationum ordinatis ZP, BE in directum poſitæ, ſignificant celeritates acquiſitas, vel reſiduas mobilis deſcendentis accelerato, vel aſcendentis retardato motu in punctis P, E rectæ AD, vel in punctis curvæ O & N &c. Curva AVF erit Scala celeritatum mobili A in recta AD, vel Mobilis M in curva MDN deſcendentis, vel aſcendentis.

XI.

125. *Momentum celeritatis* eſt factum ex celeritate mobilis in recta

ɛ̃ta vel curva incedentis in celeritatis creſcentis vel decreſcentis elementum. Sic in ſcala celeritatum AVF, rectangulum EF. *af*, vel rec-lum *eaf* eſt momentum celeritatis EF elemento *af* creſcentis, qua mobile ſpatiolum E*e*, tranſmittit, & rectangulum *ef*. *fa* eſt momentum celeritatis decreſcentis *ef*, qua mobile A ex puncto axis *e*, vel in curva MON mobile M ex puncto *n* in altum feruntur retardato motu, & *fa* decrementum infiniteſimum celeritatis decreſcentis *ef*, cum mobilia aſcendunt in ſpatiolis *e*E & *n*N, & EF celeritas reſidua erit in rectæ puncto E aut curvæ puncto N.

XII.

126. Ad deſignandum tempus quo unusquisque motus abſolvitur, utemur nota characteriſtica temporis *t* ſpatio percurſo aut conficiendo præfigenda. Sic *t*AE denotabit tempus, quo mobile A ſpatium AE accelerato ſuo motu cadendo abſolvit, & *t*Ee ſignificabit tempus quo elementum Ee axis AD uniformi motu percurritur. Et ſic de reliquis.

POSTULATUM.

127. Petitur ut concedatur, motum deſcenſus aſcenſusve per axis elementum E*e*, vel curvæ N*n*, ſumi poſſe tanquam uniformem & æquabilem, quoties mobilia A & M hæc ſpatiorum elementa celeritate finitæ magnitudinis, præ incremento vel decremento ejus infiniteſimo percurrere incipiunt, licet motus in iisdem ſpatiis reapſe variati ſint, quoniam celeritatum incrementa vel decrementa infiniteſima, durante deſcenſu vel aſcenſu mobilibus A & M ſuperaddita vel ademta, evaneſcunt præ velocitatibus finitis, quibus corpora ſpatiola Ee, Nn tranſmittunt.

Corollarium.

128. Hinc quia ſpatia æquabili motu percurſa ſunt in compoſita ratione temporum & velocitatum, ipſa tempora, quibus prædicta rectæ vel curvæ elementa percurruntur, erunt, ut hæc elementa applicata ad celeritatem, quâ percurruntur; ſic $t\mathrm{E}e = \mathrm{E}e : \mathrm{EF}$, & $t\mathrm{N}n = \mathrm{N}n : \mathrm{EF}$; unde $\mathrm{E}e = \mathrm{EF}.t\mathrm{E}e$, & $\mathrm{N}n = \mathrm{EF}.t\mathrm{N}n$.

PRO-

PROPOSITIO XV. Lemma.

Fig. 33. *Anguli rectilinei* VDF *&* TD*m ſunt directe ut arcus* VF *&* Tm *qui angulos ſubtendunt, & reciproce ut arcuum radii* DV *&* DT. Hoc eſt angulus VDF : ang. TDm $= \frac{VF}{DV} : \frac{Tm}{DT}$. Eſt enim ang. VDF : ang. TDm = (Tg : DT) : (Tm : DT), atqui ob arcus ſimiles VF & Tg, erit Tg : DT = VF : DV, ergo angulus VDF : angulum FD*m* = (VF : DV) : (Tm : DT). Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

129. Hinc 1°. quilibet angulus VDF exprimi poteſt arcu VF, qui ipſum ſubtendit, diviſo per radium DV, id eſt fractione VF : DF. 2°. Quilibet arcus VF eſt ut factum ex angulo VDF in radium DV, atque adeo hoc facto exprimi poteſt.

PROPOSITIO XVI. Lemma.

130. *Omnis ſolicitatio uniformiter agens æquivalet motui genito, applicato ad tempus, quo motus iſte producitur.*

Dicantur maſſa corporis movendi M, celeritas acquirenda V, adeoque motus generandus MV, tempus quo produci debet T, ſolicitatio, à qua uniformiter hoc tempore agente generari debet G, oſtendendum, fore G = M. V : T. Cum ſolicitatio (§. 9.) utpote ex genere vis mortuæ nullum motum producat, niſi aliquo tempore in corpore continuata vel replicata fuerit, atque nunc ſolicitatio uniformiter agere ponatur, ita ut temporibus æqualibus æquales motûs quantitates in corpore producat, atque adeo motus geniti ſint ut tempora, quibus generantur, ex ſe ipſo clarum eſt, id quod in tempus T ductum producit motum M. V. æquivalere ſolicitationi G, unde cum M. V : T ductum in T producat M. V, ſequitur G = MV : T. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

131. Res univerſaliter ſe habet, ut propoſitio indicat, ſive velocitas acquiſita & tempus finita aut infinite parva fuerint, modò ſolicitatio G toto tempore uniformiter agat. Sin verò ea difformiter operetur, propoſitio generaliter reſpectu cujuscunque temporis non am-

amplius obtinet; ſed duntaxat per temporis tractum indefinite parvum dT, quo mobili tantum celeritas infiniteſima dV acquiritur, quia non niſi per tempusculum ejusmodi infiniteſimum dT ſolicitatio variabilis G (§. 127.) tanquam uniformis ſpectari poteſt; eſt ergo hoc caſu G = MdV : dT, atque adeò dT = MdV : G. Ubi G ſignificat pondus ſeu gravitatem utcunque variabilem maſſæ M.

PROPOSITIO XVII. Theorema.

132. *Momentum ſolicitationis cujusque æquale eſt momento celeritatis mobilis ducto in corporis maſſam.*

Poſitis iis, quæ in §§. 121, 123 & 125 dicta ſunt, ponatur mobile M deſcendere ſuper curva MON, atque per initium A ſcalæ celeritatum AVF ducta ſit recta AH indefinita, angulum ſemirectum HAG continens, cum indefinita AG axi AD normali, & per puncta F, f &c. ſcalæ celeritatum agantur *a*H, *fh* eidem axi æquidiſtantes rectæ AH, occurrentes in punctis H, *h*, alteri vero AX in punctis G, *g*; ductaque H*i* parallela AG, propter angulum ſemirectum HAG erunt HG & AG; atque adeò EF æquales, & rec-lum H*g* = EF. *af* ſeu momento celeritatis creſcentis. Probandum eſt, fore M. EF. *af* = N*n*. ES ſeu momento ſolicitationis tangentialis ES vel Nβ.

Demonſtr. Per §. 131. eſt *t*N*n* = M. *af*: ES; nam, quæ ibi ſunt dT, dV & G, hoc loco dicuntur tN*n*, *af* & ES vel Nβ, ergo ES. *t*N*n* = M. *af*, vel etiam ES. EF. *t*N*n* = M. EF. af; atqui (§. 128.) EF. *t*N*n* = N*n*, ergo ES. N*n* = ES. E*m* = M. EF. *af* = M. HG*g*. Quod erat demonſtrandum.

Similiter ſi grave A in recta AD deorſum feratur, erit BE. E*e* = A. 2H2G2*g*, ponendo A denotare maſſam corporis, & 2H2G celeritatem in E acquiſitam poſt caſum ex altitudine AE, & rectangulum 2H2G2*g* triangulo rectangulo iſoſceli 2H2A2G inſcriptum; momentum velocitatis 2A2G vel 2H2G.

Ratione ſolicitationum retardatricium habetur etiam *se*. *n*N = M. *ef*. *fa* = M. *h*gG, & *be*E = A. 2h2g2G.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

133. *Si duo mobilia* A, M *æqualia, quorum hoc in curva* MON, *illud in recta* AD *feratur, in ſingulis punctis* E *&* N *à centro* D *æ-*

qualiter diſtantibus eadem ſolicitatione centrali BE *urgentur, erit ubique momentum ſolicitationis centralis ſeu rectangulum* BEe *æquale homologo rectangulo* Nn. SE *vel* Nn. Nβ, *quod exponit momentum ſolicitationis tangentialis in curvæ puncto quolibet* N.

Arcus circuli *epn* centro D deſcripti ſecet rectam DN, in puncto *p*, & triangulum N*np* tanquam rectilineum ob ſuam infinitam parvitatem ſpectari poteſt rectangulum ad *p*, atque adeo ſimile triangulo Nαβ. Idcirco erit Nα vel BE : Nβ (SE) = Nn : E*e* (N*p*), & BE. E*e* = Nα. E*e* = SE. N*n* = Nβ. N*n*. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

134. Hinc ſi ſcalæ celeritatum AVF ad punctum F perpendicularis ET ducatur axi occurrens in T, ſubnormalis ET æqualis ubique erit reſpectivæ BE, quæ ſolicitationem centralem exponit in diſtantiis ED, ND à centro D æqualibus; nam quia TFf rectus eſt, triangula FTE & F*fa* ſimilia erunt, atque adeò FE : ET = F*a* (E*e*) : *af*. Ergo EF. *af* = TE. E*e*; atqui (§. 133.) SE. N*n* = BE. E*e* & (§. 132.) SE. N*n* = M. EF. af, aut ſumta M inſtar unitatis, = EF. *af*, erit TE. E*e* = BE. E*e* atque adeò TE = BE.

Corollarium II.

135. In quibuslibet punctorum E, N diſtantiis æqualibus ED & ND à centro D, momenta celeritatum cadendo acquiſitarum erunt æqualia. Nam ſicut (§. 132.) AG vel GH celeritatem acquiſitam mobilis M in curva MON deſcendentis, & rectangulum Hg triangulo HAG inſcriptum celeritatis momentum in N exponunt, ita etiam 2A2G & rectangulum 2H2*g* triangulo 2H2A2G inſcriptum, exponent celeritatem ex deſcenſu mobilis A per ſpatium AE in puncto E acquiſitam, ejusque momentum. Verum (§. 132.) eſt SE. N*n* = M. EF. *af* = M. HG*g*, item BE. E*e* = A. 2H2G2*g*. atque (§. 133.) SE. N*n* = BE. E*e*; propterea fiet M. HG*g* = A. 2H2G2*g*, vel quia (ſecundùm hypotheſin) ipſæ M & A æquales HG*g* = 2H2G2*g*.

PROPOSITIO XIX. Theorema.

Fig. 32. 136. *Si mobilia* M *&* A *ex punctis* M *&* A *in curva* MON *&* *recta* AD *à quiete cadere incipiant, celeritates ipſorum in punctis* N *&*

& E acquiſitæ erunt æquales diſtantiis punctorum à centro D poſitis æqualibus, celeritasque uniuscujusque mobilis poterit duplum areæ AZBEA.

Totum ſpatium AE in innumera elementa, quale eſt E*e*, diviſum cogitetur, & per ſingulorum terminos arcus ex centro D deſcripti intelligantur; adeo ut ſingulis elementis rectæ AE totidem elementa curvæ MON reſpondeant. Jam cum (§. 135.) ubique momentum celeritatis in curvæ puncto N æquetur momento celeritatis in rectæ puncto E, alteri N à centro D æquidiſtanti, habebitur ſemper & ubique HG*g* = 2H2G2*g*, ergo omnia HG*g*, quæ in triangulo HAG continentur æqualia omnibus 2H2G2*g*, quæ in triangulo 2H2A2G, id eſt triangulum HAG triangulo 2H2A2G æquabitur. Unde cum hæc æqualia triangula ſimilia ſint, ſequitur latera in illis homologa æqualia eſſe, atque adeò AG = 2A2G; id eſt celeritates in E & N acquiſitæ, quæ per æquales 2A2G & AG exponuntur, æquales ſunt.

Porrò, quia (§. 132.) HG*g* = BE. E*e* & ſic ubique, erunt omnia HG*g* = omnibus BE. E*e*, atqui omnia rec-la HG*g* componunt triangulum HAG, vel *h*A*g*, quandoquidem motus in A & M punctis nullus eſt, atque adeò etiam momenta celeritatum in illis punctis nulla ſunt, id eſt cum triangulorum HAG, & 2H2A2G verticibus A & 2A confunduntur, & in illis, ut ita dicam, nulleſcunt: omnia verò rectangula elementaria BE*e*, quæ in tota area AAZBE continentur, huic areæ ultimò æqualia fiunt, atque adeò area AAZBE æquatur ubique triangulo homologo HAG, & duplum areæ illius duplo hujus trianguli, ſed hoc trianguli duplum æquale eſt quadrato lateris AG vel GH, quoniam hoc triangulum rectangulum iſoſceles eſt; ergo $AG^2 = 2.$ AAZBE, vel quia AG æqualis eſt EF, $EF^2 = 2.$ AAZBE, id eſt celeritas in E vel N acquiſita poteſt duplum areæ AAZBE. Quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium I.

137. Pariter ſi corpora A & M in curva & recta ex punctis O & P celeritate æquali cadere incipiant, & quidem ea, quam mobile A ſpatium AP à quiete perlabens in puncto P acquirere poteſt; eadem corpora in quibusvis aliis punctis N & E, à centro ſollicitationum æquidiſtantibus, æqualem celeritatem acquirent, tantam ſcilicet quantam mobile A, in hoc puncto A caſum à quiete incipiens,

 lapſu

lapſu accelerato per ſpatium AE in puncto E acquirere poſſet. Nam quia (§. 135.) generaliter eſt HGg = 2H2G2g, erunt etiam nunc omnia HGg æqualia omnibus 2H2G2g, verùm hoc caſu omnia HGg ſunt ea, quæ ſoli trapezio YXGH inſcripta ſunt, ducta ſcilicet per V recta VY axi AD parallela, quia celeritas, qua mobile M ex curvæ puncto O moveri incipit, non eſt nulla; ſed (ſecundùm hypotheſin) æqualis PV ſeu AX vel XY, atque adeo nunc omnia HGg æquantur trapezio YXGH, & eandem ob rationem omnia 2H2G2g æquantur trapezio 2Y2X2G2H, quoniam mobile A caſum ſuum in puncto P cum celeritate 2X2Y (ſecundùm hypotheſin) æquali XY vel AX incipit; æquantur igitur hæc trapezia YXGH & 2Y2X2G2H; verùm quia (ſecundùm hypotheſin) celeritas in P eadem eſt cum celeritate in O, & illa tanta eſt quanta mobili ex A in P cadenti illic in P acquiri poteſt, ſequitur triangula AXY & 2A2X2Y itidem æqualia eſſe, & addendo hisce æqualibus triangulis trapezia illa æqualia YXGH, & 2Y2X2G2H, fient etiam triangula AGH & 2A2G2H æqualia; unde cum eadem & ſimilia ſint, neceſſum eſt, ut latera AG & 2A2G æquentur, atque adeò liquet celeritates in N & E acquiſitas mobilibus ex punctis O & P, à centro D æquidiſtantibus cum celeritate PV vel AG caſum incipientibus, æquales eſſe cum inter ſe, tum celeritati EF in E acquiſitæ (§. 136.) poſt caſum à quiete in A, per ſpatium AE, quæ potentiâ æquetur duplo areæ AAZBE.

Corollarium II.

Fig. 37. 138. Propterea, ſi mobile quoddam A ſecundum quamlibet directionem datam AR impulſum celeritate ea, quam idem mobile ſpatium HA à quiete in H perlabens acquireret in A, & ſolicitationibus ordinatis curvæ GBb expreſſis ad centrum D continue ipſum urgentibus curvam ANn in vacuo deſcribat, celeritas ejus in quolibet curvæ projectionis puncto N ea erit, quam corpus ex H à quiete cadere incipiens in linea recta HD accelerato ſuo motu acquirere poſſet in puncto E, cum altero in curva N æqualiter à centro D diſtanti.

Corollarium III.

Fig. 32. 139. Si corpora ex curvæ & rectæ punctis n & e à centro D æquidiſtantibus celeritate initiali ef, quam poſt deſcenſum per curvam

vam MOn & rectam Ae in punctis M & A motum à quiete incipientia accelerato motu illic in n & e acquirere queunt, in altum ferantur; illa in quibusvis aliis punctis O & P eidem centro D æquidiſtantibus celeritates reſiduas æquales habebunt, tantam ſcilicet, quantam in illis punctis O & P acquiſiviſſent, ſi accelerato motu à quiete in M & A incipiente in curvæ arcu MO & recta AP deſcendiſſent. Nam quia mobilia aſcendunt, atque adeò à centro ſolicitationum BE deorſum ad hoc centrum urgentium recedunt, tam hæ ſolicitationes centrales BE, quam tangentiales SE vel Nβ, quæ ex illis derivantur (§. 122.) nunc ſpectandæ ſunt tanquam ſolicitationes *retardatrices*. Earum tamen momenta $be.e$E & $ſe.n$N (§. 133.) erunt æqualia, & per §. 132. huic æquatur ſuum momentum $hg.g$G celeritatis decreſcentis hg, illi verò celeritatis $2h2g$ momentum $2h2g.2g2$G, propterea hæc ipſa celeritatis decreſcentis momenta ſunt æqualia, & hoc reſpectu cujuslibet alius curvæ elementi nN omnium eorum, quæ in curvæ arcu nO, & homologi elementi eE rectæ DA, omnium eorum, quæ in hujus rectæ ſegmento eP continentur. Hinc etiam univerſa $hg.g$G, quæ in trapezium hgXY deſinunt, æquabuntur univerſis $2h2g.2g2$G, quæ trapezio $2h2g2$X2Y circumſcripta in hoc trapezium deſinunt, id eſt, hæc duo trapezia æqualia erunt. Unde, ſi ex triangulis hgA & $2h2g2$A, quæ ob celeritates initiales Ag & 2A2g in n ac e (ſecundùm hypotheſin) inter ſe æquales etiam æqualia ſunt, auferentur trapezia illa æqualia hgXY & $2h2g2$X2Y, remanebunt triangula æqualia YAX & 2Y2A2X, in quibus, utpote ſimilibus, latera homologa AX & 2A2X æqualia exiſtent, atqui hæc æqualia latera celeritates in O & P mobilibus aſcendentibus reſiduas exponunt, quæ velocitates proinde æquales ſunt, & unaquæque earum (§. 136.) ea eſt, quæ mobili ex A à quiete deſcenſum incipienti acquireretur in P, utpote quæ poteſt duplum areæ AAZP, dum celeritas initialis ef poteſt duplum areæ AAZbe. Propterea GX & 2G2X ſunt initialis velocitatis partes *amiſſæ*, vel à ſolicitationibus centralibus Be, BE &c. in aſcenſu mobilium *abſorptæ*, adeò ut corporum ad curvæ & rectæ puncta M & A aſcendendo delatorum motus aſcenſionalis penitus extinguendus ſit, cum celeritates *abſorptæ* gA & $2g2$A initialibus æquales ſint.

Corollarium IV.

140. Hinc mobilia aſcendentia cum celeritatibus initialibus quibuscunque ſucceſſive omnes celeritatis gradus ſervant in illis ipſis lineæ percurrendæ punctis, in quibus cadendo hos celeritatis gradus acquiſiverunt. Sic mobile cum celeritate *ef* aſcenſum in *e* incipiens, in reliquis ſpatii *e*A aſcenſu conficiendi punctis E, P, A easdem celeritates retinet, quas in puncto A caſum inchoans deſcenſu ſuo accelerato acquiſiviſſet, in iisdem punctis ſcilicet, celeritates EF, PV & o. Quod etiam de mobili in curva MON aſcendenti intelligendum eſt.

Corollarium V.

141. Hinc etiam in omni poſſibili ſolicitationum centralium hypotheſi; *corpora rectà in altum lata, vel in curvis quibuscunque aſcendentia, ad eam ipſam altitudinem in vacuo aſſurgunt, quam, ubi deſcendendo percurrunt, celeritatem acquirunt initiali æqualem.*

Corollarium VI.

142. Si centrum ſolicitationum gravitatis D infinite diſtat à recta AG, arcus concentrici AM, PO, EN &c. abibunt in lineas rectas in directum poſitas ordinatis AA, ZP, BE ſcalæ ſolicitationum centralium, unde quæ univerſaliter in antecedentibus oſtenſa ſunt, etiam obtinebunt in hoc caſu, quo gravium directiones rectæ AG perpendiculares vel axi AD parallelæ ſunt. Adeoque *celeritates in diverſis planorum* (adde & *curvarum* continuam curvaturam habentium) *inclinationibus deſcenſu acquiſitæ, æquales ſunt in omni gravitatis variabilis & uniformis hypotheſi, ſi planorum vel curvarum elevationes æquales fuerint, vel quod idem eſt, ſi planorum horizontalium per terminos planorum inclinatorum vel curvarum transeuntium diſtantiæ æquales fuerint.*

Hoc ipſum corollarium Torricellius primus geometrice ſuo more demonſtravit, & poſt ipſum Hugenius in ſuo Horologio Oſcillatorio Parte ſecunda Prop. VI. ſed ambo tantum in Galilæana hypotheſi gravitatis uniformis atque demonſtrationibus indirectis. Galilæus vero id in prima Dialogorum editione tanquam per ſe evidens ſibi concedi poſtulavit; ſed quia hoc forte magnum poſtulatum ipſi poſtea viſum, id in poſteriori operum ſuorum editione 1656. Bono-

noniæ facta utcunque demonſtrare tentavit; ſed ejus demonſtratio, quæ ibi affertur, Hugenii judicio parùm concludit.

Scholion I.

143. In hac propoſitione, perinde ac in antecedente XVIII. mobilia æqualia ponuntur tam ratione quantitatis materiæ quam ratione texturæ particularum, vel quod idem eſt, corpora M & A, quoad volumen & maſſam, æqualia eſſe debent, ut recenſitæ propoſitiones generaliter obtineant, ſcilicet eo etiam caſu, quo eorum pondera in æqualibus à centro ſolicitationum D diſtantiis proportionalia non ſunt. Semper enim verum erit celeritates in E & N acquiſitas poſt deſcenſus corporum à quiete in A & M, per ſpatia AE & MON æquales eſſe, ſive maſſæ corporum eorum gravitatibus ſeu ſolicitationibus centralibus aut ponderibus proportionales ſint, ſive non.

144. Sed ſi mobilia M & A maſſas non habent ponderibus ſuis proportionatas, nec pondere & maſſa æqualia ſunt, propoſitio præſens ad talia corpora non eſt extendenda; hoc enim caſu prædictæ celeritates, in punctis illis N & A acquiſitæ, non ſunt æquales, ſed velocitas in curvæ puncto N ſe habebit ad velocitatem in rectæ puncto E acquiſitam, ut latus quadratum areæ AABE, cujus ordinatæ BE gravitates ſeu ſolicitationes centrales mobilis M, in curva MON diſcurrentis, exponunt in homologis punctis N, applicatum ad radicem maſſæ mobilis M; ad latus quadratum areæ A3A3BE, cujus ordinatæ E3BE exponunt gravitates corporis A in locis quibusvis E, per quæ ordinatæ transeunt, applicatum ad radicem maſſæ ſeu quantitatis materiæ mobilis A, quod in recta AD fertur. Nam ſi, ut ſupra, latus AG vel æquale GH in triangulo rectangulo iſoſceli HAG, celeritatem mobili M ex deſcenſu per arcum curvæ MON in puncto N acquiſitam, & latera æqualia 2A2G vel 2H2G trianguli rectanguli iſoſcelis 2H2A2G celeritatem mobilis A ex caſu ejus per ſpatium AE in puncto rectæ E acquiſitam, exponant, erunt velocitatum AG, 2A2G momenta rectangula HGg & 2H2G2g triangulis illis inſcripta &, per §§. 132. 133, erit BE. Ee = SE. Nn = M. HGg, ergo omnia BE. Ee, hoc eſt, ut in demonſtratione articuli 136. oſtenſum, area AAZBE æquatur omnibus M. HGg, id eſt facto ex maſſa corporis M in triangulum, atque adeò $AG^2 . M = 2 . AAZBE$ & $AG = GH = EF = \surd(2 . AAZBE) : \surd M$. Et (§. 132.) eſt pariter 3BE. Ee = A. 2H2G2g, atque adeo omnia 3BE. Ee,

E*e* vel omnia E3B.E*e*, hoc eſt, area A3A3BE æquatur omnibus A. 2H2G2*g* id eſt facto ex triangulo 2H2A2G in corporis maſſam A; ergo etiam $2A2G = 2H2G = \sqrt{(2.A3A3BE)} : \sqrt{A}$. Adeoque AG eſt ad 2A2G, hoc eſt, celeritas acquiſita mobili M in curvæ puncto N eſt ad celeritatem mobili A in rectæ puncto E alteri à centro D æquidiſtanti acquiſitam, ſicut $\sqrt{(2.AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(2.A3A3BE)} : \sqrt{A}$, vel etiam, ſicut $\sqrt{(AAZBE)} : \sqrt{M}$ ad $\sqrt{(A3A3BE)} : \sqrt{A}$, hoc eſt, dictæ velocitates ſunt in compoſita ratione ex directa ſubduplicata proportione areæ AAZBE ad aream A3A3BE, & ex reciproca ſubduplicata ratione maſſæ M ad maſſam A. Atqui hæc ratio compoſita æqualitatis ratio fieri non poteſt, niſi area AAZBE fuerit ad aream A3A3BE, ut maſſa M ad maſſam A; id eſt, niſi pondera mobilium ipſorum maſſis proportionalia fuerint. Etenim area AAZBE ad aream A3A3Z3BE in eadem altitudine AE non poteſt eſſe in data ubique ratione maſſæ M ad maſſam A, niſi ſingulæ ordinatæ BE ſint ad ſingulas homologas ordinatas 3BE in eadem ratione M ad A, atque adeò cum BE & 3BE exponant pondera corporum M & A, in diſtantiis ND & ED à centro D æqualibus, liquet celeritates in N & E acquiſitas æquari non poſſe, niſi pondera corporum M & A in æqualibus à centro gravium diſtantiis maſſis ipſorum proportionalia ſint.

Scholion II.

145. Hactenus oſtenſa circa motus gravium adeò generalia ſunt, ut ea non ſolum omnia, quæ circa motus quomodocunque accelerat os excogitari poſſunt, attingant; ſed etiam facili negotio oſtendant quænam hypotheſes poſſibiles ſint, & quas vice verſa natura ferre recuſet. Nam, ut ab his incipiam, omnis ſolicitationum ſeu gravitatis hypotheſis impoſſibilis & imaginaria eſt, cujus ſcala per deſcenſus initium tranſit, adeò ut illic ordinata ejus nulla ſit; cujus rei ratio, me etiam tacente, ſatis in propatulo eſt. Mobile enim quieſcens, quod grave non eſt, ſeu à nulla ſolicitatione centrali citatur (quod contingit in puncto, in quo ſcala ſolicitationum rectæ, in qua mobile cadere deberet, occurrit) non poteſt ſe ipſum movere. Verum hæc ipſa impoſſibilitas etiam in conſideratione temporis ſe manifeſtat, quo aliquod ſpatium deberet percurri in imaginariis ejusmodi hypotheſibus, quandoquidem ad percurrendum ſpatium quantumlibet parvum requireretur in hiſce hypotheſibus tempus infinitum,

tum, quod uſu formularum ex præcedentibus mutuo ſumendarum quilibet poterit experiri. Gravitas utlibet variabilis dicatur g, ſpatium perpendiculariter à corpore cadente deſcribendum x, tempus quo percurri debet t, velocitas in fine hujus temporis acquiſita u; elementa ſpatii, temporis, & velocitatis dx, dt & du, quibus poſitis (§. 132.) erit prima formula $gdx = udu$, & (§. 131.) habetur $dt = mdu : g$, ubi m ſignificat maſſam mobilis & g ejus pondus: quoniam vero mobile cum nullo alio comparatur, ſed ejus tantum motus exquiruntur, loco ipſius m unitas poni poteſt, eritque $dt = du : g$. Secunda formula.

146. Sint nunc celeritates acquiſitæ, ut ſpatia confecta, ut vult Balianus, id eſt $u = x$, & $uu = xx$ ac $udu = xdx$, eritque propter $gdx = udu$, etiam $gdx = xdx$ id eſt $g = x$, ergo exiſtente $x = 0$ erit etiam $g = 0$, ergo in principio deſcenſus gravitas mobilis nulla foret, atque adeò ipſum per ſpatium x nunquam delabi poſſet. Porro, quia ſecunda formula $dt = du : g$ & $g = x$, præbent $dt = dx : x$, unde $t = \log. x$, jam exiſtente $x = 0$, & log. ipſius 0 infinito, quod per ∞ ſignificabimus, erit $t = \infty$, hoc eſt, infinitum tempus requiritur ad percurrendum ab initio nullum ſpatium, adeoque grave ibi perpetuo quieſcet, & conſequenter Baliani hypotheſis impoſſibilis & imaginaria eſt. Hoc ipſum alia adhuc ratione oſtendi in Actis Lipſ. 1709. pag. 404. ſeq.

147. Si celeritates acquiſitæ u ſunt ut x^m, ubi m eſt quilibet numerus integer & poſitivus index poteſtatis ſpatii, cui celeritas proportionatur, fiet $uu = x^{2m}$ & $udu = mx^{2m-1}dx = gdx$, atque adeò $g = mx^{2m-1}$, atqui exiſtente $x = 0$, erit etiam $mx^{2m-1} = g = 0$, ergo ejusmodi hypotheſis impoſſibilis & imaginaria eſt.

Porrò $dt (= du : g = mx^{m-1} : mx^{2m-1}) = dx : x^m$. Verum juxta articulum 92. ſummationem ineundo, invenietur $t = (\infty^{m-1}, -x^{1-m}) : m - 1 = \infty^{m-1} : m - 1$. Hoc eſt, tempus deſcenſus per minimam quamcunque altitudinem eſt in hac hypotheſi, ut poteſtas infiniti ∞, cujus exponens eſt numerus integer $m - 1$. Ergo hæc hypotheſis, multo magis quam præcedens, imaginaria eſt & impoſſibilis.

Hactenus generalia motuum acceleratorum habuimus, diſpiciendum reſtat, quid ex una alteraque gravitatis hypotheſi ſequi debeat.

HYPOTHESIS I.

Fig. 33. 148. *Si ſolicitationes gravitatis ſint ut diſtantiæ à centro gravium* D, *earum ſcala erit linea recta* QCD *per centrum* D *ducta cum axe* AD *angulum quemlibet* QDA *continens, & ſcala celeritatum linea elliptica* ASR, *cujus ſemiaxis transverſus eſt* AD, *& ſemiſſis axis conjugati* DR *par mediæ proportionali inter* DA *vel æqualem* Aα, *&* QA. Nam deſcripto circa centrum D quadrante circuli AVL, ductisque αD, & BEF parallela DL vel αA; quia DR (conſtr.) media eſt proportionalis inter DL vel αA & QA, erit propter Ellipſin ASR; $EF^2 : ES^2$ (= αA : QA) = 2. trapezii αBEA ad 2. trap. QCEA; atqui duplum trapezii αBEA eſt exceſſus quadrati AD vel DF ſupra quadratum DE, atque adeo æquatur EF^2; ergo æquantur etiam duplum trapezii QCEA, quod eſt duplum areæ in ſcala ſolicitationum centralium QCD, & quadratum ES, atque adeò (§. 136.) ES exponit celeritatem acquiſitam in E ex deſcenſu per AE; ergo ellipſis ASR eſt ſcala celeritatum acquiſitarum. Quod erat demonſtrandum.

149. *Si fiat angulus* X *ad angulum* ADF, *in ratione* DL *ad* DR, *ipſe angulus* X *exponet tempus deſcenſus mobilis per* AE, hoc eſt X = *t*AE. Sit enim x elementum ipſius X homologum elemento anguli ADF, quod eſt angulus FDf, ducta ſcilicet *bf* alteri BF indefinite vicina. Erit ergo x : FDf = DL : DR = EF : ES, ergo x. ES = EF. ang. FDf, vel x. ES. DF = EF. DF. ang. FDf, atqui (§. 129.) DF in ang. FDf exprimit arculum Ff, ergo x. ES. DF = EF. Ff, at verò FE. Ff = DF. Ee, quod ex ſimilitudine triangulorum Ffa & FDE facile colligitur, igitur x. ES. DF = DF. Ee, vel deleta DF, erit x. ES = Ee, & x = Ee : ES. Verum (§. 128.) Ee : ES = tEe, ergo x = tEe, atque adeò omnes x hoc eſt X = omnibus tE*e*, hoc eſt tAE. Quod erat demonſtrandum.

Hinc ducto quolibet radio DV, qui quadrantes concentricos AVL & ETK ſecet in V & T, ductisque arcuum AV & ET ſinibus VW & T*e* (per accidens eſt, quod T*e* cadat ſuper *bf*, res utcunque aliter ſe habere poteſt) ſpatia AW & E*e* eodem tempore à mobilibus æqualibus A & E ſimul cadere incipientibus, deſcribentur; eodemque tempore ambo ad centrum D pervenient.

HY-

HYPOTHESIS II.

150. *Si Gravitas corporum ubique uniformis eſt, ut in Galilei hypotheſi, ſcala Celeritatum erit Parabola conica, cujus abſciſſæ axis ſpatia mobili percurrenda, & ordinatæ celeritates acquiſitas exponunt. Eruntque propterea celeritates in ſubduplicata ratione ſpatiorum confectorum.* Fig. 34.

Nam ſcala ſolicitationum gravitatis erit, hoc caſu, recta βC axi AC parallela, atque adeò (§. 144.) $2. A\beta. AE : M = EF^2$, ubi M denotat maſſam mobilis, Aβ ejus pondus, & AE ſpatium cadendo confectum, atque EF celeritatem acquiſitam. Unde ob conſtantem Aβ ſcala celeritatum eſt parabola conica, atque adeo ſpatia mobili deſcripta ſunt ut quadrata celeritatum acquiſitarum, & hæ velocitates in ſubduplicata ratione ſpatiorum. Parameter verò Parabolæ eſt $2. A\beta : M$.

151. *Tempus verò quo ſpatium quodlibet* AE *cadendo conficitur eſt* 1°. *ut duplum ſpatium* AE *applicatum ad celeritatem* EF *hoc tempore acquiſitam.* 2°. *Ut radix ex facto maſſæ corporis in duplum ſpatium applicato ad mobilis pondus ſeu gravitatem. Et denique* 3°. *ut factum ex Maſſa corporis in celeritatem acquiſitam applicatum ad gravitatem ejusdem corporis.* Signetur, ut antea, tempus per AE, per tAE.

Jam (§. 131.) $tEe = M. af : A\beta$, ergo ſummando $tAE = M. EF : A\beta$, quod eſt tertium. Porrò quia $tAE = M. EF : A\beta$, erit etiam $= M. EF^2 : EF. A\beta$ (§. 150.) $= 2. A\beta. AE : A\beta. EF = 2. AE : EF$. Et hoc eſt primum. Denique, quia ordinata parabolæ eſt ad dimidium parametrum in ſubduplicata ratione dupli abſciſſæ ad ſemiſſem parametri, erit $tAE (= M. EF : A\beta) = \sqrt{(M. 2AE : A\beta)}$. Quod erat ſecundum.

152. Idcircò, vocando duorum mobilium maſſas M, *m*; gravitates ſeu pondera G, *g*; ſpatia cadendo deſcripta S, *s*; & denique tempora deſcenſuum T, *t*. Erit $T = \sqrt{(2 MS : G)}$ & $TT = 2MS : G$, vel $G. T^2 = 2. M. S$; & $gtt = 2ms$. Adeoque, ſi ſpatia ab ambobus mobilibus diverſis temporibus confecta ſunt in duplicata ratione temporum, corporum pondera maſſis eorum proportionalia erunt; nam ſi $TT : tt = S : s$ erit $T.^2 s = tt S$; adeoque $G. T^2 = 2. MS$ fiet $tt. GS : s = 2. MS$, vel $Gtt = 2. Ms$, ſeu $gtt = \frac{2. gMs}{G} = 2ms$, adeoque $gM = Gm$, vel $G : g = M : m$.

Propterea hujus paragraphi ope ſecunda Propoſitio per experimenta confirmari poteſt. Videatur §. 30.

CAPUT II.

De Motibus curvilineis in Vacuo, in quacunque gravitatis variabilis Hypotheſi.

PROPOSITIO XX. Lemma.

153. *SI magnitudinis continue creſcentis (cujus prima magnitudo* AI *ea dicitur, à quâ creſcere incipit) incrementum infiniteſimum* Ff *ſemper fuerit ad decrementum* qr, *alterius decreſcentis* Dq, *cujus prima magnitudo, à qua ſcilicet decreſcere incipit, ſit* DR, *ſicut creſcens* EF *ad decreſcentem* Dq, *erit creſcens* EF *ad ſuam primam magnitudinem* AI, *ut decreſcentis prima magnitudo* DR *ad ipſam decreſcentem* Dq.

Fig. 35.

In Fig. 36. circa axem DR deſcripta ſit aliqua curva IF, cujus abſciſſæ Dq, DR decreſcentem primamque ejus magnitudinem referant, ordinatæ verò FE & IA, creſcentem ejusque primam magnitudinem, ut adeò ſigna q, E ad idem punctum pertineant perinde ac ſigna A, R. Per curvæ punctum F tangens FO ducta ſit axi occurrens in O, factaque ordinata *fe* alteri FE infinite vicina, erit *fa* creſcentis FE incrementum, & F*a* vel *qr* ſeu E*e* decrementum infiniteſimum decreſcentis Dq. Eritque adeo (ſecundùm hypotheſin) $fa : qr = FE : Dq$. Verùm triangula ſimilia faF, FEO præbent etiam $fa : qr = FE : EO$, ergo $FE : Dq = FE : EO$, atque adeo $Dq = EO$, hinc producta tangente OF, erit etiam $OF = FS$. Eſt ergo punctum contactus F ubique in medio rectæ OS, angulum rectum SDO ſubtendentis, ut adeò per converſam Prop. III. Secundi Conicorum Apollonii curva IF Hyperbola ſit inter aſymptotas SD & DO, atque adeo EF ſit ad AI, ſicut DR ad D*q*. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI. Theorema.

154. *Exiſtentibus* GBb *ſcala ſolicitationum centralium &* AIF *ſcala celeritatum mobili, ex quiete in* H *in recta* HD *cadere incipienti, acquiſitarum; atque hoc ipſum mobile in directione* AR *celeritate* AI *propulſum, quam grave poſt caſum ex altitudine* HA *in* A *acquirere poteſt, urgentibus ſolicitationibus illis centralibus per ordinatas curvæ* GB *ſignificatis, curvam quandam* AN *in Vacuo deſcribat. Erit* FE

ſeu

ſeu celeritas mobilis in quolibet curvæ puncto N *potentia æqualis rectangulo ſub radio* nZ *circuli oſculatoris in hoc puncto, & ſub* $\beta\alpha$ *quæ ſolicitationem curvæ perpendicularem ex centrali* Nα *vel* BE *derivatam ſignificat.* Hoc eſt, $EF^2 = nZ.\beta\alpha$. Fig. 37.

Mobile A projectum ſecundum AR celeritate AI deſcribens curvam AN in ejus puncto N (§. 138.) acquiret celeritatem EF, quam idem mobile in puncto E, æque remoto à centro D, ac curvæ punctum N, conſequutum eſſet poſt lapſum ex altitudine HE, atque hac celeritate EF in directione tangentis curvæ Nq æquabili motu incedere conatur, verùm à ſolicitatione centrali Nα vel EB durante tempuſculo quam minimo uniformiter agente indeſinenter à directione Nq retractum in curva N*n* detinetur, adeò quidem ut lineola *gn* ipſi ND parallela ſit ſpatiolum à ſolicitatione reſpectu curvæ elementi N*n* uniformi Nα vel BE genitum, atque adeo (§. 151.) tempus, quo grave quoddam tale ſpatiolum à gravitate Nα conficeret, foret $\sqrt{(2gn : N\alpha)}$ ſumta mobilis maſſa A inſtar unitatis; at verò eo tempore, quo *gn* à ſolicitatione centrali generatur, mobile in tangente deſcribit æquabili motu celeritate EF ſpatiolum N*g* vel N*m*; quod tempus (§. 128.) eſt etiam $Nm : EF$; ergo $\sqrt{(2gn : N\alpha)} = Nm : EF$, atque adeò $2gn : N\alpha = Nm^2 : EF^2$, vel etiam $2gn.nZ : N\alpha.nZ = Nm^2 : EF^2$, & permutando, $2gn.nZ : Nm^2 = N\alpha.nZ : EF^2$. Atqui conſiderando elementum curvæ N*n* inſtar arculi circuli oſculatoris centri Z, cujus N*m* tangens, erit $Nm^2 = 2nZ.nm$ vel $= 2mn.nZ$, ergo $2gn.nZ : 2mn.nZ\ (Nm^2) = gn.nZ : mn.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$; vel ſubſtitutis loco lineolarum *gn*, & *mn*, rectis Nα, $\beta\alpha$, quæ ipſis propter triangulorum N$\alpha\beta$ & *gnm* ſimilitudinem proportionales ſunt, fiet $N\alpha.nZ : \beta\alpha.nZ = N\alpha.nZ : EF^2$. Ergo $EF^2 = nZ.\beta\alpha$. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII. Theorema.

155. *Iisdem poſitis, erit celeritas projectionis* AI *ad celeritatem mobilis in curvæ puncto* N, *reciproce, ut perpendicularis* Dq *ſuper tangente* Nq *in curvæ puncto* N, *ad perpendicularem* DR *ex centro* D *ad directionem jactus* AR *ductam. Atque adeò ſingula rectangula* Dq. EF; *dato rec-lo* DR. AI *æquabuntur.* Fig. 37.

Nam ductis per punctum *n* tangente *ns*, & arcu circulari *ne* ex centro D deſcripto, ac denique ordinata *ef*, jungatur NZ, & ad tangentem curvæ *ns* demittatur perpendicularis D*s*. Quibus poſitis,

erit Nβ ſolicitatio tangentialis, ejusque momentum (§. 132.) æquatur momento velocitatis in N acquiſitæ, atque adeò Nβ. N*m* vel N*n* = EF. *af*; & quia (§. 154.) $EF^2 = nZ.\beta\alpha$, fiet EF. *af* : EF^2 = Nβ. N*m* : *n*Z. $\beta\alpha$. vel ſubſtitutis loco Nβ, & $\beta\alpha$ proportionalibus N*q* & D*q*, & loco N*m* & *m*Z vel *n*Z proportionalibus *qr* & *hq* vel N*q*, invenietur EF. *af* : EF^2 = N*q*. *qr* : N*q*. D*q*. Nam quia ZN & Z*n* tangentibus N*q* & *ns* perpendiculares ſunt, anguli NZ*n* & *ghs*, quem tangentes continent, neceſſariò æquales ſunt; atque adeò triangula NZ*m* & *qhr* ad N & *q* rectangula ſimilia ſunt, ac lateribus N*m* & NZ vel *n*Z proportionalia, latera homologa *qr* & *hq*, vel N*q* in triangulo *qhr*. Verum in poſtrema analogia deletis EF ex primo & ſecundo, & N*q* ex tertio & quarto terminis, fit *af* : EF = *qr* : D*q* & permutando *af* : *qr* = EF : D*q*, id eſt incrementum creſcentis FE eſt ad decrementum decreſcentis D*q*, ſicut ipſa creſcens ad decreſcentem, adeóque erit (§. 153.) creſcens FE ad ſuam primam magnitudinem AI, ſicut decreſcentis D*q* prima magnitudo DR ad decreſcentem, & invertendo, AI celeritas jactus eſt ad EF celeritatem mobilis in quolibet curvæ puncto N, ut perpendicularis D*q* ad DR. Propterea erunt ſingula rectangula FE. D*q* æqualia dato AI. DR. Quæ erant demonſtranda.

COROLLARIUM I.

156. Quia EF : AI = DR : Dq, vel $EF^2 : AI^2 = DR^2 : Dq^2$, & $EF^2 = \beta\alpha . nZ$, erit $\beta\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 : Dq^2$. ſed $\beta\alpha . nZ : N\alpha . nZ = \beta\alpha : N\alpha = Dq : DN$ vel invertendo, $N\alpha . nZ : \beta\alpha . nZ = DN : Dq$: ergo ex æquo & per compoſitionem rationum invenietur $N\alpha . nZ : AI^2 = DR^2 . DN : Dq^3$, atque adeò $N\alpha = AI^2 . DR^2 . DN : nZ . Dq^3$; ergo ſolicitatio centralis in quolibet curvæ puncto N eſt ut $DN : nZ . Dq^3$. Ut Celeberrimi viri Joh. Bernoulli, Abr. Moyvræus, & Guido Grandus invenerunt, inſiſtentes omnes principio iſti, quòd tempora lationum in curvis ſunt areis proportionalia, quod nos nondum ſuppoſuimus; ſed in ſequenti Corollario ex poſitis fundamentis noſtris deducemus.

COROLLARIUM II.

157. Erit jam tempus, quo quilibet arcus curvæ AN deſcribetur, id eſt tAN = areæ ADN : $\frac{1}{2}$ AI. DR. Nam (§. 128.) eſt EF. tN*n* = N*n*; & D*q*. EF. tN*n* = Dq. N*n* = 2. trianguli ND*n*, atqui (§. 155.)

D*q*.

$Dq.EF = AI.DR$, ergo $AI.DR.tNn = 2$ trian. NDn atque adeo $\int AI.DR.tNn = AI.DR.tAN = 2\int NDn = 2$. areæ ADN, hinc tAN $=$ areæ $ADN : \frac{1}{2} AI.DR$. Atque hinc liquet tempora quibus diverſi arcus AN, An deſcribuntur, areis homologis AND, $ANnD$ proportionalia eſſe; prout Illuſtris Newtonus id primus demonſtravit Prop. I. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* ſed ex diverſiſſimo fundamento.

Scholion.

158. Elegans eſt formula corollarii ~~ſecundi~~, quod valorem ſolicitationis centralis in qualibet curva exhibeat quantitatibus finitis expreſſum; ſed quia valor radii evolutæ eandem ingreditur, id efficit, ut nonnunquam paulo prolixior evadat calculus. Propterea mallem in praxi ſequi canonem $g = dp : p^3dz$, in quo g ſignificat gravitatem ſeu ſolicitationem centralem, p. perpendicularem ex centro ſolicitationum ad tangentem curvæ in dato puncto demiſſam, & z radium rectorem, ſeu diſtantiam puncti curvæ, in quo ſolicitationis centralis quantitas quæritur à centro. Demonſtratio ejus facilis eſt, etenim ponendo rectangulum $AI.DR = 1$, fiet etiam $FE.Dq = 1$, id eſt vocando inſuper FE, u, cum Dq jam dicta ſit p, erit $pu = 1$ & $ppuu = 1$, vel $uu = 1 : pp$, atque adeò $udu = -dp : p^3$. Jam quia momentum celeritatis æquatur momento ſolicitationis centralis $-gdz$ (pono autem $-dz$, quia creſcente u decreſcit p, & per conſequens z, atque adeò ipſi $+du$ homologa dz debet habere ſignum privativum) hinc $-gdz = -dp : p^3$, & $g = dp : p^3dz$.

primi

159. Uſus hujus formulæ ſatis expeditus eſt; nam ex æquatione curvæ datæ quæritur valor ipſius p in z & conſtantibus; cujusmodi determinatione etiam opus eſt in formula ſupra laudata. Exempli gratia in hyperbola & ellipſi reperitur ſequens æquatio $pp = ccz : 2a \pm z$, ubi a denotat ſemilatus transverſum, b diſtantiam centri ſectionis ab alterutro foco, & $cc = bb - aa$ in hyperbola, & $cc = aa - bb$ in ellipſi. In denominatore fractionis ſuperius ſignum hyperbolam, ellipſin vero inferius reſpicit. Igitur $1 : pp = (2a \pm z) : ccz = 2a : ccz, \pm 1 : cc$, & differentiando, erit $-2dp : p^3 = -2adz : cczz$, & $g = 2dp : 2p^3dz = a : cczz$; vel omiſſa data $a : cc$, erit g ut $1 : zz$; hoc eſt ſolicitatio centralis, ad focum ſectionum Conicarum directa, eſt ubique ut quadratum diſtantiæ mobilis à foco inverſe, quod jam paſſim conſtat ex aliis.

160. Porro ſi elementum curvæ Nn dicatur ds, arculus pn, dt, reli-

reliquis manentibus, ut ſupra, (§. 158) Triangula ſimilia Nnp & NDq ſuppeditant $p = zdt : ds$, atque adeò $g = dp : p^3dz = (ds^2dtdz + zds^2ddt - zdsdtdds) : z^3dt^3$. Quæ formula non, niſi in nominibus, differt à formulis Varignónianis, quales in Commentariis Academiæ Regiæ Pariſ. Scientiarum 1701. & 1706. habentur, in quibus non magis quam in præſenti ullum differentialium dt, dz, ds conſtans aſſumtum eſt, ſed omnia variabilia.

161. Eadem facilitate habetur, aut ſaltem invenitur inſiſtendo principiis ſupra poſitis, formula admodum expedita & generalis pro radiis evolutarum. Nam triangula NZm & qhr, quæ ſupra (§. 155.) ſimilia eſſe oſtenſa ſunt, præbent hq vel Nq : qr = NZ : Nm, & triangula ſimilia Nnp, ac NqD hanc alteram analogiam ND : Nq = Nm : Np, ergo ex æquo ND : qr = NZ : Np, atque adeò NZ = ND. Np : qr, id eſt in ſymbolis ſupra aſſumtis, & vocando inſuper NZ, r; erit $r = zdz : dp$, nam qr in figura eſt dp in hiſce ſymbolis; unde cum p ſit $= zdt : ds$, invenietur $r = zdz : dp = zdzds^2 : dsdtdz + zdsddt - zdtdds$ formula generalis radii oſculatoris, in qua nullum differentiale conſtans aſſumtum eſt, quæ proinde in infinitas alias facile transformari poteſt. Atque deleto membro in denominatore $dsdtdz$, habebitur $r = ds^2dz : dsddt - dtdds$ formula itidem generalis pro curvis quarum ordinatæ parallelæ axique perpendiculares ſunt, in quibus dt ſunt elementa abſciſſarum.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA.

162. *Datis ſcala ſolicitationum centralium* GBb, *celeritate* AI, *&*
Fig. 37. *directione jactus* AR, *definire & conſtruere curvam, quam miſſile in vacuo deſcribet, conceſſis figurarum quadraturis.*

I. Centro D intervalloque arbitrario DP deſcribatur circulus PO, radios DN, Dn ſecans in punctis O, o; aſſumaturque Q quarta proportionalis ad DN, DR, & AI, ita ut DN. Q (= DR. AI) = EF. Dq, hoc eſt DN : Dq = EF : Q, & $DN^2 : Dq^2 = EF^2 : QQ$; ut dividendo habeatur $Nq^2 : Dq^2 = EF^2 - QQ : QQ$, atque adeò N$q$: Dq = $\sqrt{(EF^2 - QQ)}$: Q, ſed Nq : Dq ſicut radius ad tangentem anguli DNq, quæ tangens dicatur T, & radius DP vel DO, hinc $\sqrt{(EF^2 - QQ)}$: Q = DP : T atque adeò T = Q. DP : $\sqrt{(EF^2 - QQ)}$.

II. Propter arcus ſimiles np & Oo, eſt Oo : pn = DP : DN, & pn : Np = T : DP, ergo ex æquo Oo : Np = T : DN, hinc Oo = T. Np:

Np : DN (num. 1.) = Q. DP. Np : DN $\sqrt{}$(EF² − QQ), ergo PO = ∫DP. Q. Np : DN $\sqrt{}$(EF² − QQ). Hoc eſt, ſi intelligatur aliqua curva, cujus abſciſſa DN, ordinata DP². Q : DN $\sqrt{}$(EF² − QQ) area, hujus curvæ ordinatis abſciſſarum DA & DE interjecta ad datam lineam DP applicata præbebit lineam, cui ſi æqualis ubique factus fuerit arcus PO, recta DON per hujus arcus terminum O ducta æqualis abſciſſæ DE ſua extremitate N in curva quæſita erit. Jam quia quadratum ordinatæ EF æquatur duplo areæ GBEH datæ per abſciſſam DE vel DN & conſtantes, ſi non algebraicè, ſaltem tranſcendenter, atque Q eſt quarta proportionalis ad DE vel DN, & datas DR, AI, ea pariter data erit in DE & conſtantibus, unde cum omnes quantitates, quæ ipſam DP². Q : DN $\sqrt{}$(EF² − QQ) ordinatam ſcilicet figuræ quadrandæ ingrediuntur, dentur in DN & conſtantibus, & figurarum quadraturæ conceſſæ ſint; factum eſſe liquet, quod erat faciendum.

Corollarium.

163. Si nunc dicantur DR, b; AI, c; DE vel DN, z, velocitas in curvæ puncto N, ſeu FE, u; arcus circuli PO, θ; ejus radius DP, r; at elementum arcus creſcens OO, $+d\theta$, elementum verò decreſcens Np, indeterminatæ ND, $-dz$. Adeoque $Q = cb : z$ & tota formula Oo = Q. DP. Np : DN $\sqrt{}$(EF² − QQ) mutabitur factis debitis ſubſtitutionibus in $d\theta = -bcrdz : z\sqrt{(uuzz - bbcc)}$, quæ eſt æquatio differentialis curvæ quæſitæ ANn.

Scholion.

164. Hoc problema primùm ſolutionem accepit à Cel. Newtono Prop. 41. Lib. Princ. Phil. Nat. Math. & poſtea à Perſpicaciſſimo Geometra Joh. Bernoulli gemino modo, tum etiam à Cl. Viro P. Varignon diverſis modis, quo etiam referri poſſet & noſtra ſolutio quam in Diario Veneto Tom. V. pag. 318. ſeq. exhibui cum nonnullis aliis, & Tom. VII. pag. 194. Præſens noſtra ſolutio à Newtoniana non differt, niſi in levibus nec eſſentialibus circumſtantiis, nam noſtra EF ſignificat latus quadratum areæ apud Newtonum ABFD bis ſumtæ, quam tamen ille ſemel tantum accipit, ejusque Q nobis eſt rectangulum ſub datis DR & AI in noſtra figura, Q verò nobis eſt idem quod illi Q : A ſeu Z.

Cæterum, quia generalis hæc ſolutio quadraturas præſupponit earum etiam curvarum, quæ quadrabiles non ſunt, ideo problema iſtud generaliter ſumtum eſt transcendens, nec algebraicum fit, niſi pro certis legibus ſolicitationum centralium. Quænam vero debeant eſſe in genere hæ leges gravitatis variabilis, ut illis poſitis curvæ projectorum algebraicæ evadant, problema eſt ſatis curioſum & elegans, ſed prima fronte admodum difficile, de quo, quod ſciam, nemo adhuc cogitavit. Quomodo verò debeat expediri, id in ſequenti apparebit propoſitione, poſt lemma mox afferendum.

PROPOSITIO XXIV. LEMMA.

165. *Elementum* Ss *tangentis* LS *arcus circularis* LM *eſt ad elementum hujus arcus* Mm, *ut* AS^2 *quadratum ſecantis ad* AM^2 *quadratum radii, vel etiam, ut* AL^2 *quadratum radii, ad* AG^2 *quadratum ſinus complementi arcus* LM.

Fig. 38.

Nam, quia triangula SA*s* & MA*m* communem angulum MA*m* continent, erit triangulum SA*s* ad triangulum MA*m*, ut rec-lum SA.*s*A ad rec-lum MA.*m*A, id eſt, ut quadratum SA ad quadratum MA. At quia trianguli SA*s* altitudo eſt AL, exiſtente baſi S*s*, & trianguli MA*m* baſin M*m* habentis altitudo eſt MA æqualis alteri AL, liquet triangulum SA*s* ſe habere ad triangulum MA*m*, ut baſis S*s* ad baſin M*m*, ergo etiam S*s* ad M*m* ut AS^2 ad AM^2, vel propter parallelas SL & MG, ſicut AL^2 ad AG^2. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM.

166. Idcirco, ſi dicantur radius AL, r, tangens LS, t; arcus LM, α, erit ſecans $AS = \sqrt{(rr + tt)}$, atque adeo $d\alpha = rrdt : rr + tt$. Et converſa hac æquatione in ſeriem, ſingula ſeriei membra erunt ſummabilia, adeò ut ſummatione eorum actu inſtituta habeatur expreſſio arcus circularis α, ſerie infinita tangente & radio expreſſa.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA.

167. *Invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis ſeu legis ſolicitationum centralium, pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expreſſum.*

Fig. 37, 38.

I. In figura 38. fiat AD æqualis AD in fig. 37, atque in fig. 38.

circa

circa axem DA deſcripta intelligatur curva quæcunque algebraica LHh: deſcriptoque ſuper ordinata ejus AL quadrante LMΘ circuli, ex quolibet hujus circumferentiæ puncto M agatur quædam MH parallela axi AD, curvæ LH alicubi occurrens in H ſubter ordinatam AL, per curvæ LH punctum H tangens HΔ ducta intelligatur axi occurrens in Δ, & ordinata HE axi AD perpendicularis, in qua, ordinata HE ad alteram axis partem protracta, ſumatur ubique EΛ = ſubtangenti EΔ, adeò ut puncta Λ futura ſint in quâdam curva ΛΞ, cujus ſubtangens ſit in ejus puncto Λ linea EΩ, ducta ſcilicet tangente ΛΩ. Quibus poſitis, ſi in altera figura (37.) angulus ADN ubique fuerit ad angulum MAL, ut unitas ad quemlibet numerum poſitivum & rationalem n, atque in figura 37. longitudo DN ſemper æqualis fuerit abſciſſæ DE in figura 38. manifeſtum, ſingula puncta N locatum iri in curva algebraica ANn; quandoquidem omnia hæc puncta algebraice definiri poſſunt, cum ſectio anguli in ratione numeri ad numerum omnino geometrice fieri poſſit. Jam, ſicut ex alia atque alia curva LH alia atque alia AN oritur, ita quælibet curva AN aliquam generatricem LH admittet, adeo ut hac curva conſiderata duntaxat in genere, abſque ulla attentione ad particularem aliquam ſpeciem, etiam ſuppeditare poſſit omnes poſſibiles curvas ANn. Idcirco, cum canon generalis quæritur, quo lex gravitatis variabilis in omnibus curvis algebraicis determinetur, res eò deducetur, ut inveniatur formula ſolicitationum centralium G pro hac curva generali AN, quatenus ea ex curva itidem generali & algebraica LH reſultat. In hac verò diſquiſitione ita porrò eſt procedendum.

II. Aſſumto ſcilicet in curva LH ejus elemento Hh, per punctum h agantur $h\lambda$ & hm rectis ΛH & HM æquidiſtantibus, ac ductis per puncta M, m ſecantibus AS, As; centro A & radio AX = DP in figura 37, deſcriptus ſit arculus Xx, quo fiet ut, quoniam (ſecundùm hypotheſin) ang. ADN : ang. MAL = 1 : n, etiam ODo: MAm vel XAx, hoc eſt arculus Oo ſit ad arculum Xx ſicut 1 ad n. Quibus poſitis ſic arguo.

III. Triangula ſimilia Hih & HEΔ præbent Ee (ih) : Gg (Hi) = EΔ : AG (EH), & triangula ſimilia AMG & M$m\mu$, dant Gg (Mμ) : Mm = GM : AL (AM) & Mm : Xx = AL (AM) : AX (DP), ac denique, num. 1. hujus Xx : Oo = n : 1, ergo ex æquo & per compoſitionem rationum, fiet Ee : Oo = n. EΔ. GM : AG. DP (vel quia ob triangulorum AGM & ALS ſimilitudinem GM : AG = LS : AL) = n.

$= n. E\Delta. SL : DP. AL$. Atqui (§. 162. n. 11.) erat etiam Ee (ibi Np): $Oo = DE : T$, ergo $n. E\Delta. SL : DP. AL = DE : T$, atque adeò fiet $T = DP. AL. DE : n. E\Delta. SL.$ (§. 162. n. 1.) $= Q. DP : \sqrt{(EF^2 - QQ)}$ atque adeo $\sqrt{(EF^2 - QQ)} = n. Q. E\Delta. SL : AL. DE$, ac denique $EF^2 = (nn. E\Delta^2. SL^2 + AL^2. DE^2). QQ : AL^2. DE^2$, vel quia $Q = DR. AI : DE$, & omittendo inſtar unitatis factum conſtans DR, AI, eſt $QQ = 1 : DE^2$, fiet etiam $EF^2 = nn. E\Delta^2. SL^2 : AL^2. DE^4 ; + 1 : DE^2$.

IV. Sumantur elementa ſingulorum membrorum hujus ultimæ æqualitatis, atque ſingulis elementis per 2 diviſis (bifariam ea dividi poſſe ex calculo ilico patet) proveniet $EF. af = (nn. E\Delta. SL^2. \Lambda\xi : AL^2. DE^4) + (nn. E\Delta^2. SL. Ss : AL^2. DE^4) + (2nn. E\Delta^2. SL^2. Ee : AL^2. DE^5) + (Ee : DE^3)$. Verum quia (§. 165.) $Ss : Mm = AL^2 : AG^2$, nec non $Mm : Gg = AL : MG$ ac denique $Gg : Ee = AG : E\Delta$, erit $SL. Ss = AL^4. Ee : AG^2. E\Delta$, triangulaque ſimilia $\Lambda\xi\lambda$, ac $\Lambda E\Omega$ ſuppeditant $E\Delta\,(\Lambda E). \Delta\xi = \Delta E^2. Ee : E\Omega$, quibus valoribus in ſuperiore æqualitate $EF. af = (nn. E\Delta. SL^2. \Lambda\xi : AL^2. DE^4) +$ &c. ſubſtitutis, proveniet $EF. af$ (§. 132.) $= BE. Ee = G. Ee = (nn. E\Delta^2. SL^2. Ee : E\Omega. AL^2. DE^4) + (nn. E\Delta. AL^2. Ee : AG^2. DE^4) + (2nn. E\Delta^2. SL^2. Ee : AL^2. DE^5) + (Ee : DE^3)$. In qua, ſi loco rationis $SL^2 : AL^2$ ſubſtituetur æqualis ratio $MG^2 : AG^2$, atque omnia ad Ee applicentur, erit BE ſeu $G = (nn. E\Delta^2. MG^2 : E\Omega. AG^2. DE^4) + (nn. E\Delta. AL^2 : AG^2. DE^4) + (2nn. E\Delta^2. MG^2 : AG^2. DE^5) + (1 : DE^3)$, formula generalis ſolicitationis centralis in puncto curvæ N, quæ rite ordinata reductis ſcilicet tribus primis fractionibus ad idem nomen, demum erit $G = \frac{1}{DE^3} + \frac{(DE. E\Delta. MG^2 + 2. E\Omega. E\Delta. MG^2 + DE. E\Omega. AL^2). nn. \Delta E}{E\Omega. AG^2. DE^5}$. In qua exiſtente curva LH algebraica, altera $\Delta\Xi$ algebraica erit, atque adeò omnes $E\Omega$, $E\Delta$, EH & GM algebraice dabuntur; hinc etiam, juxta dicta numero 1. hujus, altera curva AN algebraica ſit, neceſſe eſt; & quia cuilibet curvæ algebraicæ imaginabili AN aliqua LH reſpondet, & hæc LH omnes curvas generaliter repræſentat, quæ ex omnibus ANn reſultare queunt; ideò præcedens canon exhibet formulam generalem ſolicitationum centralium pro omnibus, quæ concipi poſſunt, curvis algebraicis ANn in infinitum. Quæ erat invenienda.

Corollarium I.

168. Si nunc præterea ponatur $1 : n = \mu : \nu$, ita ut μ & ν ſignificent quoslibet numeros integros & poſitivos, dicanturque tangens anguli MAL, T, ejus ſecans S, in fig. verò 37, coordinatæ DQ & QN, x & y reſpective, & $DN = z = \surd(xx + yy)$; quibus poſitis erit tangens anguli $ADN = ry : x$, & ſecans $= rz : x$, exiſtente radio $DP = r$. Eritque adeò per regulam generalem multiſectionis anguli vel arcus per ſecantes in Act. Erud. Lipſ. 1706. pag. 263. traditam, ſecans anguli $\nu.ADN = rz^\nu : (x^\nu - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 - 06\nu x^{\nu-6} y^6 + \&c.)$ & ſecans anguli $\mu.MAL = S^\mu : (r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.$ in quibus numeri ficti 02ν, 04ν, 06ν, &c. ſignificant, $\frac{\nu.\nu-1}{1.2.}$; $\frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3.\nu-4.\nu-5}{1.2.3.4.5.6}$ ſeu coëfficientes membrorum binomii ad poteſtatem ν ſublati, per ſaltum excerptas; & numeri 02μ, 04μ, 06μ, &c. ſignificant ordine, $\frac{\mu.\mu-1}{1.2}$; $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3.4}$; $\frac{\mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3.\mu-4.\mu-5}{1.2.3.4.5.6}$; &c. coëfficientes binomii cujusdam ad poteſtatem μ evecti, itidem per ſaltum excerptas.

Jam, quia (ſecundùm hypotheſin) ang. ADN eſt ad ang. MAL, ſicut 1 ad n ſeu μ ad ν, erit omninò multiplicando extrema & media $\mu.MAL = \nu.ADN$, ergo horum ſecantes æquales erunt. Propterea multiplicatione in crucem inſtituta, erit $S^\mu.(x^\nu - 02\nu x^{\nu-2} yy + 04\nu x^{\nu-4} y^4 + \&c.) = rz^\nu.(r^{\mu-1} - 02\mu r^{\mu-3} T^2 + 04\mu r^{\mu-5} T^4 - 06\mu r^{\mu-7} T^6 + \&c.)$ generalis æquatio curvarum algebraicarum AN, nam exiſtentibus μ & ν numeris integris & poſitivis, hæ ſeries indefinitæ ſemper abrumpentes erunt, atque adeo finito terminorum numero conſtabunt.

Corollarium II.

169. Si in Canone articuli 167. loco ordinatæ EH ponatur $..e...A$, quælibet quantitas compoſita ex data ſeu conſtante e, & variabile A, data tamen utlibet in z, & quantitatibus conſtantibus, adeo ut A, infinitas numero diverſas quantitates ex z & datis quomodocunque compoſitas, immò omnes, quæ cogitari poſſint ſignificet. Puncta quantitatibus præfixa omnem poſſibilem ſignorum + & − ad quantitates illas reſpicientium variationem denotant, adeò Fig. 38.

 ut

ut per quantitates punctis invicem adjunctas non ſolum ſumma quantitatum; ſed etiam differentia earundem intelligenda ſit in genere, hoc eſt differentia ipſarum, ſive e excedat alteram A, ſive ab eadem deficiat. Data ordinata EH, in quantitatibus algebraicis, facile invenietur ſubtangens EΔ curvæ LH, ſeu ordinata ΔE alterius curvæ ΔΞ, cujus ſubtangens EΩ etiam habebitur in quantitatibus algebraicis. Idcirco ſubſtitutis valoribus ſubtangentium EΔ, EΩ, ordinatæ EH vel æqualis AG, tum etiam rectæ GM, quæ ex altera AG & data AL facile reperitur, in canone ſupra citato & habebitur generalis formula ſolicitationum centralium in omnibus curvis algebraicis. Ponendo igitur elementum ipſius A ſeu dA eſſe Bdz, & elementum dB quantitatis B eſſe cdz, exiſtente DE $=$ z, item AL $= r$, & $rr - ee = ss$. Si calculus recte initus fuerit, reperietur pro ſolicitatione centrali G in quolibet curvæ AN puncto N,

$$G = \frac{1}{z^3} + \frac{(2ssB + ssCz \mp eB^2z \pm 4eAB \pm 2eACz + AB^5z - 2A^2B - A^2Cz).\,nn}{B^3z^5}.$$

Quam late pateat uſus hujus formulæ exinde poteſt colligi, quod, præterquam quod quantitas A omnem quantitatem per z & conſtantes datam deſignet, numerus n omnes numeros rationales atque poſitivos integros & fractos ſignificet.

Scholium.

170. Ut appareat uſus inſignis noſtræ formulæ, exemplo cuidam particulari eandem applicare libet. Sic ſi fuerit $A = z^m : a^{m-1}$ ubi m ſignificet quemlibet numerum rationalem, fractus ne ſit an integer nil refert, eritque $B = mz^{m-1} : a^{m-1}$, & $C (= mm - m)\, z^{m-2} : a^{m-1}$. Qui valores, in formula ſuperioris Corollarii ſubſtituti, dabunt formulam quæ etſi particularis eſt alterius reſpectu, ex qua deducta eſt, infinitas tamen diverſas curvas algebraicas ſuppeditare poteſt, immò infinities infinitas. Formula autem ipſa erit talis quæ ſequitur

$$G = \frac{mm - nn}{mmz^3} \pm \frac{\overline{m \pm 2}.\,nnea^{m-1}}{mmz^{m+3}} + \frac{\overline{m+1}.\,nnssa^{2m-2}}{mmz^{m+3}}.$$

Hinc 1°. Si $m = -1$, & $n = 1$, erit $G = \pm e : aazz$, atque adeò ſolicitatio gravitatis ubique in reciproca duplicata ratione diſtantiæ mobilis à centro D. Videamus quænam curva ex iſta hypotheſi debeat reſultare. In corollario primo fecimus $1 : n = \mu : \nu$, unde cum hoc caſu ſit $n = 1$, erit etiam $\mu = \nu = 1$, unde ſi valores

Fig. 37.

hosce

hosce in æquatione generali §. 168. circa finem, ſubſtituas, evaneſcent omnes coëfficientes $o2\mu$, $o4\mu$, &c. & omnes $o2\nu$, $o4\nu$, $o6\nu$, &c. adeò ut hoc caſu curvæ æquatio ſit $Sx = rz$. Jam quia A ($= z^m : a^{m-1}$) hoc caſu eſt $= aa : z$, atque adeò in fig. 38, ordinata EH, quæ aſſumenda eſt æqualis differentiæ quantitatum e & A, non ſummæ, quia in ambiguo ſigno ſuperius in formula retinuimus quod indicat talem differentiam, atque inferius ſummam; ordinata inquam EH hoc caſu erit $= \pm e \mp A = \pm e \mp \frac{aa}{z} = (\pm ez \mp aa) : z$, atqui S, ſeu ſecans anguli MAL, eſt tertia proportionalis ad AG ſeu EH, & radium AM vel AL $= r$, ergo $S = rrz : \pm ez \mp aa$, adeoque æquatio $Sx = rz$, mutatur in $\frac{rrzx}{\pm ez \mp aa} = rz$, ex quâ elicitur $rx = \pm ez \mp aa$ vel potius $ez - aa = + rx$, aut $ez = aa \pm rx$, quæ eſt æquatio *Sectionum Conicarum*, in quibus abſciſſæ x ſumuntur ſurſum & deorſum à foco. Ergo in hac hypotheſi centrum virium, ſeu ſolicitationum gravitatis, ſunt umbilici ſectionum conicarum, quod jam omnibus conſtat egregie conſpirare cum iis, quæ demonſtrata ſunt ab Illuſtr. Newtono, Leibnitio, Varignonio & aliis, circa vires, quas vocant centripetas in ſectionibus conicis methodis directis.

2°. Sit $m = -2$, & $n = 2$, atque e major quam r, ita ut $ss = rr - ee$ ſit quantitas negativa, erit $G = -ssz : a^6$, atque adeò ſolicitationes erunt ut diſtantiæ à centro. Æquatio curvæ pro hac hypotheſi ſic indagabitur. Quoniam $n = 2$, & $1 : n = \mu : \nu$ erit $\nu = 2\mu$, atque adeò æquatio generalis (§. 168.) huic caſui applicata mutabitur in hanc ſequentem $Sxx - Syy = rzz$. ſeu, quia A ($= z^m : a^{m-1}$) hoc caſu eſt $= a^3 : zz$, & $S = rr : e - A = rrzz : ezz - a^3$, fiet $(rrxxzz - rryyzz : ezz - a^3 = rzz$, atque adeò $rxx - ryy = ezz - a^3 = exx + eyy - a^3$; hinc $a^3 + \overline{r - e}.xx = \overline{e + r}.yy$. Jam quia e (ſecundum hypotheſin) major eſt quam r, quantitas $r - e$ erit negativa, atque adeò æquatio erit ad ellipſin, cujus axis transverſus eſt ad conjugatum ſicut $\sqrt{(e+r)}$ ad $\sqrt{(e-r)}$; & in qua abſciſſæ x originem in centro habent. Idcirco ſolicitationes gravitatis, quæ in ellipſi ſunt ut diſtantiæ à centro ſolicitationum, diriguntur ad centrum ellipſeos, quod iterum ex demonſtratis Newtonianis conſtat verum eſſe; nam ſi, ut Excell. hic Autor, & poſtea Cl. Varignon fecerunt, quæratur qualem gravitates mobilis, perimetrum ellipſeos circumeuntis, legem ſequi debeant, ſi earum directiones in centro ellipſeos concurrant, re-

pe-

perietur ejusmodi ſolicitationes diſtantiis mobilis à centro ellipſeos proportionales eſſe. Sin verò r major ſit quam e, inventa noſtra æquatio erit ad hyperbolam, & ſolicitatio centralis erit negativa atque adeò centrifuga.

3°. Si $m = 1 = n = \mu = \nu$, & $e = 0$, erit $G = 2ss : z^5$. Atque æquatio generalis (§. 168.) mutabitur in hanc particularem $Sx = rz$, in qua erit $S = rr : z$, hinc $rrx : z = rz$, vel $rx = zz = xx + yy$. Ergo hoc caſu centrum ſolicitationum eſt in circumferentia circuli, curvaque quæſita ipſa circuli circumferentia, quod à poſteriori hactenus laudati viri Newtonus atque Varignonius oſtenderunt. Vid. Lib. I. *Pr. Phil. Nat. Math.* Prop. VI. & Comm. Acad. Reg. Sc. Par. 1700. die 31. Martii art. XI.

4°. Generaliter, ſi G ſit ut z^p, ubi p eſt quilibet numerus rationalis poſitivus vel negativus, excepto ſolo -1, curva ſemper algebraica haberi poteſt tali ſolicitationum centralium legi ſatisfaciens, in qua tamen vel e aut s evaneſcunt ſeu nihil ſunt, alioqui nullæ curvæ algebraicæ talibus hypotheſibus inveniri poſſent ſatisfacientes, exceptis caſibus ipſius p ſignificantis numeros 1 & -2, quibus ſectiones conicas convenire in præcedentibus exemplis oſtenſum. Si $p = 0$, reperietur curvæ ANn æquatio $x^3 - 3xyy + z^3 = \frac{2a^5}{rr}$, in cujus curvæ ſingulis punctis ſolicitatio centralis conſtans quidem ſed negativa eſt, mobile à centro repellens. Sin verò ponatur in formula §. 170, $m = -1$, & $e = 0$, fiet G ut $\frac{1 - nn}{z^3}$, hoc eſt reciproce, ut cubus diſtantiæ mobilis à centro ſolicitationum, & huic caſui infinitæ conveniunt curvæ, infinitæ ſcilicet geometricæ infinitiesque infinitæ Mechanicæ ſeu transcendentes, prorſus ut à Cel. Joh. Bernoullio animadverſum in Act. Lipſ. 1713. Menſ. Mart. p. 129, ubi infinitas exhibet diverſas ſpiralium ſpecies, quarum unæ continent curvas algebraicas, aliæ vero transcendentes. Nam quia (ſecundùm hypotheſin) $m = -1$, erit $A (= z^m : a^{m-1}) = aa : z$, ideoque curva LH erit hoc caſu hyperbola inter aſymptotas per centrum ſolicitationum, vel potius per punctum D ad angulos
Fig. 38. rectos ductas; ita ut una earum exiſtente DA altera ſit ipſi AL parallela. Adeoque cum ſecans AS ſit tertia proportionalis ad AG, vel EH $= aa : z$, & radium AL, erit AS $= rrz : aa = z$ ſi AL ſit $= a$. Unde ſi in fig. 37. fiat angulus ADN ad angulum MAL (§. 167.) ſicut 1 ad n, atque in recta Dp ſumatur ubique DN æqualis ſecanti

canti AS, punctum N erit in curva quæſita ANn, quæ proinde erit algebraica quoties n numerus fuerit rationalis & affirmativus, atque talis conſtructio coincideret fere cum eâ quam Celeb. Newtonus dedit in Corollario 6. poſt Prop. 44. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* Imò etiam cum Bernoulliana, quæ habetur loco ſupra citato, quanquam ejusmodi curvæ apud Acutiſſimum Virum aliter poſitæ ſint, quam in Newtoniana vel noſtra conſtructione. Nam ducta in figura 37. linea Dd axi DA normali, ſi jam ubique fiat angulus dDN ad angulum ΘAM, ſicut 1 ad n, atque ut antea, in recta Dp ſumatur DN æqualis ipſi DS, punctum N etiam nunc erit in curva optata, quæ aſymptotam habebit ipſi Dd parallelam, cujus ab hac Dd diſtantia erit ad DP, ut 1 ad n: curva verò per punctum A non tranſibit; in altera vero conſtructione noſtra curva tranſit per A, atque aſymptotam habebit per D transeuntem, facientem cum DA angulum, qui ſe habet ad angulum rectum, ut 1 ad n. Et quidem hæc pauca exempla ad illuſtrationem formulæ ab initio hujus articuli allatæ adduxiſſe ſufficiat; ex quibus ſatis jam perſpicax Lector animadvertere poteſt, quam immenſi pene uſus ſit generalis ſolutio problematis articulo 167. propoſiti & ſoluti, quandoquidem ſola formula particularis articuli 170. paulo ante memorata juſto tractatui conſcribendo abundantem materiam ſubminiſtrare poſſet.

CAPUT III.

De Motu Iſochrono corporum in curvis deſcendentium juxta quamlibet gravitatis variabilis hypotheſin, atque gravium directionibus etiam in centro gravium convergentibus; & de Motu Pendulorum

DEFINITIO.

Cum corpus grave motu ſuo ex quiete arcus quoscunque inæquales alicujus curvæ, ſed terminatos tamen omnes ad infimum curvæ punctum eodem vel æquali tempore, perlabitur, talis linea curva *Iſochrona* dici ſolet. Ut ſi grave A, ex quolibet curvæ BFA puncto B, F, E &c. à quiete deſcenſum incipiens motu ſuo quomodocunque accelerato, eodem ſeu pari tempore arcus utlibet inæ- Fig. 40.

quales

quales BeA, FeA, EXA, ſed terminatos omnes ad infimum curvæ punctum A, abſolvat; curva hæc BEA Iſochrona vocabitur.

PROPOSITIO XXVI. Lemma.

171. *In quolibet triangulo rectilineo, cujus baſis à linea intra triangulum ex angulo baſi oppoſito ducta, pro libitu in duo quæcunque ſegmenta dividitur, ſolida quæ fiunt ex quadratis laterum in alterna baſeos ſegmenta ſimul ſumpta æquantur duobus ſolidis, quorum unum fit ex quadrato lineæ baſin dividentis in hanc baſin, alterum ex rectangulo*
Fig. 39. *ſegmentorum baſis in totam pariter baſin.*

Sit triangulum quodvis ABC, cujus baſis BC dividatur in D à recta AD pro libitu intra triangulum ducta. Probari debet eſſe $AB^2.DC + AC^2.BD = AD^2.BC + BD.DC.BC$.

Demonſt. I. Deſcripto circa triangulum circulo ABE, producatur AD in E, & jungantur BE, CE, & triangula ſimilia BAD ac ECD præbent analogiam $AB : AD = EC : DC$ atque adeò $AD.EC = AB.DC$. Atque à triangulorum ACD, BED ſimilitudine elicitur $AC : AD = BE : BD$, & rec-lum AD.BE æquale rec-lo AC.BD.

II. In quadrilatero ABEC circulo inſcripto, eſt $AB.EC + AC.BE = AE.BC = AD.BC + DE.BC$. Vel aſcita communi altitudine AD, fiet $AB.EC.AD + AC.BE.AD = AD^2.BC + AD.DE.BC$. Adeoque ſubrogando loco rectangulorum EC.AD & BE.AD hæc rec-la AB.DC & AC.BD quæ illis (num. 1) æqualia oſtenſa ſunt, & loco rectanguli AD.DE æquale rec-lum BD.DC; erit $AB^2.DC + AC^2.BD = AD^2.BC + BD.DC.BC$. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII. Theorema.

Fig. 40. 172. *Si gravium directiones convergant in centro* O, *atque circa axem* OC *deſcriptæ ſint tres curvæ, ſcilicet ſcala ſolicitationum gravitatis variabilis* cha, *deinde curva* ARD, *cujus quælibet ordinata* HR *poſſit duplum homologæ areæ* AHha *in ſcala gravitatis, ac denique tertia curva* AEB, *cujus arcus quilibet* AXE, *à circulo* HE *radio* OH *deſcripto, terminatus ſit ad homologam ordinatam* HR *in curva* ARQ, *ut aliquis datus numerus* N, *ad unitatem, erit hæc tertia curva* BEA, iſochrona.

Pona-

Ponatur grave delapſum eſſe per arcum curvæ BEA motum à quiete in B incipiendo; atque Ee elementum eſſe curvæ AE, per cujus terminum e deſcriptus centro O arcus eV axi occurrat in V, per quod punctum ducatur ordinata Vr in curva ARD; atque ſuper hujus curvæ baſi CD deſcripto quadrante circuli CDIK, per puncta R, r agantur RI, & ri circulo occurrentes in I, i, ejusque radio DP in punctis P, p, ductaque per I lineola Io parallela CD, jungantur denique CI, Ci. Quibus poſitis

I. Quia (ſecundùm hypotheſin) $CD^2 = 2.ACchaA$, & $HR^2 = 2.AHhaA$, erit $CD^2 - HR^2$, hoc eſt $CD^2 - CP^2$, vel $CI^2 - CP^2$, id eſt $IP^2 = 2.CHhgc = 2.ACchaA - 2.AHhaA$, ergo $IP = \surd(2.CHhgc)$ Item quia (ſecundum hypotheſin) $AE : HR = N : 1$, erit $AE = N.HR$, adeoque $Ee = N.\rho R = N.Pp = N.Io$.

II. Supra (§. 136.) oſtenſum, eandem vel æqualem acquirere celeritatem duo mobilia pondere & maſſa æqualia in duobus punctis E, H centro O æquidiſtantibus; ſi ex punctis pariter æque altis B, C unum in curva BEA alterumque in recta CA à quiete moveri cœperint, atque ſpatia BE & CH deſcripſerint. Et vocando corporis A maſſam per hanc eandem literam A, celeritas acquiſita in H ex deſcenſu per CH, vel in E ex deſcenſu per BE (§. 144.) erit $\surd(2.CHhc) : \surd A$, ſeu (num. 1 hujus) $= IP : \surd A$. Unde, quia (num. 1) $Ee = N.Io$ atque ſpatiolum Ee applicatum ad velocitatem qua percurritur, denotat tempus quo abſolvitur ſeu tEe, erit propterea $tEe = N.Io.\surd(A) : IP$. Atqui propter triangula ſimilia CIP, & I*io*, ratio Io ad IP æqualis eſt rationi $Ii : CI$, hoc eſt (§. 129.) angulo ICi; idcirco $tEe = N.\surd A.$ ang. ICi: ergo omn. tEe, hoc eſt, $tBE = N.\surd A.$ omn. ICi ſeu ICD, atque adeo $tBE = N.\surd A.$ ang. ICD. & $tBEA = N.\surd A.$ ang. KCD.

III. Si jam mobile non amplius in B, ſed in alio quocunque curvæ puncto F deſcenſum incipiat; centro O per hoc punctum F ducatur circulus FG & per G ordinata GQ curvæ ARD occurrens in puncto Q, per quod agatur QN axi AC parallela ac denique radio CN deſcripto quadrante MLN, jungatur LC; atque hisce poſitis eodem quo in antecedente numero, conficitur argumento exiſtere $tFE = N.\surd A.$ ang. LCN. Cogitatione tua abſcinde vel aufer totum ſpatium, quod eſt inter lineas mixtas BCD & FGQ, ac quadrantem MCN admove pariter ordinatæ GQ, & hac ratione hunc caſum, quo mobile ex F deſcendere incipit, reducis præciſe ad caſum præcedentem; cum AEF nunc ſpectetur velut integra

 cur-

curva, ex cujus principio F proficiſcatur mobile & analogæ curvæ ARQ baſis GQ quadrantem habet ſibi inſiſtentem, quemadmodum baſis CD ſuum quadrantem KID, idcirco tempus per FE, hoc eſt $tFE = N.\sqrt{A}$. ang. LCN, atque adeo $tFEA = N.\sqrt{A}$. ang. MCN. Eſt ergo tBEA ad tFEA, ut $N.\sqrt{A}$. ang. KCD ad $N.\sqrt{A}$. ang. MCN hoc eſt, ſicut angulus rectus KCD ad angulum rectum MCN, atque adeo in ratione æqualitatis; ergo æquali tempore omnes arcus BA, FA, XA &c. percurrentur, atque adeò curva propoſitionis noſtræ BEA eſt iſochrona. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

173. Si ΘA fuerit radius oſculi ſeu curvaturæ iſochronæ in vertice A, erit generaliter $N = \sqrt{(\Theta A . OA : \Theta O . Aa)}$. Sumto enim arculo AX indefinite parvo vertici contiguo, ductisque ex centro O arculo XY, & per Y ordinata Yy curvam AR ſecante in z. Jam quia (ſecundùm hypotheſin) $AX = N . YZ$, vel $AX^2 = NN . YZ^2$ (ſecundùm hypotheſin) = NN. dupl. areæ $AYya = 2NN . AY . Aa$; & quia AY eſt aggregatum ſinuum verſorum arculorum AX & XY inſtar æqualium accipiendorum, quorum centra ſunt Θ & O, fiet $AY = \frac{AX^2}{2\Theta A} + \frac{AX^2 (XY^2)}{2OA}$, atque adeò $2AY = AX^2 . \Theta O : \Theta A . OA$, ac proinde ſubſtitutione facta, proveniet $AX^2 = NN . AX^2 . \Theta O . Aa : \Theta A . OA$, ex qua facile elicitur $NN = \Theta A . OA : \Theta O . Aa$, & $N = \sqrt{(\Theta A . OA : \Theta O . Aa)}$.

Corollarium II.

174. Si jam minimus iſochronæ arculus XA vertici A adjacens conſideretur inſtar arcus circularis radii ΘA à pondere A filo ΘA appenſo deſcripti; erit tempus, quo arculus XA vel tota curva BEA deſcribi poteſt, ſemiſſis unius oſcillationis penduli ΘA. Unde, quia (§. 172.) $tXA = N . \sqrt{A}$. ang. rectum, erit 4tXA, ſeu duratio duarum penduli cujusque oſcillationum minimarum, quod deinceps dicatur T, erit inquam $T = N . \sqrt{A}$. 4 rectos ſeu nominando peripheriam p, cujus radius 1 erit $T = pN . \sqrt{A}$, vel ſubſtituendo valorem ipſius N articulo præcedenti definitum, reperietur $T = p\sqrt{(A . \Theta A . AO : \Theta O . Aa)}$. Qui eſt canon valde generalis, in quo ΘA ſignificat longitudinem penduli, AO ponderis minimam diſtantiam à centro

tro gravium O, ΘO diſtantiam puncti ſuſpenſionis Θ ab eodem centro O, Aa pondus corporis oſcillantis A in infimo loco poſiti, & T tempus duarum penduli ΘA vibrationum minimarum. Hæc determinatio probe conſentit cum aſſertionibus paulo ſpecialioribus Newtoni Prop. 52. *Lib. I. Pr. Ph. Nat.*

Corollarium III.

175. Si centrum O ſit infinite diſtans à puncto Θ, æquabuntur ipſæ ΘO & AO, atque formula præcedentis corollarii mutabitur in ſequentem $T = p\sqrt{(A.\Theta A : Aa)}$. Hinc 1°. tempora oſcillationum diverſorum pendulorum ſunt in compoſita ratione ex ſubduplicata maſſarum & longitudinis pendulorum directe & ſubduplicata itidem ſed inverſa ponderum. 2°. Tempora oſcillationum pendulorum æqualium ſunt in compoſita ratione ex ſubduplicata directa ratione maſſæ corporum & ſubduplicata inverſa ratione ponderum. 3°. Si ſolicitationes, quibus pendula agitantur, id eſt pondera corporum longitudini pendulorum proportionalia ſint, tempora oſcillationum erunt in ſubduplicata ratione maſſarum corporum agitatorum, & hæc tempora erunt æqualia, ſi, iisdem poſitis, maſſæ inſuper corporum ponderibus proportionales fuerint. 4°. Maſſæ vero, ſeu materiæ quantitates, erunt in compoſita ratione ex ponderum ratione pendulis æqualis longitudinis appenſorum, & ex duplicata ratione temporis oſcillationum. Atque hoc ipſum eſt Prop. 27. *Lib. II. Pr. Ph. Nat.* qua uſus eſt Cl. Vir ad explorandum utrum pondera corporum ipſorum maſſis proportionalia ſint, nec ne; ac reperit hic Author experimentis, accuratiſſime pendulorum ope ſumtis, pondera corporum maſſis conſtanter proportionata eſſe. Sed hoc loco ſermo eſt de ponderibus abſolutis corporum; non vero de relativis, qualia habent cum fluidis diverſis demerſa ſunt; hoc enim caſu pondus portionis cujusdam fluidi volumine æqualis corpori demerſo à pondere abſoluto hujus corporis debet auferri, ut habeatur ejus pondus relativum, quod intra fluidum, cui immerſum eſt, habet.

Corollarium IV.

176. Cum multitudines oſcillationum æqualibus temporibus à diverſis pendulis abſolvendarum ſint in contraria ratione temporum, quo unumquodque pendulum unam oſcillationem peragit, multi-

tudines oſcillationum æqualibus temporibus peractarum erunt proinde in compoſita ratione ex ratione ſubduplicata directa ponderum & ſubduplicatis rationibus inverſis maſſarum & longitudinum pendulorum. Aut, ſi pondera maſſis proportionalia ſint, ut tuto id aſſumi poteſt; erunt prædictæ oſcillationum multitudines, ut radices ex lineis, quæ pondera ſeu vires gravitatis exponunt, quibus pendula agitantur, applicatis ad pendulorum longitudines. Atque adeò, 1°. pendulorum inæqualium, ſed eadem gravitatis ſolicitatione agitatorum, vibrationes eodem tempore abſolvendæ ſunt in reciproca ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum. 2°. Numerus oſcillationum unius penduli erit ad numerum oſcillationum eodem tempore peractarum in alio pendulo ejuſdem longitudinis cum primo, in ſubduplicata ratione ſolicitationis gravitatis, qua primum ad ſolicitationem gravitatis, qua alterum pendulum primo quoad longitudinem æquale agitatur. Atque hoc poſterius ad amuſſim convenit cum regula quam Bernoullius in elegantiſſimo ſuo ſchediaſmate Act. Lipſ. 1713. M. Februario inſerto, tradit paragrapho 16, ex qua deinceps gravitates ſpecificas eruere docet ex pendulorum experimentis modo plane novo nec antea cognito.

Scholion.

177. Ex corollariis proxime antecedentibus ſatis elucere exiſtimo, quantæ utilitatis ſit theorema noſtrum generale iſochroniſmi corporum in curvis, aſſignata lege deſcriptis, deſcendentium, cum ex ea omnia, quæ ad pendulorum motus ſpectant, tanta facilitate deducantur: interim oſcillationes pendulorum quam minimas conſiderare convenit propter rationes §. 174. indicatas, ſcilicet quia tum demum pendulum vel penduli pondus arculum iſochronæ, cujus tempus dimenſi ſumus, percurrere cenſetur, cum minimum arculum circularem ipſum deſcribit, quoniam, eo caſu, talis arculus circularis oſculatur arculum iſochronæ duplum ipſius XA ſeu arculum XAX; poſito arcu AX in curva BEA, ex altera axis AC parte conſtituta æquali arculo AX, & quia oſculari atque congruere in Geometria unum idemque ſignificant, ſaltem in ea parte, in qua oſculum contingit. Sin verò arculi AX non ſunt minimi, hæc tamen omnia adhuc ſubſiſtent, ſi pendula inter ſe collata vel eorum pondera curvas ſimiles deſcripſerint.

178. Ut igitur quæ in antecedentibus corollariis ſparſim dicta

ſunt

ſunt in compendium colligantur; nominentur numerus oſcillationum aliquo tempore peractarum à primo pendulo N, ejus longitudo L, quæ in ſchemate repræſentatur linea ΘA, corporis A gravitas abſoluta G, ejus maſſa M, adeoque M nunc ſignificat idem ac A, & G idem ac linea A*a* in ſchemate; atque retenta T pro deſignando tempore duarum oſcillationum minimarum hujus penduli. In ſecundo pendulo eædem res iisdem, ac in primo, literis; ſed minuſculis exprimantur, atque adeò corollarium 3. præbebit has regulas $T = p\sqrt{}(M.L:G)$ & $t = p\sqrt{}(m.l:g)$. Corollarium vero 4. exhibet $N:n = t:T$, vel $NT = nt$. Unde quot diverſis modis ſingulæ literæ T, G, L, M, N & homologæ *t*, *g*, *l*, *m*, *n* inter ſe conferri poſſunt, tot inde reſultabunt alia atque alia theoremata, à quibus omnibus ſigillatim recenſendis brevitatis gratia abſtineo. Hactenus iſochroniam tantum in genere conſideravimus nulli particulari hypotheſi gravitatis inhærentes. Quid verò ex una alterave ejusmodi hypotheſeon reſultare debeat, indagabimus in ſequentibus problematibus.

PROPOSITIO XXVIII. Problema.

179. *Invenire iſochronam in hypotheſi gravitatis uniformis atque directionum gravitatis inter ſe parallelarum ſeu in centro infinite diſtanti coeuntium.* Fig. 41.

Quoniam centrum ſolicitationum gravitatis O infinite diſtat à baſi CD curvæ ARD, lineæ BC, EH, quæ antea (§. 172.) erant arcus circulares centro O deſcripti, nunc fient rectæ inter ſe parallelæ & axi AC perpendiculares: & quia (ſecundùm hypotheſin) gravitas uniformis, ejus ſcala erit linea recta *cha* axi AC parallela, & quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah$, curva ARD hoc caſu parabola erit, cujus parameter 2Aa. At propter ΘO & AO æquales, fiet $N = \sqrt{}(\Theta A : Aa)$. Jam quia (§. 172.) $AE = N.HR = N.\sqrt{}(2Aa.AH) = \sqrt{}(2\Theta A.AH)$, erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{}(\frac{1}{2}\Theta A.AH)$, vel biſecta ΘA in C, erit $\frac{1}{2}AE = \sqrt{}(AC.AH)$, id eſt, ſuper diametro AC deſcripto ſemicirculo ASC, lineam EH ſecante in S, = ſubtenſæ AS, quandoquidem hæc media eſt geometrica inter diametrum AC & abſciſſam AH. Sic etiam $\frac{1}{2}Ae = As$, atque adeo $\frac{1}{2}Ee = AS - As$, id eſt demiſſa S*m* perpendiculari ſuper A*s* productam, = *sm*, adeoque $Ee = 2.sm$, in ſuppoſitione infinitæ parvitatis arculi E*e*, quo caſu *sm* eſt differentia ſeu exceſſus ſubtenſæ AS ſupra ſubtenſam mino-

rem

rem As. Verum quia ductis per puncta A & S tangentibus AT & ST occurrentibus in T, hæ tangentes erunt æquales, etiam *u*S æquabitur S*s*, atque adeò perpendicularis S*m* biſariam dividet baſim *su* trianguli iſoſcelis *s*S*u*, adeò ut *su* ſit $= 2sm$, atque adeo E$e = su$; idcirco quadrilaterum E*esu*, in quo latera oppoſita E*u* & *es* ſunt æquidiſtantia & reliqua oppoſita latera E*e*, *us* æqualia, erit parallelogrammum, atque adeò ES $-$ *es* $=$ *u*S $=$ S*s*, hinc (§. 87.) omnes differentiæ ES $-$ *es* ſeu exceſſus maximæ ES ſupra minimam, quæ in vertice A nulla eſt, hoc eſt ſola ES æquatur omnibus S*s* ſeu arcui circuli AS & ſic ubique, propterea Iſochrona quæſita BEA eſt *Cyclois* ordinaria, cujus ſemibaſis BC æquatur peripheriæ ſemicirculi ASC. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

180. Tempus deſcenſus per cycloidis arcum BE, erit ad tempus per axis partem æquealtam CH, ſicut arcus CS circuli generatoris interceptus inter parallelas BC & EH, ad ſubtenſam CS ejusdem arcus. Nam propter parabolam ARD & circulum ASC, eſt CI(CD) : CP(HR) $=$ CA : AS, atque adeò anguli ICP & CAS vel CSH æquales ſunt, adeò ut SC & CI in directum jaceant. Jam quia (§. 172. n. 11.) tBE $=$ N. ang. ICD erit etiam tBE $=$ N. ang. SAC, atqui (§. 129.) angulus SAC $= \frac{1}{2}$ arc. SC : $\frac{1}{2}$ CA $=$ arc. CS : CA, ergo tBE $=$ N. arc. CS : CA, vel quia N $= \sqrt{}(\Theta A : Aa)$, erit tBE $=$ arc. CS. $\sqrt{}\Theta A$: CA$\sqrt{}$Aa, aut quia $\Theta A = 2CA$, fiet tBE $=$ 2.arc. CS : $\sqrt{}(2CA. Aa) =$ 2arc. CS : CD, propter parabolam ARD; & tCH (§. 151.) $= \sqrt{}(2CH : Aa)$ nulla habita ratione maſſæ corporis, cum hoc loco mobile non conferatur cum aliis; ſed unum idemque corpus tantum in linea curva BEA vel in axe CA moveri intelligatur, adeò ut loco ipſius M, quæ formulam articuli citati 151. ingreditur, poni poſſit unitas. Sed tCH $= \sqrt{}(2CH : Aa)$ reducitur ad tCH $= \sqrt{}(4AC. CH : 2CA. Aa) =$ 2CS : CD; ergo tBE : tCH, ut fractio $\frac{2\text{arc. CS}}{\text{CD}}$ ad $\frac{2\text{ſubt.CS}}{\text{CD}}$; atque adeò tempus per BE eſt ad tempus per CH ſicut arcus CS ad ejus ſubtenſam CS.

Propterea tempus per totam ſemicycloidem BEA ad tempus deſcenſus mobilis per axem ejus CA ſe habet, ut ſemicircumferentia CSA ad diametrum CA. prout primùm ab Hugenio, dein à multis aliis demonſtratum eſt; ſed ex fundamentis ab hiſce noſtris multum diverſis.

PRO-

PROPOSITIO XXIX. Problema.

181. *Si ſcala ſolicitationum gravitatis centralium fuerit linea recta* ha, *quæ deorſum producta transeat per centrum* O *ſolicitationum gravitatis; invenire iſochronam* BEA *in hac hypotheſi.* Fig. 42.

Quia (§. 172.) $HR^2 = 2.HAah = (HO^2 - AO^2).Aa : AO$ propter trapezium HA*ah*, curva AR invenitur hyperbola eſſe, in quâ $HR^2.AO : Aa = HO^2 - AO^2$.

II. Ex aliquo axis puncto G, tanquam centro, deſcriptus circulus AMN ab arcubus concentricis indefiniteque vicinis EH, *e*K ſecetur in punctis I & *q* actisque ex centro G ad hæc puncta radiis GI & G*q*, tum etiam rectis AI & A*q*, illa ſeu AI ſecet arcum *e*K in *p*, ſitque arculus *qr* centro A deſcriptus, junganturque demum IO, *q*O & *p*O.

Jam in triangulo IGO, ſi GO conſideretur inſtar baſeos, erit ut ſupra (§. 171.) oſtenſum $IG^2.AO + IO^2.AG = AI^2.GO + GA.AO.GO$, atque adeo $AI^2.GO = IO^2.AG + IG^2.AO - GA^2.AO - AO^2.AG = HO^2.AG - AO^2.AG$, & per conſequens $HO^2 - AO^2 = AI^2.GO : AG$ (vel num. 1. hujus) $= HR^2.AO : Aa$; hinc fiet $HR^2 : AI^2 = Aa.GO : AG.AO$, & (§. 172.) $AE^2 : HR^2 (= NN : I) = \Theta A.OA : \Theta O.Aa$, ergo ex æquo & per compoſitionem rationum fiet $AE^2 : AI^2 = Aa.GO.\Theta A.OA : AG.AO.\Theta O.Aa = \Theta A.GO : \Theta O.AG$, hinc $AE : AI = \sqrt{(\Theta A.GO)} : \sqrt{(\Theta O.AG)}$ atque adeò eſt curva AE ad homologam AI in data ratione, ac propterea $Ee : Ir = \sqrt{(\Theta A.GO)} : \sqrt{(\Theta O.AG)}$.

III. Ergo inter circulos concentricos EH & *eq*K ad punctum I aptanda eſſet quædam lineola, quæ ſit ad I*r*, differentiam inter ſubtenſas IA & *q*A, in data ratione $\sqrt{(\Theta A.GO)}$ ad $\sqrt{(\Theta O.AG)}$. Verum quia facile videtur eſſe I*p* portiunculam ſubtenſæ AI à præfatis circulis concentricis interceptam ad prædictam ſubtenſarum differentiam I*r* in data ratione duplæ GD ad CF, demiſſis ſcilicet ex punctis G & C perpendicularibus ad lineam OI productam, vel duplæ GO ad CO; elementum ergo curvæ E*e* lineolæ I*p* æquale poni poteſt ex eo ipſo, quòd I*p* & E*e* habeant ad I*r* datam rationem, quod reſpectu rationis I*p* ad I*r* ita eſſe demonſtrandum eſt. Agantur MC, IC, & MN, quo facto, erunt primum triangula I*pi* & CIF ſimilia, quandoquidem angulus CIA in ſemicirculo rectus efficit, ut duo *p*I*i* & CIF ſimul rectum æquent, ut adeò angulus *p*I*i*

M æqua-

æqualis ſit angulo FCI & cum anguli ad i & F ſint (ſecundùm hypotheſin) recti, neceſſe eſt, ut tertius tertio atque adeò triangulum triangulo ſimile ſit. Secundo, quia angulus qIi ſub tangente Iq & ſecante IO, vel ejus verticaliter oppoſitus æqualis angulo MNI, in alterno ſegmento ipſius IM, angulique i & IMN recti ſunt, triangula ipſa INM & qIi ſimilia exiſtent. Tertiò, triangula etiam Iqr & CAI ſimilia erunt, quoniam angulus qIA ſub tangente Iq & ſecante IA æquatur angulo ICA in alterno ſegmento, & anguli ad r & AIC recti; adeoque tria hæc triangulorum ſimilium paria ſuppeditabunt has analogias $Ip : Ii = IC : CF$, item $Ii : Iq = MN : IN$, & denique $Iq : Ir = AC$ vel $IN : IC$; ergo ex æquo fiet $Ip : Ir = MN : CF = 2DG : CF = 2GO : CO$.

IV. Adeoque, cum ſit (num. II.) $Ee : Ir = \sqrt{(\Theta A . GO)} : \sqrt{(\Theta O . AG)}$ & num. III. $Ip : Ir = 2GO : CO$, erit $Ee = Ip$, ſi fuerit $\sqrt{(\Theta A . GO : \Theta O . AG)} = 2GO : CO$; hæc ergo rationum æqualitas aſſumatur, quoniam recta ΘA ad nullam adhuc magnitudinem eſt reſtricta, ſuamque magnitudinem etiam ad diametrum circuli CA relatam habere debet; fietque hoc caſu $\Theta A = 2OG . AC : AO$; nec non $Ip = Ee$ atque adeo $ip = fe$; porro (§. 129.) eſt $qp = pO .$ ang. pOq, & $qr = Aq .$ ang. $qAI = Aq . \frac{1}{2}$ ang. IGq. Verùm quia $pq : qr$ $(= Ip : Ii = IC : CF)$ $= AC : MC$, ideò $MC . pq = AC . qr$, vel $pO . MC .$ ang. $pOq = Aq . AC .$ ang. $qAI = AI . AC . \frac{1}{2} IGq = AI . AG . IGq$, ergo $pOq = AI . AG . IGq : KO . MC$, ſed propter triangula ſimilia OIA & OCM, erit $IA : MC = IO : CO = HO$ vel $KO : CO$; propterea ponendo loco AI & MC, homologas proportionales KO & CO, fiet ang. $pOq = KO . AG .$ ang. $IGq : KO . CO = AG . IGq : CO$, atque adeò omnes pOq, qui ſingulis IGq reſpondent $= AG .$ omn. $IGq : CO = AG .$ ang. $IGA : CO$, aut poſito angulo $SOC =$ omnibus qOp, fiet $SOC = AG . IGA : CO$, ſeu $CO .$ ang. $SOC = AG .$ ang. IGA, verùm (§. 129.) $CO .$ ang. $SOC =$ arcui SC, & $AG .$ ang. $IGA =$ arcui IA; ergo arcus SC = arcui IA, atque BC = AIMC. Jam $EOe = IOp = IOq + qOp$; ergo $\int EOe = \int IOq + \int qOp$, id eſt, $EOA = IOA + SOC$, ſed $EOA = EOT + SOC$, ergo $EOT + SOC = IOA + SOC$, atque adeò $EOT = IOA$; idcirco ſuper diametro ST = CA deſcriptus ſemicirculus SET tranſibit per curvæ AB punctum E, eritque arcus SVE = arcui SB, quandoquidem jam arcus AI vel TE ipſi CS, & AMC vel TVS toti CSB æquales ſunt oſtenſi. Propterea curva quæſita in hac hypotheſi particulari BEA eſt *Epycyclois* quæ deſcribitur motu puncti in circumferentia circuli SVT fixi E, cum ſci-

licet

licet hic circulus in cava parte alterius circuli BSC ex B per S verſus C volvitur; ita tamen ut initio motus punctum deſcribens E in circulo mobili SVT punctum B immobilis tetigerit, atque ab hoc puncto B moveri cœperit, curvam BEA deinceps deſcripturum rotatione circuli SVT ſuper BSC. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

182. Si diameter circuli generatoris AC fiat infinita, cyclois BEA mutabitur in lineam rectam axi OC perpendicularem, idcirco etiam in hac recta corpora eodem tempore ad punctum A appellent, ſive initium motus puncto A viciniſſimum ſit, ſive etiam ab eodem remotiſſimum fuerit.

Scholion.

Poſt Propoſitionem XXI. commodus locus fuiſſet de conatu centrifugo ex motu circulari oriundo aliqua adjiciendi: ſed quia ejusmodi conatuum centrifugorum theoria nonnulla circa motum pendulorum præſupponit, ſiquidem plene ſit tractanda, ideo etiam in hunc locum erat differenda. Poſtquam Hugenius veras horum conatuum leges aperuit ad calcem Horologii ſui Oſcillatorii, Illuſtr. Marchio Hoſpitalius Hugeniana theoremata, absque demonſtratione ab Autore ſuo propoſita, demonſtrata dedit in Actis Acad. Reg. Par. Scient. 1700, loquor de omnibus Hugenianis theorematibus de vi centrifuga: nam diu ante Hoſpitalium Newtonus nonnulla eorum demonſtraverat in *Philoſoph. Nat. Princ. Math.* viamque aperuerat, cui inſiſtendo reliqua omnia poſſent expediri; poſt laudatiſſimos hosce Geometras plures alii Autores Hugenii 13. theoremata de vi centrifuga demonſtrare conati ſunt, nonnulli laudabili ſucceſſu, alii vero non item, utpote qui paralogismis nonnullis demonſtrationes ſuas fœdarunt, ut facile oſtendi poſſet, ſi modo id è re eſſet. Sed ad rem: cum filum quoddam alicubi affixum alterique ſuo capiti annexum habens ponduſculum, circa punctum fixum converſum deſcribit circulum, id in plano moveri dicetur, cum reapſe in plano circuli moveatur; ſin verò filum motu ſuo ſuperficiem conicam deſcribit; id *Pendulum conicum* deinceps dicetur.

183. Sit ergo filum DM clavo in D affixum, in cujus extremitate annexum ſit corpus M; atque filum circa punctum D in plano Fig. 43.

converſum deſcribat circulum RQM, cujus radius DM dicatur ſimpliciter R, conatus centrifugus C, velocitas qua mobile M in ſua circumferentia æquabiliter revolvitur, V, & hæc velocitas, tanta ſit quantam idem mobile M acquireret motu naturaliter accelerato à quiete in F poſt caſum perpendicularem ex altitudine FM, quam *Altitudinem determinatricem* poſthac vocabimus, atque litera D inſigniemus. Tempus, quo mobil ecircumeundo peripheriam RQM unum circuitum abſolvit, ſit T; ac denique ratio peripheriæ ad ſemidiametrum ſit ut p ad 1, adeò ut peripheria radii R, ſit pR. Ipſa vero gravitas, ut jam alibi factum, dicetur G, quæ in præſenti materia non variabilis ſed uniformis eſt conſideranda.

Hisce jam poſitis, ſupra (§. 119.) dictum eſt ſolicitationem gravitatis cuilibet curvæ normalem coërcere conatum mobilis à curva juxta directionem tangentis recedendi, atque adeo ejusmodi conatui generaliter æqualem eſſe in omni curva; ac propterea etiam in circulo. Generaliter itidem (§. 154.) demonſtratum eſt, reſpectu cujuslibet curvæ à mobili quodam deſcribendæ, quadratum celeritatis in quolibet curvæ puncto æquivalere rectangulo ſub radio oſculi ſeu curvaturæ & rectæ, quæ ſolicitationem curvæ perpendicularem ex centrali derivatam exponit; neceſſe eſt ut hoc idem etiam valeat in circulo in *ſpecie;* verum in circulo radius curvaturæ eſt ejus radius R, & ſolicitatio circumferentiæ perpendicularis conatui centrifugo C æqualis eſt, àc velocitas in quolibet peripheriæ puncto nobis dicitur V. Propterea vi citati theorematis (§. 154.)
Æq. I. $V^2 = R.C..$ I. Deinde quia motus æquabilis eſt in circulo erit $T = pR : V$, hoc eſt, tempus innoteſcit applicando peripheriam tanquam ſpatium tranſmiſſum ad velocitatem, qua id percurri-
Æq. II. tur, ergo etiam $T = pR : \sqrt{RC} = p.\sqrt{(R:C)}..$ Denique, ſi cona-
Æq. III. tus centrifugi conferendi ſint cum gravitate G, tertia formula opus eſt, quam articulus 150. ſuppeditat $2.D.G = V^2..$

Hinc 1°. formulæ prima & tertia efficiunt $R.C = 2D.G$ atque adeò $C : G = 2D : R$ hoc eſt, conatus centrifugus ſe habet ad gravitatem, ut dupla lineæ determinatricis ad radium circuli; atque adeò ubi hæc determinatrix altitudo D ſemiſſem radii R æquaverit, conatus centrifugus gravitati æqualis erit. Quod eſt theor. 5. Hugenii.

2°. Si in diverſis circulis tempora periodica T ſunt æqualia etiam ipſæ $p\sqrt{(R:C)}$ æquabuntur, atque adeò conatus centrifugi radiis directe proportionales erunt.

3°. Si T ut R^n, erit V ſeu $pR : T$, ut R^{n-1} inverſe, atque adeò

C ſeu $ppR:T^2$ erit reciproce ut R^{2n-1}. Proinde ſi conatus centrifugus fuerit reciproce ut T^2, erit tempus periodicum in ratione ſeſquiplicata radii R, & in hoc conſiſtit celebre Kepleri theorema. Reliqua, quæ eadem facilitate ex tribus præcedentibus formulis elici poſſunt, Lectoris induſtriæ relinquimus, atque adeò ad contemplationem pendulorum conicorum abſque ulterioribus ambagibus accedimus.

184. Si filum AM motu conico moveatur circa axem AD horizonti rectum, adeo ut pondus ipſi annexum M circumferentiam circuli MQR deſcribat; id fieri non poteſt, quin præter gravitatem ſecundùm directionem ipſi AD parallelam in corpus M agentem eidem mobili inſit conatus alius ſecundùm directionem DM agens. Nam ut filum AM in ſitu hoc ſub angulo DAM ad axem inclinato detineatur duabus viribus aut ſolicitationibus lateralibus AB & BC opus eſt, quarum prior gravitatem exponit, altera verò BC nonniſi à motu circulari provenire poteſt, ex motu vero centrali reſultat conatus centrifugus, ergo BC repræſentat ejusmodi conatum centrifugum. Agatur igitur BE æquidiſtans lateri AM, fietque $EM=BC$. Ponantur inſuper $AD=A$, $AM=L$, $AB=G$, & $BC=EM=C$, radius $DM=R$, peripheria $MRQ=pR$, & perinde ac ſupra V celeritas mobilis in circumferentia MQ; quibus præſuppoſitis, erit iterum, ut in antecedenti paragrapho, tempus unius circuitus T mobilis M in peripheria MQR, dum filum AM ſuperficiem conicam deſcribit $=p\surd(R:C)$ verum ob parallelas AM & BE, eſt $AD:AB=DM:EM$, hoc eſt; $A:G=R:C$, ergo etiam $T=p\surd(A:G)$, hæc verò expreſſio etiam ſignificat (§. 175. 178.) tempus duarum oſcillationum minimarum lateralium penduli cujus A ſit longitudo; magnitudo vero $\surd(A:G)$ ſignificat tempus deſcenſus perpendicularis alicujus gravis ex altitudine $\frac{1}{2}A$. Propterea tempora circuitus pendulorum conicorum ſunt in ſubduplicata ratione altitudinum A conorum. Superfluum duco reliqua, circa ejusmodi pendula ab Hugenio indicata, theoremata operoſe demonſtrare, cum ex hisce poſitis principiis ſponte ſua facillime fluant, ceu quilibet videbit, qui animum iis advertere velit. Priusquam tamen ad alia transeam, contemplabimur paulisper problema ab ingenioſiſſimo Joh. Bernoullio olim propoſitum quodque ab Illuſtr. Hoſpitalio ſolutionem nactum eſt; ſed quoad arguendi formam à noſtra differentiſſimam.

PROPOSITIO XXX. Problema.

Fig. 44. 185. *Invenire curvam* ABN *ejus conditionis, ut in ea deſcendens grave* A *motu naturaliter accelerato, eandem in ſingulis punctis premat vi ubique æquali ponderi corporis abſoluto.*

I. Sint CD axis curvæ quæſitæ, CA prima ordinata in cujus continuatione AF exponat gravitatem ſeu pondus abſolutum mobilis A, atque ſuper ea deſcripto ſemicirculo AGF, agantur FG tangenti curvæ in puncto B, & F*g* tangenti in *b* æquidiſtantes, junganturque AG, A*g*. Radius deinde circuli oſculatoris curvæ in puncto B, id eſt, BZ producatur in L, usquedum BL $=$ AF $=$ BI quæ ſumta eſt in ordinata curvæ DB ultra curvam prolongata. Ipſis AG, A*g* fient æquales AM, A*m*; & denique ex puncto I demittatur perpendicularis IK ad lineam BL, eritque BK $=$ AG $=$ AM, atque adeò MF $=$ KL.

II. Quoniam BI exponit pondus abſolutum mobilis A vel B, ipſa BK exponet preſſuram, quam pondus in curvæ punctum B exeret ſecundum directionem BL, ſed præter hanc preſſionem aliam inſuper ſuſtinebit idem curvæ punctum B à conatu centrifugo mobilis, ac per conſequens hic conatus exponi debebit per KL, quandoquidem preſſio totalis BL æquari debet (ſecundùm hypotheſin) ipſi AF vel BI. Dicatur celeritas acquiſita in B, V; eritque (§. 154.) $V^2 = BZ.KL = BZ.MF$, verùm (§. 150.) eſt etiam $V^2 = 2AF.DB$, ergo $BZ.MF = 2AF.DB$; hinc $Bb.MF : BZ.MF = Bb.MF : 2AF.DB$. Atqui ſimilitudo ſectorum BZ*b*, GA*h*, & *g*F*h* præbet Bb: BZ $=$ M*m* (*gh*) : *g*F, atque ex ſimilitudine triangulorum B*b*E, & FAG elicitur B*b* : AF $=$ E*b* : FG; propterea ſubrogando in antecedenti analogia loco Bb, & BZ proportionales M*m* & FG, atque loco B*b* & AF, proportionales E*e* & FG, eaque mutabitur in hanc alteram $Mm.MF : FG.MF = Eb.MF : 2DB.FG$, vel $2MF.Mm : FG.MF = 2Eb.MF : 2DB.FG$ vel ductis conſequentibus in MF : FG, erit $2MF.Mm : MF^2$ ($= 2Eb.MF : 2DB.MF$) $= Eb : DB$. Unde, quoniam decrementum $2MF.Mm$ eſt ad decreſcentem MF^2 ſicut incrementum E*b* creſcentis DB ad hanc creſcentem, erit (§. 153.) creſcens DB ad ſuam primam magnitudinem CA, ut decreſcentis prima magnitudo, quæ eſt FA^2 ad decreſcentem MF^2; adeoque ſumta P media proportionali inter AC & DB, fiet $P^2 : AC^2 = AF^2 : MF^2$ vel $P : AC = AF : MF$, & convertendo $P - AC$:

P

$P = AG : AF$, hinc $AF^2 : AG^2 = P^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & dividendo $FG^2 : AG^2 = 2AC.P - AC^2 : P^2 - 2AC.P + AC^2$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC = Eb : BE$: adeoque, ſi dicantur AC, a; CD, x; DB, y; Eb, dy, erit $p = \sqrt{ay}$, & $2pdp = ady$, & $FG : AG = \sqrt{(2AC.P - AC^2)} : P - AC$, fiet in his ſymbolis $dy : dx = \sqrt{(2ap - aa)} : p - a$, ergo $pdy - ady = dx\sqrt{(2ap - aa)}$, vel $apdy - aady = 2ppdp - 2apdp = adx\sqrt{(2ap - aa)}$, atque adeò $dx = (2ppdp - 2apdp : a\sqrt{(2ap - aa)})$ quæ mutatur in $dx = (q^4dq - a^4dq) : 2a^4$, cujus integralis eſt $10a^4x = q^5 - 5a^4q + 4a^5$ ſi ſcilicet poſitum fuerit $q = \sqrt{(2ap - aa)}$, atque retrogradiendo invenietur $q = \sqrt{(2a\sqrt{ay} - aa)}$ atque adeò æquatio curvæ quæſitæ $(aa, + (y - a - \sqrt{ay})$ in $\sqrt{(2a\sqrt{ay}, - aa)} = \frac{5}{2}ax$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

186. Quoniam invenimus $BZ : DB = 2AF : MF$ & $P : CA = AF : MF$, vel $2P : CA = 2AF : MF$, erit pariter $2P : CA = BZ : DB$ & invertendo $CA : P = DB : BZ$, atque adeò radius evolutæ in quolibet curvæ puncto ope hujus analogiæ innoteſcit, quæ analogia conſentit cum ea, quam Ill. Marchio Hoſpitalius tradidit in Actis Acad. Reg. Scient. Pariſ. 1700. ab initio.

Caput IV.

De Solicitationibus centralibus quibus corpora in orbibus mobilibus detinentur, & de motu Apſidum.

Definitio.

187. Sit ABE quilibet orbis *immobilis*, cui figura *abe* ſimilis & æqualis dicatur orbis *mobilis*, quia circa punctum C ad quod ſolicitationes centrales diriguntur, reapſe moveri intelligendus eſt; ea tamen ratione ut angulus AC*a*, quem axis ejus *ae* aliquo tempore deſcripſit, ſit ad angulum *a*C*b*, quem arcus curvæ mobilis *ab* à mobili in curva incedente eodem hoc tempore deſcriptus ſubtendit, in ratione data. Axis *ae* motus, dicitur motus Apſidum. Fig. 45.

Co-

Corollarium I.

188. Quia angulus *a*CA ponitur ubique ad angulum *b*C*a* in data ratione, erit etiam componendo angulus *b*CA ad angulum *b*C*a*, vel deſcripto per orbis mobilis punctum *b* circulo *b*B immobilem orbem ſecante in puncto B, angulus *b*CA ad angulum BCA in data ratione. Cum Illuſtri Newtono nominemus rationem anguli BCA ad angulum *b*CA æqualem datæ F ad G.]

Corollarium II.

189. Cum mobile *a*, orbem mobilem *abe* circumeundo deſcribens, duplicem habeat motum, ſcilicet eum, quo in ſuo orbe mobili incedit, tum etiam motum ipſius orbis, ex gemino hoc motu liquet compoſitum iri motum ſecundum lineam curvam AN*b*. Idcirco idem eſt, ſi mobile in curva immobili AN*b* movetur, quam ſi in orbe mobili *abe* incederet, & vis centripeta aut ſolicitatio centralis in curvæ AN*b* puncto *b* requiſita prorſus eadem erit cum ea qua opus eſt ut mobile in curva mobili *abe* ſemper incedere poſſit absque eo, ut unquam à curva *ab* recedat, durante motu plani ejusdem *abea*. Propterea ad determinationem ſolicitationis centralis, quæ corpus ſemper in perimetro orbitæ mobilis retinere poſſit, tantum quærenda eſſet expreſſio ſolicitationum centralium pro ſingulis curvæ immotæ AN*b* ex duplici motu reſultantis, ſcilicet ex motu orbitæ & ex motu corporis in orbita, punctis; ut Cel. Varignon id egit in Actis Acad. Scient. Pariſ. 1705. ad d. 5 Dec. Verum, quia tota res non ineleganter ex theoria conatuum centrifugorum derivari poteſt, id paucis oſtendere libet.

PROPOSITIO XXXI. Theorema.

Fig. 45. 190. *Exceſſus ſolicitationis centralis requiſitæ ad id ut corpus aliquod in orbita mobili circa punctum* C, *ut* abe *revolvi queat, ſupra ſolicitationem centralem, qua idem corpus in orbe immobili* ABE *delatum in pari diſtantia* BC, *vel* bC *urgetur, æquatur exceſſui conatus centrifugi puncti* b, *in orbe mobili arculum* bh *deſcribentis, ſupra conatum centrifugum mobilis cujusdam extremitati* B *radii vectoris* CB *annexi atque arculum* BH *deſcribere nitentis eo tempuſculo, quo punctum* b *ſuum arculum* bh *conficeret.*

Quia

Quia corpus in orbita mobili movendum à rotatione ſeu motu circulari plani *abe* acquirit conatum recedendi à centro C, atque adeò à curva ipſa *ab*, neceſſum eſt, ut quædam ſolicitatio ad punctum C directa conatum ejusmodi excuſſorium retundat, ad id ut corpus in orbita mobili gyrari queat, nec extra eam vagetur; hancque ſolicitationem præciſe æqualem eſſe oportet conatui illi centrifugo à ſolo plani motu orto, alioqui corpus in orbita mobili non detineretur, ſi ſolicitatio conatu centrifugo major vel minor eſſet: ſed conatus centrifugus à motu plani *abe* oriundus eſt exceſſus conatus centrifugi puncti *b*, à motu radii vectoris *b* angulum *bCh* deſcribere molientis, ſupra conatum centrifugum puncti B in orbita quieſcenti ABE, arculum BH deſcribere conantis; nam motus angularis *bCh* non ſolum involvit motum angularem BCH radii vectoris BC in orbita quieſcenti alteri *bCh* contemporaneum, ſed etiam motum ipſius orbitæ plani, ac propterea conatus centrifugus, qui reſultat à motu puncti *b* in radio vectore *bC*, angulum *bCh* deſcribente, non ſolum in ſe continet conatum centrifugum puncti B in radio vectore BC orbitæ quieſcentis, angulum BCH deſcribente, ſed etiam conatum centrifugum, qui provenit à motu plani *abe*, adeoque hic conatus æquivalet exceſſui conatus centrifugi puncti *b*, ſupra conatum centrifugum puncti B in orbita immobili; atqui idem conatus centrifugus à motu plani *abe* ortus æqualis eſt ſolicitationi centrali, à qua retundi debet; & hæc ſolicitatio coërcens conatum centrifugum æquatur exceſſui ſolicitationis centralis in puncto orbitæ mobilis *b* ſupra ſolicitationem centripetam in orbitæ immobilis puncto B cum altero *b* æquè alto. Ergo hic exceſſus ſolicitationum centripetarum æquatur exceſſui conatuum centrifugorum in *b* & B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

191. *Iisdem poſitis, exceſſus ſolicitationis in orbitæ mobilis puncto* b, *ſupra ſolicitationem centripetam in orbitæ quieſcentis puncto* B *æquealto, erit ad ſolicitationem centripetam in puncto* A *orbitæ immobilis in compoſita ratione ex ratione* $F^2 - G^2$ *ad* G^2 *& ratione ſolidi* $AC^2 . AO$ *ad ſolidum* BC^3; *exiſtente* AO *radio circuli ejusdem curvitatis cum curva* ABE *in* A, *ſeu radio circuli curvam oſculantis in* A.

Compendii gratia velocitates circulationis radiorum *b*C, BC, AC deſignabimus reſpective per *u*b, *u*B, *u*A; conatusque centrifugos Fig. 45.

pun-

punctorum b, B, A; gyrantium per cfb, cfB, cfA, ac denique ſolicitationes centripetas in iisdem punctis per, cpb, cpB, cpA.

Jam I. quia velocitates radiorum Cb, CB ſunt ut anguli eodem tempore ab ipſis deſcripti, erit $u\text{b} : u\text{B} = $ ang. $b\text{C}b$: ang. BCH (§. 188.) $= \text{F} : \text{G}$, ergo $(u\text{b})^2 : (u\text{B})^2 = \text{F}^2 : \text{G}^2$. Atqui in circulis æqualibus conatus centrifugi ſunt in duplicata ratione velocitatum, ergo $cf\text{b} : cf\text{B} = \text{F}^2 : \text{G}^2$, & dividendo $cf\text{b} - cf\text{B} : cf\text{B} = \text{F}^2 - \text{G}^2 : \text{G}^2$.

II. Porro cum in orbita quieſcenti æqualibus temporibus æquales areolæ BCD vel BCH, & ACα deſcribantur, velocitates radiorum BC, AC hisce radiis erunt reciproce proportionales, hoc eſt $u\text{B} : u\text{A} = \text{AC} : \text{BC}$, & $(u\text{B})^2 : (u\text{A})^2 = \text{AC}^2 : \text{BC}^2$. atqui (§. 183. æqu. 1.) eſt $(u\text{B})^2 = \text{BC}.cf\text{B}$, & $(u\text{A})^2 = \text{AC}.cf\text{A}$. Ergo $\text{BC}.cf\text{B} : \text{AC}.cf\text{A} = \text{AC}^2 : \text{BC}^2$, vel etiam ductis in hac ultima analogia antecedentibus in AC & conſequentibus in BC, eritque $\text{AC}.\text{BC}.cf\text{B} : \text{AC}.\text{BC}.cf\text{A} = cf\text{B} : cf\text{A} = \text{AC}^3 : \text{BC}^3$, verum (num. 1.) erat $cf\text{b} - cf\text{B} : cf\text{B} = \text{F}^2 - \text{G}^2 : \text{G}^2$, ergo per rationum compoſitionem & ex æquo fiet $cf\text{b} - cf\text{B} : cf\text{A} = (\text{F}^2 - \text{G}^2).\text{AC}^3 : \text{G}^2.\text{BC}^3$. Porrò quia (§. 183.) $(u\text{A})^2 = \text{AC}.cf\text{A}$, & (§. 154.) $(u\text{A})^2 = \text{AO}.cp\text{A}$, exiſtente AO radio circuli curvam ABE in puncto A oſculantis, erit $\text{AC}.cf\text{A} = \text{AO}.cp\text{A}$, atque adeò $cf\text{A} : cp\text{A} = \text{AO} : \text{AC}$; ergò denuo ex æquo $cf\text{b} - cf\text{B} : cp\text{A} = (\text{F}^2 - \text{G}_2).\text{AC}^2.\text{AO} : \text{G}^2.\text{BC}^3$; atqui per Prop. præc. eſt $cf\text{b} - cf\text{B} = cp\text{b} - cp\text{B}$, ergo exceſſus ſolicitationis centripetæ in b ſolicitationem in B, eſt ad ſolicitationem centripetam in A; in compoſita ratione, ex ratione $\text{F}^2 - \text{G}^2$ ad G^2 & ratione ſolidi $\text{AC}^2.\text{AO}$ ad ſolidum BC^3. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

192. Adeoque in quolibet puncto b orbitæ mobilis abe, ſolicitatio centralis erit ut $cp\text{B}, + (\text{F}^2 - \text{G}^2).\text{AC}^2.\text{AO}.cp\text{A} : \text{G}^2.\text{BC}^3$.

Corollarium II.

193. Hinc ſi orbita ABE, *abe*, fuerit elliptica, ita ut $cp\text{B} : cp\text{A} = \text{AC}^2 : \text{BC}^2$, atque adeò $cp\text{B} = \text{AC}^2.cp\text{A} : \text{BC}^2$, erit $cp\text{b} = \text{AC}^2.cp\text{A} : \text{BC}^2, + (\text{F}^2 - \text{G}_2).\text{AC}_2.\text{AO}.cp\text{A} : \text{G}^2.\text{BC}^3$.

Scholion.

194. Inventa jam generali lege ſolicitationum centralium in orbitis

bitis mobilibus, problema, inveniendi ex data lege ſolicitationum centripetarum rationem F ad G, qua motus apſidis *ae* determinatur, ſolutu difficile non erit per methodum mox exponendam. Ingenioſa eſt via & oppidò elegans quam Cel. Newtonus ſequutus eſt in ſolutione ejusdem Problematis, ſupponens orbitas propemodum circulares, quamque fuſius explicat Sect. IX. Lib. I. *Princ. Phil. Nat. Math.* & poſtea prolixo commentario illuſtravit Dav. Gregorius in ſuis Aſtronomiæ Phyſicæ & Geometricæ Elementis Lib. IV. Sect. II. Laudata Newtoni methodus conſiſtit in comparatione terminorum alicujus ſeriei infinitæ cum homologis terminis in Canone pro determinatione ſolicitationum centripetarum in orbita mobili, eaque pro ſingulis novis exemplis novas ſeries novumque calculum ſubducendum depoſcere videtur. Sed quid, ſi modum facillimum aperuero, quo idem absque ullo ſerierum infinitarum auxilio obtineri queat, imo longe plura; quandoquidem præbet canonem generalem, quæcunque ſolicitationis centripetæ ſit lex, rationem F ad G manifeſtantem?

195. Sit generaliter ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut $P : BC^3$, eritque (§. 193.) $P = AC^2 . BC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2$; &, ſi decrementum infiniteſimum magnitudinis P, dicatur $Q . bm$; formula determinans ſolicitationem centripetam in orbitæ mobilis puncto d, erit $P, - Q . bm = AC^2 . dC . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2 = AC^2 . BC . cpA - AC^2 . bm . cpA, + (F^2 - G^2) . AC^2 . AO . cpA : G^2$, quæ ex priore ſubducta relinquet $Q . bm = AC^2 . bm . cpA$, vel $Q = AC^2 . cpA$; qui valor in prima hujus articuli æquatione ſubſtitutus, efficiet $P = Q . BC + (F^2 - G^2) . Q . AO : G^2$, ex quâ elicietur $F : G = \sqrt{(P - Q . BC + Q . AO : Q . AO)}$. Verum, quia ellipſin ABE ad formam circularem quam proxime accedere cum Newtono ſupponimus, ideo ipſæ BC, AC & AO tanquam æquales tractandæ ſunt, nam ſemiſſis parametri ellipſeos, ſeu AO, à ſemidiametro AC vel BC circuli in quem deſinit, non differet; ac propterea præcedens analogia abit in hanc ſimplicem $F : G = \sqrt{P} : \sqrt{Q . AO}$. Qui eſt Canon generalis, qui quærebatur atque promittebatur ſupra, pro orbita mobili elliptica.

196. Regulam præcedentem unico exemplo illuſtrare libet, quod nobis omnium inſtar erit, idque ab Illuſtri Newtono mutuabimur. Sit ergo ſolicitatio centripeta in orbitæ mobilis puncto b, ut quantitas $\frac{az^m + bz^n}{z^3}$, ubi z ſignificat bC vel BC in fig: 45, eritque proin-

 de

de $P = az^m + bz^n$, & $Q.bm \neq Q.dz = amz^{m-1}dz + bnz^{n-1}dz$, hoc eſt $Q = amz^{m-1} + bnz^{n-1}$, hinc $F : G (= \sqrt{P} : \sqrt{Q}.AO) = \sqrt{(az^m + bz^n : amz^{m-1} AO + bnz^{n-1} AO)}$. Verùm, quia juxta monita in articulo præcedenti, z vel $bC = AC = AO$, cum Newtono æquales unitati poni poſſunt, reperitur $F : G = \sqrt{(a + b : am + bn)}$ prorſus ut habet Newtonus in exemplo 3. poſt Prop. 45. *Lib. I. Princ. Phil. Nat.* Sin vero fuiſſet $P = az^m - bz^n$, inveniſſemus pariter ut Laudatiſſ. Vir, $F : G = \sqrt{(a - b : am - bn)}$.

Denique ſi ſolicitatio centralis $P : BC^3$ fuerit ut BC^m, atque adeò $P = BC^{m+3}$, ex motu apſidum, ſeu ex ratione $F : G$, invenietur index m poteſtatis BC^m. Nam reperietur hoc caſu $Q = \overline{m+3}\, BC^{m+2}$, unde ſi $AO = AC = BC = 1$, erit $F : G = \sqrt{(1 : m + 3)}$ atque adeò $m = (G^2 - 3F^2) : F^2$.

CAPUT V.

De Motibus gravium inter ſe connexorum atque in arcubus circularibus concentricis junctim delabentium; ſeu de motu Pendulorum compoſitorum eorumque centro oſcillationis in omni poſſibili gravitatis variabilis hypotheſi.

THeoriam centri oſcillationis Hugenius primus, quod ſciam, aperuit in parte quarta eximii Tractatus de Horologio Oſcillatorio. Sed quia is principio inſtitit, quod indemonſtratum ſuppoſuit, veriſſima ejus doctrina ab omnibus integrum aſſenſum non impetravit. Petebat enim, ut ſibi concedatur, fore ut centrum commune gravitatis omnium, compoſiti cujusque penduli, partium non poſſit altius aſſurgere, cum unaquæque particula diffracto vinculo, quo cum reliquis connexa erat, ea celeritate aſcenſum ſuum liberum incipiet, quam junctim cum reliquis deſcendendo acquiſiverat, quin unde delapſum erat deſcenſu totius penduli compoſiti. Celeb. Jac. Bernoulli alia via longitudinem penduli ſimplicis compoſito iſochroni generaliter determinans, demonſtrationem poſtulati Hugeniani inde deduxit, ſed tantum in hypotheſi gravitatis in ſingulas penduli partes uniformiter agentis. Nos verò rem generalius concipiemus, fingentes gravitatem in partes illas utcunque difformiter agere at-

que

que hoc non obſtante methodo directa & facili memorabilem naturæ legem demonſtrabimus; aſcenſum ſcilicet centri gravitatis omnium penduli compoſiti partium, modo paulo ſupra memorato, æqualem eſſe deſcenſui ejuſdem, tametſi, pro variante in ſingulis penduli partibus gravitate, centrum earum gravitatis multum diverſum ſit ab eo, quod eſt in hypotheſi communiori gravitatis uniformis & proportionalitatis ponderum cum maſſis corporum.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum compoſitum vocatur, quod pluribus corporibus ſeu partibus inter ſe connexis inſtructum eſt. Simplex verò quod unico pondere conſtat.

II.

Axis penduli compoſiti eſt recta, quæ ex puncto ſuſpenſionis immobili, circa quod ſcilicet totum pendulum reciproco motu eundo & redeundo oſcillatur, per commune centrum gravitatis omnium partium penduli compoſiti tranſit.

III.

Axis oſcillationis eſt linea penduli axi perpendicularis per punctum ſuſpenſionis tranſiens, circa quam pendulum vibrationes ſuas peragit.

IV.

Centrum oſcillationis eſt punctum in axe penduli, cujus diſtantia ab axe oſcillationis æquatur longitudini penduli ſimplicis compoſito ſynchroni.

V.

Pendulum ſimplex compoſito ſynchronum dicitur, cum hujus axis & illud ex ſitu horizontali, vel quolibet alio ad horizontem ſimiliter inclinato, ſimul exire incipientes æquales conſtanter angulos ſimul oſcillando conficiunt.

197. Penduli compoſiti CPQ, circa punctum ſuſpenſionis C convertibilis, lineæ omnes CP, CM, CQ, PQ gravitatis expertes ſint; in terminis vero rectæ PQ ponduſcula quæcunque P, Q affixa exiſtant, quorum commune centrum gravitatis ſit M, recta CM per Fig. 46.

pun-

punctum ſuſpenſionis C & centrum gravitatis ponderum M ducta, vocatur *axis* penduli compoſiti PQC, recta vero CW axi CM perpendicularis per ſuſpenſionis punctum C ducta, eſt axis oſcillationis. Porro ſi penduli compoſiti axis CM ex ſitu horizontali CA delapſus venerit in ſitum CN eo tempore, quo pendulum ſimplex etiam ex ſitu horizontali in CN ceciderit, anguloſque perpetuo æquales ACM & ACN confecerint compoſitum CPQ & ſimplex pendulum CN, hoc illi *ſynchronum*, vel ſubinde etiam *iſochronum* dicetur; ponduſculum verò in pendulo ſimplici N, inſtar puncti gravis conſideratum, ad axem penduli compoſiti adductum atque applicatum, in eo ſignat *centrum oſcillationis* N.

VI.

198. *Solicitationes vicariæ* ſolicitationum gravitatis centralium ſunt ſolicitationes tangentiales loco centralium gravitatis cogitatione ſubſtituendæ, atque ſolicitationibus hisce æquipollentes. Sic ſolicitationes tangentiales expoſitæ per facta ex magnitudinibus R, S, &c. & V in maſſas P, Q &c. & N; hoc eſt ſolicitationes R. P, S. Q, &c. & V. N in directionibus PR, QS &c. & NV, quæ tangentes ſunt arcuum P*e*, Q*f*, &c. N*n* à corporibus P, Q &c. & N oſcillando deſcriptorum, in ſua reſpectiva corpora agentes, ſunt vicariæ ſolicitationum gravitatis centralium ſecundum directiones horizonti normales AP, BQ &c. YN in corpora P, Q, &c. & N agentium, ſi eundem cum hisce effectum producere valent, atque adeò in oppoſitas partes ſecundum P*r*, Q*s* &c. & N*u* agentes in æquilibrio conſiſtunt cum ſolicitationibus gravitatis centralibus, quas deinceps etiam exponam per facta E. P, F. Q &c. & G. N ex magnitudinibus E, F, &c. & G in maſſas P, Q, &c. & N.

VII.

199. Ac denique *Solicitationes vicariæ ſimiles* dicentur, quoties magnitudines R, S, &c. & V, homologis diſtantiis PC, QC &c. & NC proportionales erunt.

VIII.

200. Motus penduli compoſiti CPQ & ſimplicis CN ſimiliter accelerari dicuntur, cum celeritatis incrementa infiniteſima à ſolicitationibus gravitatis centralibus quolibet tempuſculo minimo in ſingulis penduli particulis P, Q &c. & ſimplicis ponduſculo N ſimul

ſimul producta, ubique proportionalia ſunt homologis diſtantiis PC, QC &c. & NC particularum oſcillantium & corpuſculi N ab axe oſcillationis.

201. Celeritates actuales & jam acquiſitas particularum P, Q &c. penduli compoſiti, deinceps vocabimus *p*, *q* &c. reſpective, earumque elementa ſeu incrementa momentanea *dp*, *dq* &c. Celeritatem verò corpuſculi N penduli ſimplicis nominabimus *n*, ejusque incrementum momentaneum *dn*. Ac tandem ſolicitatio gravitatis centralis, qua particula P in directione AP urgetur, ſit E. P, ſolicitatio verò centralis particulam Q ſecundum directionem BQ urgens dicatur F. Q; ac ſolicitatio gravitatis, qua particula N in directione YN afficitur, G. N.

PROPOSITIO XXXIII. Lemma.

202. *Solicitationes vicariæ* R, S, &c. *juxta directiones* PR, QS, &c. *in particulas* P, Q, &c. *penduli compoſiti agentes eadem velocitatis incrementa ſingulis hiſce particulis imprimere valent, quæ ſolicitationes gravitatis centrales* E, F, &c. *juxta* AP, BQ, &c. *in eaſdem particulas* P, Q, &c. *agentes; atque adeo vicariæ illæ eodem, quo hæ centrales ſolicitationes, modo penduli compoſiti motum accelerabunt.* Fig. 46.

Quia compoſiti penduli partes inter ſe connexæ ſunt; ſimiles arcus ſimul cunctæ deſcribent, atque ſuum motum ſemel conceptum absque ulla mutatione continuarent, niſi gravitas indeſinenter in eas agens motum penduli accelararet. Ad rem noſtram motus actualis conſideratio nihil confert, quandoquidem in præſenti negotio hic motus jam acquiſitus tanquam motus *communis* conſiderari debet, quo ſingulæ penduli particulæ abripiuntur; ſed celeritatis incrementa particulis iſtis recens imprimenda tanquam motum earundem particularem nunc ſpectabimus, & hunc motum naſcentem perinde oriri poſſe à ſolicitationibus vicariis R, S, &c. ut à centralibus gravitatis E, F, &c. probandum.

Etenim ſi hoc negetur, imprimant, ſi fieri poteſt, gravitatis ſolicitationes E, F, &c. particulis P, Q, &c. majorem celeritatem quam ſolicitationes vicariæ R, S, &c. ergo hæ ſolicitationes, ſecundum P*r*, Q*s*, &c. agentes, non conſiſterent in æquilibrio cum ſolicitationibus E, F, &c. iisdem particulis P, Q, &c. applicatis, quod eſt contra hypotheſin. Idem abſurdum ſequetur, ſi dicatur ſolicitationes gravitatis E, F, &c. minores particulis P, Q, &c. celeritates imprimere poſſe quam vicariæ. Ergo &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV. Lemma.

203. *Si ſingulæ particulæ* P, Q, &c. *alicujus penduli compoſiti à ſolicitationibus* P. R, S. Q, &c. *quarum* R, S, &c. *ſimiles ſint ipſi* V, *denotante* V. N *ſolicitatione tangentiale mobilis* N, *juxta directiones* PR, QS, &c. *urgentur, celeritates infiniteſimæ* dp, dq, &c. *&* dn *ipſis* P, Q, &c. *&* N *impreſſæ erunt ſimiles, hoc eſt radiis* PC, QC, &c. *&* NC *proportionales.*

I. Sint radii NC, PC, QC &c. libere atque independenter uni ab aliis volubiles circa axem C, & quia (§. 131.) quælibet ſolicitatio æquivalet motui genito applicato ad tempuſculum infiniteſimum, quo motus iſte producitur, & quia in caſu noſtro omnes ſolicitationes vicariæ R, S, V, ſimul ſeu eodem tempore agunt, erunt hæ ſolicitationes ut motus P. *dp*, Q. *dq* &c. & N. *dn;* atque adeò ipſæ R, S, & V, ut *dp*, *dq* &c. & *dn*, atqui ipſæ R, S, &c. & N, (ſecundùm hypotheſin) ſunt, ut radii PC, QC, &c. & NC, ergo & celeritates naſcentes *dp*, *dq*, &c. & *dn* iisdem PC, QC, &c. & NC proportionales ſunt.

II. Cum igitur celeritates *dp*, *dq*, &c. & *dn* ſimiles ſint; motus angulares PC*e*, QC*f*, &c. & NC*l* æquales, hoc eſt anguli ſimul deſcripti PCQ & *e*C*f* æquales erunt, perinde ac rectæ PQ & *ef* particulas PQ connectentes; adeò ut tali motu nulla variatio ratione mutuæ poſitionis particularum P, Q, &c. accidere poſſit. Propterea ſolicitationes tangentiales ſimiles R, S, &c. & V particulis P, Q, &c. ſimiles motus imprimeat, ſive particulæ illæ P, Q, inter ſe connexæ ſint, ut in pendulis compoſitis, ſive non. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

204. Hinc quia (§. 202.) ſolicitationes vicariæ ſimiles R, S, &c. & V in directionibus PR, QS, &c. & NV corporibus P, Q, &c. & N applicatæ eodem modo pendulorum ſimplicis CN & compoſiti CPQ motus accelerant, quo fieret à ſolicitationibus gravitatis E, F, &c. & G in particulas P, Q, &c. & N agentibus; liquet omninò ambo pendula ſimplex & compoſitum, ex ſimili ſitu reſpectu horizontis moveri incipientia, ſimiliter deinceps & conſtanter motum iri, ita ut æquales ſemper angulos YCN, ACM ſimul conficiant,

ficiant atque adeo (§. 197.) unum CN alteri CPQ *ſynchronum* aut *iſochronum* ſit; & converſim, ſi hæc pendula ſynchrona ſint, ſolicitationes vicariæ R, S, &c. & V ſimiles erunt.

PROPOSITIO XXXV. Theorema.

205. *Si ſingulæ particulæ cujusque penduli compoſiti derepente alicubi vinculo ſolutæ motum in altum convertant, unaquæque ea celeritate quam cum reliquis connexa oſcillando acquiſivit, commune omnium penduli partium gravitatis centrum ad eam ipſam altitudinem aſcendet, ex qua delapſum erat deſcenſu totius penduli compoſiti, cum ſcilicet omnes penduli partes adhuc connexæ eſſent.*

I. Axis penduli compoſiti ex ſitu horizontali CA in ſitum CM delapſum eſſe ponatur motu accelerato, particulas vero P, Q, &c. vinculis ſolutæ aſcendere in rectis P2P, Q2Q, &c. unamquamque celeritate initiali, quam cum reliquis oſcillando acquiſivit; ita ut commune omnium gravitatis centrum M aſcendat per lineam M2M. Probandum eſt hanc M2M æqualem fore ipſi DM, quæ profunditatem denotat, ex qua omnium penduli partium centrum gravitatis cecidit motu totius penduli compoſiti. Quia nunc P, Q, N denotant maſſas corporum & E. P, F. Q, &c. G. N eorundem pondera, horum ſumma, excepto pondere N, dicatur M, hoc eſt, M = E. P + F. Q + &c., eritque (§. 48.) propter centrum gravitatis M; E. P. AC + F. Q. BC = M. DC, nec non E. P. AP + F. Q. BQ + &c. = M. DM; ac denique E. P. P2P + F. Q. Q2Q + &c. = M. M2M.

II. Sit inſuper pendulum ſimplex CN compoſito *ſynchronum*, adeò ut id cum CM congruat atque celeritates ponduſculorum N, P, Q, &c. ſimiles ſint; eruntque adeò (§. 204.) ſolicitationes vicariæ R, S, &c. V ſimiles, verùm quia (§. 198.) ſolicitationes vicariæ ſolicitationibus gravitatis centralibus E, F &c. G æquipollent, atque cum hiſce in æquilibrio conſiſtere queunt, erit (§. 56.) E. P. AC + F. Q. BC + &c. id eſt (num. I.) = M. DC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. & G. N. YC = V. N. NC, atque hinc reſultat analogia M. DC : G. N. YC = R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC (vel quia R, S, &c. & V radiis PC, QC, &c. NC proportionales ſunt) = P. PC² + Q. QC² + &c. : N. NC²; at celeritates p, q, &c. n corpuſculorum P, Q, N etiam radiis PC, QC, NC proportionantur, ergo M. DC : G. N. YC, vel (propter triangula

ſimi-

ſimilia CDM & CYN) ratio M.DM : G. N. YN = P. *pp* + Q. *qq* + &c. : N. *nn*.

III. Quoniam (ſecundùm hypotheſin) corpuscula P, Q, &c. celeritatibus initialibus *p*, *q*, aſcendentia ſpatia P2P, Q2Q aſcendendo emetiri poſſunt, (§. 141.) eadem corpuscula ſpatia 2PP, 2QQ à quiete perlabentia celeritates ſuas *p*, *q* &c. acquirere queunt, adeò ut (§. 150.) 2E. P2P = *pp*; 2.F. Q2Q = *qq*, & 2.G. NY = *nn*; loco *pp*, *qq*, *nn* ſubſtituendo valores inventos in ultima analogia numeri ſecundi hujus, erit M. DM : G. N. YN = 2.E. P. P2P + 2.F. Q. Q2Q + &c. hoc eſt (num. 1. hujus) 2M. M2M : 2G. N. NY = M. M2M : G. N. YN. Ergo cum conſequentes primæ & ultimæ rationis æquales ſint, antecedentes etiam æquabuntur; atque adeò M. DM = M. M2M, vel DM = M2M. Id eſt centrum gravitatis ad eandem altitudinem aſcendit, ex qua delapſum erat. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

206. Reſumendo ex num. 11 articuli præcedentis analogiam M. DC : G. N. YC (= R. P. PC + S. Q. QC + &c. : V. N. NC) = P. PC² + Q. QC² + &c. : N. NC², ſi loco rectarum DC, YC earum proportionales MC & NC in eadem analogia ſubſtituantur, fiet M. MC : G. N. NC = P. PC² + Q. QC² + &c. : N. NC², ex quâ facile elicitur ſequens formula generalis NC = (P. PC² + Q. QC² + &c.). G : M. MC pro determinatione penduli ſimplicis CN compoſito CPQ *iſochroni*, in qua formula M = E. P + F. Q + &c. & E. P, F. Q &c. pondera corporum P, Q &c. denotant, ac punctum M ipſorum centrum gravitatis.

Corollarium II.

207. Si ſingulæ E, F, &c. & G æquales fuerint, formula præcedentis corollarii fit NC = (P. PC² + Q. QC² + &c.) : M. MC, ubi nunc M = P + Q + &c. Atque hæc foret generalis formula pro omnibus figuris in ſyſtemate vulgari gravitatis uniformis in omnibus penduli partibus, quod ſecuti ſunt Celeberrimi Geometræ Hugenius & Jac. Bernoullius ſua methodo particulari.

Co-

Corollarium III.

208. Iisdem poſitis, quæ in corollario antecedenti, ſi duæ tantum particulæ P, Q penduli compoſiti ſpectentur, quarum M etiamnunc centrum gravitatis & aggregatum deſignet. Habetur (§. 171.) $PC^2.MQ + QC^2.MP = MC^2.PQ + MP.MQ.PQ$. Vel ſubſtitutis loco rectarum MQ, MP, & PQ ipſarum proportionalibus, quæ propter centrum gravitatis M particularum P, Q, eodem ac illæ ordine ſumta, ſunt P, Q, & P + Q ſeu M; fiet $P.PC^2 + Q.QC^2 = M.MC^2 + M.MP.MQ$, atque adeò formula præcedentis corollarii $CN = (P.PC^2 + Q.QC^2) : M.MC$, nunc fiet $CN = (M.MC^2 + M.MP.MQ) : M.MC$. Adeoque, ſi innumera ſumantur particularum P, Q paria, quibus totum pendulum compoſitum ſit, longitudo penduli ſimplicis CN compoſito iſochroni tunc erit $\int(M.MC^2 + M.MP.MQ) : \int M.MC$, ubi $\int$ ſignificat ſummam ſeu integrale illius quantitatis, cui litera $\int$ præfixa eſt. Idcirco, ſi cum Cel. Jac. Bernoullio particulæ P, Q inter ſe æquales, dicantur dp, & CM, x; MP verò vel MQ, y, hæ enim æquales erunt cum ipſæ P & Q æquentur, earumque centrum gravitatis ſit in puncto M; erit $CN = \int(2xxdp + 2yydp) : \int 2xdp = \int(xx + yy).dp : \int xdp$; quæ eſt ipſiſſima formula, quam Acutiſſ. Vir in Actis Academiæ Reg. Pariſ. Scient. 1703. ad diem 25. Apr. ex ſua methodo elicuit. Quomodo vero formula hæc figuris & ſolidis debeat applicari, non eſt hujus loci oſtendere, cum id pendeat à calculo ſummatorio, quem non patitur inſtitutum noſtrum prolixius exponere; legi interim poſſunt, quæ habet ſuper hanc rem Vir laudatiſſimus loco modo indicato.

Scholion.

209. Univerſalitas Canonis in corollario primo (§. 206.) exhibiti melius non poterit probari, quam ſi oſtendatur illum jam continere regulam definiendi centrum oſcillationis in quolibet pendulo compoſito, cujus partes diverſæ ſpecificæ gravitatis oſcillentur in fluido quodam homogeneo, aut, quod eodem recidit, cujus particulæ ex materia eadem ejuſdemve ſpecificæ gravitatis vibrationes ſuas in fluido diverſæ denſitatis peragant; qualem regulam nobis promittit Celeb. Joh. Bernoullius Act. Lipſ. 1713. pag. 88. Nam ſi ratio gravitatis ſpecificæ ponduſculi P ad fluidum, in quo oſcil-

 latur,

latur, ſit ut G ad G — E, & ratio gravitatis ſpecificæ ponduſculi Q liquoriſque ut G ad G — F, prædicta formula articuli 206. exhibebit longitudinem penduli ſimplicis CN in vacuo oſcillantis atque compoſito CPQ, quod in fluido vibrationes ſuas peragit, iſochroni.

Exempli cauſa ſit P globulus aureus, Q ferreus, atque pendulum CPQ oſcilletur in aqua; & quia gravitates auri, ferri & aquæ ſunt ut numeri 100, 42 & 5 ad invicem quam proxime, erit $G:G-E=100:5$, atque adeo $E=\frac{95}{100}G$; & $G:G-F=42:5$, adeoque $F=\frac{37}{42}G$; hinc quia (ſecundùm hypotheſin) $M=E.P+F.Q$, erit M hoc caſu æquale $(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q).G$; atque adeo formula generalis corollarii primi ſubſtitutione valoris M, fiet $NC=(P.PC^2+Q.QC^2).G:(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q).G=(P.PC^2+Q.QC^2):(\frac{95}{100}P+\frac{37}{42}Q)$. In qua P & Q denotant maſſas harum particularum, ſeu etiam pondera earum abſoluta, quæ (§§. 30, 152, 175.) maſſis ſemper proportionalia ſunt. Punctumque M eſt centrum gravitatis, non ipſorum corpuſculorum P, Q ſed eorum partium $\frac{95}{100}P$ & $\frac{37}{42}Q$. Hinc ergo liquet, centrum percuſſionis differre in hoc caſu à centro oſcillationis. Errant ergo, qui nulla habita ratione gravitatis ſubitò identificant, atque confundunt hæc duo centra oſcillationis & percuſſionis.

Si formula corollarii primi applicetur corporibus P, Q, quæ liquore ſpecificè leviora ſunt, totus formulæ denominator migrabit in quantitatem negativam, quod indicat pendulum ſitu inverſo reſpectu præcedentis caſus oſcillationes ſuas intra liquorem abſolvere deſcribendo arcus verſus fundum vaſis cavos exiſtente oſcillationis axe prope fundum. Quomodo prædicta formula pendulis compoſitis debeat applicari, in quibus ſingulæ partes in una eademque linea recta diſpoſitæ ſunt, nimis planum eſſe exiſtimo, quam ut ulla explicatione indigeat.

PROPOSITIO XXXVI. Theorema.

Fig. 47. 210. *Identitas centri oſcillationis & percuſſionis eo caſu, quo ſingularum penduli compoſiti partium pondera maſſis earundem proportionalia ſunt.*

Si

Si particulæ P, Q &c. virgis inflexilibus CP, CQ, PQ inter ſe connexæ convertantur circa axem CW, punctum in axe CN penduli N, in quo maxima vis in obſtaculum ipſi objectum eo exeretur, vocatur centrum percuſſionis, oſtendendumque eſt hoc punctum tantumdem ab axe oſcillationis CW diſtare, quantum centrum oſcillationis in caſu Coroll. 2 Prop. anteced. (§. 207). Radiis CP, CQ agantur normales PB, QE axi CM occurrentes in punctis A & D, per quæ & per centra corpuſculorum P, Q ducantur normales AO, DF, PG & QH ad axem CM. Atque hiſce poſitis ſtatim manifeſtum eſt converſione totius figuræ CPQ circa axem CW, particulas P, Q motum iri celeritatibus proportionalibus earum diſtantiis PC, QC ab hoc axe; atqui juxta ea, quæ ſupra (§. 53.) dicta ſunt, axis penduli CM eandem à particulis P, Q circa C in gyrum actis impreſſionem accipiet, quam ſi ejus puncta A & D, in quibus ſcilicet directiones ponderum in quolibet arcus ab ipſis deſcribendi puncto motum ſuum proſequi nitentium axi occurrunt, juxta directiones AB & DE illis ipſis celeritatibus impellantur, quas particulæ P & Q &c. habent; propterea factis AB, DE &c. æqualibus vel ſaltem proportionalibus homologe radiis CP, CQ qui velocitates exponunt, quibus particulæ P, Q in gyrum aguntur, quæſtio reducetur ad id, ut inveniatur centrum æquilibrii potentiarum $P.AB$ & $Q.DE$; ſit N hoc centrum, quod ita comparatum eſſe debet, ut ductis ex eo ad ſingulas PB, DE, &c. perpendicularibus Na, Nd &c. omnia facta $P.AB.Na$ æqualia ſint omnibus factis $Q.DE.Nd$. Sed ductis BO & EF parallelis CM, triangula AOB, NaA ſimilia præbent $AB.Na = AO.AN$ & triangula ſimilia DFE & NdD efficiunt $DE.Nd = DF.DN$; oportet ergo ut omnia $P.AO.AN$ ſint æqualia omnibus $Q.DF.DN$; conſiderentur tantum duæ P, & Q, eritque $P.AO.AN = Q.DF.DN$, vel $P.AO.AC - P.AO.NC = Q.DF.NC - Q.DF.DC$, atque adeò $P.AO.AC + Q.DF.DC = (P.AO + Q.DF).NC$; verum quia $AO = CG$ & $DF = CH$ propter triangula ſimilia & æqualia ABO & CPG, utpote in quibus hypothenuſæ AB & CP æquantur, ac propter ſimilia & æqualia triangula DEF & CQH, in quibus pariter DE & CQ ſunt æquales, fiet $P.AO.AC + Q.DF.DC$ $(= P.GC.AC + Q.HC.DC) = P.PC^2 + Q.QC^2$; & $P.AO + Q.DF = P.GC + Q.HC$, hoc eſt (§. 44) $= M.MC$; exiſtente puncto M centro gravitatis particularum P, Q & $M = P + Q$. Idcirco factis ſubſtitutionibus debitis in $P.AO.AC + Q.DF.DC = (P.$

AO + Q. DF). NC, habebitur $P.PC^2 + Q.QC^2 = M.MC.NC$, atque adeo $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2) : M.MC$. Quæ expreſſio prorſus eadem eſt cum ea, quam ſupra (§. 207.) reperimus pro centro oſcillationis in hypotheſi communi, qua particularum P, Q pondera maſſis ipſarum proportionalia ſunt, vel, quod eodem recidit, in qua ſingulæ E, F, G &c. quales ſupra (§. 198.) pro ſignificandis juxta maſſas P, Q, N gravitatis ſolicitationibus centralibus adhibuimus, æquales ſunt. In omni verò alia gravitatis hypotheſi different ab invicem centra oſcillationis & percuſſionis. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

211. Hinc ſi fuerint infinita particularum æqualium P, Q paria, tunc fiet $CN = \int(P.PC^2 + Q.QC^2) : \int M.MC$, adeoque nominando CN, t, atque retentis ſymbolis paragraphi 208. fiet $t = \int(xx + yy.dp) : \int xdp$, quæ eſt ipſiſſima iterum formula, in quam dicto loco incidimus, quamque alia methodo etiam reperit Cl. Jac. Bernoulli in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. Acad. 1704. ad diem 14 Apr.

Caput VI.

De Regulis motus in colliſione Corporum.

Definitiones.

I.

Corpora duo ſibi directe occurrere dicuntur, cum moventur in lineâ rectâ centra gravitatis jungente, atque per contactum eorumdem corporum transeunte.

II.

Velocitates corporum *propriæ* ſunt illæ, quibus corpora moventur. *Velocitas* vero eorundem *relativa* eſt ea, qua cum ad ſe mutuo accedunt. Idcirco celeritas relativa corporum ex oppoſitis plagis ſibi mutuo obviam venientium eſt *aggregatum* celeritatum eorundem propriarum. Sin vero velocius corpus alterum tardius ad eandem partem latum inſequatur, velocitas eorum relativa erit *exceſſus* velocitatis majoris propriæ ſupra minorem.

III.

III.

212. Corpora A, B in planis horizontalibus moveri atque inter ſe collidi intelliguntur ad id, ut motus eorum ante & poſt occurſum æquabiles evadant, nec iidem motus à gravitatis actione à plano utpote ſufflaminanda, in quo mobilia incedunt, quicquam alterentur. Celeritates mobilium propriæ ante occurſum deſignabuntur poſthac per lineas rectas AD, BD in ipſorum directionibus ſumtas, adeò ut quocunque modo mobilia A, B, incedant, dummodo non in rectis angulum continentibus ferantur, ipſorum celeritas relativa futura ſit AB. Directiones verò particulares corporum, aut potius directionum plagæ, deſignentur deinceps per ordinem, quo literæ A, D & B, D ſcribuntur. Proinde AD ſignificat mobile A ferri celeritate uniformi AD ex A verſus D, & B ferri velocitate hac linea BD expreſſa ex B etiam verſus D. Adeoque quoties ſignum D inter A & B cadit, toties ambo hæc corpora contrario ſenſu moventur, id eſt, ex oppoſitis partibus ſibi invicem obviam veniunt celeritate relativa AB, quæ hoc caſu compoſita eſt ex particularibus AD, BD; ſin vero ſignum D cadit extra AB, ambo corpora movebuntur ad eandem partem, in qua ſignum D poſitum eſt celeritate relativa AB æquali in tali caſu exceſſui velocitatis propriæ alterutrius mobilis ſupra celeritatem propriam alterius. Fig. 48.

213. Et quia motuum plagæ etiam per ſigna + & − ſubinde deſignari ſolent, probe ſciendum +AD idem eſſe ac −DA, & +DA idem ac −AD, & ſic de ceteris. Nam motui +AD contrarius eſt, ſeu in plagam contrariam dirigitur, tum −AD, tum etiam DA, atque adeo hæ duæ expreſſiones ſunt æquivalentes; pariter quia & +DA & −AD eidem motui +AD contrarii ſunt, notationes +DA & −AD unum idemque ſignificant, adeò ut una alteri ſemper ſufficere liceat, quod aliquando bene notatum, utile eſſe comperietur.

IV.

214. Celeritates corporum inter ſe colliſorum ante conflictum conſiderabimus quandoque tanquam acquiſitas lapſu verticali à quiete incepto motu gravium naturaliter accelerato; & celeritates eorundem poſt occurſum tanquam velocitates initiales corporum, quæ verticaliter in altum lata motu naturaliter retardato certas altitudines emeteri valent priusquam motus eorum aſcenſionalis penitus extinguatur.

V.

V.

215. Vis corporum abſoluta ante conflictum eſt altitudo, quam centrum gravitatis commune mobilium perlabi poteſt, quando unumquodvis corpus per ſuam altitudinem cadendo velocitatem ſuam propriam acquirit. Visque mobilium abſoluta poſt colliſionem, eſt altitudo, ad quam aſſurgere poteſt idem commune centrum gravitatis corporum, quando unumquodque horum corporum celeritate initiali ea, quam in conflictu acquiſivit, ſuam altitudinem aſcendendo abſolvit.

Fig. 50. 216. Sic poſito mobile A acquirere celeritatem ſuam propriam AD lapſu accelerato ex altitudine EA, & B ſuam celeritatem propriam deſcenſu accelerato ex altitudine FB, centrum gravitatis G mobilium A, B in punctis E, F exiſtentium cadet ex altitudine GC. Et ſi mobilis A poſt conflictum celeritas uniformis ſit D*a* talis, ut eâ tanquam velocitate initiali rectam *ae* aſcendendo conficere poſſit mobile A, alterumque B altitudinem *bf* celeritate initiali D*b*, quæ eſt velocitas uniformis, quam mobile iſtud B, in ipſo conflictu acquiſivit; commune corporum A, B gravitatis centrum *c* cenſetur aſcendere poſſe vi abſoluta mobilium poſt conflictum in recta verticali *cg* uſque ad *g*.

VI.

217. Corpora, quæ nonniſi vi inertiæ materiæ prædita ſunt, dicantur deinceps corpora inertia. Corpora verò, quæ vim actuoſam habent repellendi corpora ea ipſa vi qua impulſa fuerunt, dicantur corpora actuoſa. Corpora inertia alias etiam nominari ſolent *non elaſtica*, ac corpora actuoſa *elaſtica*.

HYPOTHESIS.

218. *Cum corpora actuoſa inter ſe colliduntur eadem manet vis eorum abſoluta poſt conflictum, quæ erat ante eundem conflictum.*

Excipimus corpora inertia, quorum vis abſoluta poſt colliſionem nunquam eadem eſt, quæ erat ante concurſum, quandoquidem hæc vis in ipſo conflictu quandoque penitus abſorbetur, ſcilicet cum mobilia celeritatibus maſſis ſuis reciproce proportionalibus ſibi invicem obviam veniunt. Sed ejusmodi corpora penitus inertia forte nulla dantur, nam etiamſi pleraque corpora perfecta actuoſitate vel elaſti-

elaſticitate prædita non ſunt, quod particulæ eorum compreſſæ ſeſe in priſtinum ſtatum reſtituere non valeant, eorum ſaltem elementa perfecte elaſtica eſſe queunt, à quo ſtatuendo nullus ex præſtantioribus Geometris hujus ævi abhorrere videtur. Verum quicquid rei ſit, revertor ad corpora actuoſa, quorum vis abſoluta eadem manet vi hujus hypotheſeos, ſi commune eorum centrum gravitatis ad eandem altitudinem *cg* aſcendit poſt conflictum, ex qua delapſum erat ante occurſum eorum, hoc eſt, poſitis quæ ſupra (§. 216.) ſi $cg = GC$.

219. Vires abſolutas corporum æſtimamus juxta altitudines, ad quas retardato ſuo à gravitate motu pertingere poſſunt, vel accuratius per facta ex his altitudinibus in maſſas corporum; in hac virium æſtimatione præeuntem habemus Illuſt. Leibnitium, qui eandem non uno loco in Actis Eruditorum Lipſ. indicavit quidem, non tamen demonſtravit, etſi apodictice demonſtrari poteſt, ut forte alia id occaſione oſtendemus. Non ignoro perplures eſſe inſigniſſimos viros, quibus talis vires æſtimandi ratio non arrideat, exiſtimantes eam à quantitatibus motus petendam eſſe. Celeb. Papinus ſane diu multumque cum Leibnitio diſputans rotunde negavit corporum vires altitudinibus, quas corpora aſcendendo conficere poſſunt, proportionales eſſe; quin imo vires eas temporibus proportionari putat, quibus altitudines modo nominatæ abſolvuntur vel etiam celeritatibus initialibus mobilium æqualium. Sed in probando hoc ſuo aſſerto incautus labitur ipſe, principium aſſumens aperte falſum; & hoc principium falſum eſt, quod exiſtimet corpora cum diverſis velocitatibus initialibus aſcendentia æqualem à gravitate ipſis reſiſtente ictuum numerum exceptura eſſe temporibus æqualibus. Sed ſi plures docti Geometræ, præjudicatâ opinione communis vires æſtimandi rationis per quantitatem motus detenti, à nobis diverſa ſentiunt, adſunt tamen alii acutiſſimi Geometræ, qui Leibnitianam ultro admittunt, quin imo jam ante complures annos Nob. Hugenius eadem quodammodo uſus eſt in demonſtrationibus ſuarum regularum motus ex percuſſione, principii loco in iis aſſumens, non poſſe commune centrum gravitatis corporum inter ſe colliſorum altius aſcendere poſt occurſum, quam deſcenderat ante conflictum; non tamen ſupponit aſcenſum centri gravitatis deſcenſui ejusdem æqualem eſſe; alias vero aſſumſit hypotheſes, quæ æquivalentes ſunt noſtræ de æqualitate aſcenſus atque deſcenſus centri gravitatis poſt & ante conflictum corporum. Idcirco hac noſtra hypotheſi poſita

regulas motus corporum actuoſorum facili ratione inde derivabimus; ſed priusquam hanc tractationem aggrediamur, unicam propoſitiunculam præmittere libet circa motum corporum inertium poſt conflictum.

PROPOSITIO XXXVII. Theorema.

220. *Corporum inertium, atque ſibi invicem directe occurrentium, celeritas & directio poſt conflictum eſt eadem, quæ erat ante communis ipſorum centri gravitatis occurſum.*

Fig. 48. Sint AD celeritas uniformis corporis A, & BD velocitas corporis B ante conflictum, probandum eſt utrumque corpus A & B motum iri poſt occurſum celeritate CD, quæ eſt celeritas, qua centrum gravitatis C mobilium A, B ferebatur ante colliſionem, exiſtente AC ad BC, ſicut maſſa B ad maſſam A, ſeu ut pondus B ad alterius A pondus.

Demonſtr. Quia motus corporum in colliſione aliter non variantur quam pro ratione inertiæ materiæ, in ipſo conflictu res eodem recidit, ac ſi corpora conjuncta, ac velut ſibi invicem agglutinata movenda eſſent quantitate motus æquali exceſſui, quo motus major alterutrius ex mobilibus minorem alterius excedit, ſi corpora ex oppoſitis partibus ſibi invicem obviam veniant, vel etiam æquali aggregato quantitatum motus utriusque corporis, ſi ambo ad easdem partes tendant. Unde cum in motus oppoſitione & caſu, quo corporum centrum gravitatis C cadit inter puncta D & B (§. 44.) ſit $B.BD - A.AD = (A+B).CD = A.CD + B.CD$, cumque $B.BD - A.AD$ ſit exceſſus, quo motus B. BD fortioris B excedit motum alterius A, patet ambo corpora A & B poſt contactum celeritate æquali CD latum iri ex C verſus O, id eſt celeritate & directione, qua centrum eorum gravitatis ante impactum ferebatur.

Sin vero ambo corpora A, B ad eandem partem verſus O ſuis celeritatibus particularibus AD, BD moveantur, erit $A.AD + B.BD = (A+B).CD = A.CD + B.CD$, hoc eſt aggregatum motuum corporum A, B ante conflictum æquatur quantitati motus eorundem, ſed celeritate CD centri gravitatis ante ictum movendorum; feretur ergo utrumque hac celeritate CD verſus O. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

221. *Si mobilia* A, B *in directionibus obliquis* AD, BD *quemlibet angulum* ADB *continentibus, atque celeritatibus hisce ipſis lineis* AD, BD *expreſſis ſibi mutuo occurrant, commune illorum gravitatis centrum* C *eadem velocitate cum* CD *atque in directione hujus* CD *productæ in* d *poſt conflictum feretur.* Fig. 49.

Sit MN linea jungens centra mobilium A, B in caſu contactus, atque ad eam demiſſæ ſint ex centris corporum A, B eorumque communi centro gravitatis C normales A*a*, B*b*, & C*c*, motus juxta AD reſolvetur in laterales A*a*, & *a*D, motusque BD in laterales B*b*, *b*D; at verò, cum motus juxta A*a* & B*b* paralleli ſint, corpora hiſce motibus in ſe invicem agere nequeunt, reſtant ergo ſoli motus *a*D & *b*D, quibus in ſe mutuo agunt. Jam ſi corpora A & B exiſterent in *a* & *b*, atque celeritatibus *a*D, *b*D ſibi mutuo obviam venirent, poſt contactum utrumque moveretur (§. 220.) celeritate $D\kappa = cD$, exiſtente *c* eorum centro gravitatis, cum ſit $AC : BC = ac : bc = B : A$, unde quia motus aD & bD in obliquis virtualiter continentur, ideò hæc motuum modificatio etiam in conflictu virtualiter accidiſſe cenſenda eſt: propterea ducta per punctum κ indefinita κP, in ea ſumantur $\kappa\alpha = Aa$ & $\kappa\beta = Bb$, ac quia motus A*a*, B*b* in ipſo conflictu nullam mutationem ſubierunt, mobile A poſt conflictum movebitur, aut moveri nitetur, motibus lateralibus $D\kappa$, & $\kappa\alpha$, ex quibus reſultat motus $D\alpha$; alterum verò B motibus lateralibus $D\kappa$ & $\kappa\beta$, ex quibus naſcitur motus $D\beta$. Sit *d* centrum gravitatis corporum A, B in α & β exiſtentium, eritque (§. 44.) $A.\kappa\alpha + B.\kappa\beta = (A + B).\kappa d.$ item $A.Aa + B.Bb = (A + B).Cc$, & (conſtr.) $A.\kappa\alpha + B.\kappa\beta = A.Aa + B.Bb$, ergo etiam $(A + B).\kappa d = (A + B).Cc$, vel $\kappa d = Cc$: atqui per præcedentem eſt etiam $Cc = D\kappa$, ergo $Dd = CD$, atque adeò poſt conflictum centrum gravitatis mobilium A, B movetur celeritate D*d* æquali illi C*c*, quà ante occurſum incedebat. Quod erat demonſtrandum.

Tantum de corporibus inertibus ſeu vi elaſtica carentibus, ſequuntur leges motus corporum elaſticorum.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

222. *Poſita eadem quantitate vis abſolutæ corporum inter ſe colliſorum ante & poſt occurſum eorum directum, facta ex maſſis corporum*

in quadrata velocitatum collective ſumta ante & poſt conflictum æquantur.

Hoc eſt $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db^2$, exiſtentibus Da, Db celeritatibus corporum A, B poſt colliſionem, & AD ac BD velocitatibus ante conflictum.

Demonſtr. Poſito A acquiſiviſſe celeritatem ſuam AD caſu ex altitudine EA, alterumque B ex altitudine FB, diviſaque recta EF jungente puncta E, F in ratione reciproca ponderum A, B, linea GC denotabit deſcenſum centri gravitatis mobilium A, B; & *ea*, *fb* denotent altitudines, quibus accelerato motu tranſmiſſis mobilibus acquiruntur celeritates Da, Db, cum quibus deinceps in altum ferri incipientia iterum ad eaſdem altitudines *ae*, *bf* aſſurgere poſſunt; quo motu aſcenſionali eorum centrum gravitatis *c* aſcendet per altitudinem *cg*. Jam quia (§. 218.) eadem manet vis abſoluta corporum A, B ante & poſt conflictum eorum, erit $GC = cg$, vel poſito C ſignificare $A + B$, erit $C.GC = C.cg$; atqui (§. 44.) $C.GC = A.EA + B.FB$, & $C.cg = A.ae + B.bf$, ergo etiam $A.EA + B.FB = A.ae + B.bf$; verum (§. 150.) rectis EA, FB, *ae*, *bf* proportionalia ſunt AD^2, BD^2, Da^2, & Db^2, unde ſufficiendo hæc illarum loco in proxime antecedenti analogia, reperietur $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db^2$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

223. Idcirco erit etiam $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$. Nam $A.AD^2 = A.AC^2 + 2.A.AC.CD + A.CD^2$, & $B.BD^2 = B.BC^2 - 2.B.BC.CD + B.CD^2$, ergo $A.AD^2 + B.BD^2 = A.AC^2 + B.BC^2 + (A+B).CD^2, + 2.A.AC.CD - 2.B.BC.CD$ (vel quia centrum gravitatis C efficit $A.AC = B.BC$ vel $2A.AC - 2B.BC = 0$, & $C = A + B$, erit) $= A.AC^2 + B.BC^2 + C.CD^2$ (ſeu quia $B.BC = A.AC$ vel $B.BC^2 = A.AC.BC$, etiam) $= A.AC.AB + C.CD^2$. Pari argumento inferetur $A.Da^2 + B.Db^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$. Adeoque cum habeamus $A.AD^2 + B.BD^2 = A.Da^2 + B.Db$; erit etiam $A.AC.AB + C.CD^2 = A.ac.ab + C.Dc^2$.

PROPOSITIO XL. Theorema.

224. *Centrum gravitatis corporum actuoſorum inter ſe colliſorum eadem poſt occurſum celeritate ac directione feretur, qua ante incedebat, ea-*

eademque erit poſt impulſum à ſe mutuo recedentium corporum celeritas relativa, quæ ante conflictum erat accedentibus.

Poſitis quæ in præcedenti propoſitione, probandum eſt fore $Dc = CD$ & $ab = AB$, nam AB eſt celeritas relativa ante, & *ab* celeritas relativa eorundem corporum A, B, poſt occurſum, punctaque C, *c* centra gravitatis indicant in utroque caſu. Fig. 50.

Demonſtr. Fingatur lineam rectam, in qua corpora moventur, infinite longam eſſe, atque moveri verſus *m* velocitate infinite parva *Am*, huncque motum communem etiam corpora A, B in linea infinita incedentia participabunt; unde factis ſingulis $D\delta$, $a\alpha$, $c\kappa$, $b\beta$ æqualibus *Am*, globus A movebitur tantum celeritate abſoluta $A\delta$ loco ipſius AD ante occurſum; quandoquidem ex motu ejus proprio AD communis $D\delta$ utpote contrarius eſt auferendus: B verò incedet velocitate $B\delta$ ante conflictum, accedente ejus motui proprio BD communi $D\delta$ alteri BD conſpirante. Poſt conflictum autem celeritates Da, Db, mutabuntur in $D\alpha$ & $D\beta$; verùm quia omnes $b\beta$, $c\kappa$, $a\alpha$, $D\delta$ (ſecundùm hypotheſin) æquales, erunt $\alpha\kappa = ac$, & $\alpha\beta = ab$; atque adeò velocitates AC, *ac*, nec non AB & *ab* inalteratæ manent in æqualitate ſuperiore (§. 223.) ſolis CD & *Dc* variationem ſubeuntibus. Idcirco ſi in ea æqualitate $A. AC. AB + C. CD^2 = A. ac. ab + C. Dc^2$ loco CD & *Dc* ſubſtituantur $C\delta$ & $D\kappa$, fiet $A. AC. AB + C. C\delta^2 = A. ac. ab + C. D\kappa^2$, quæ ex altera ſubducta relinquet $C. CD^2 - C. C\delta^2 = C. Dc^2 - C. D\kappa^2$, vel $CD^2 - C\delta^2 = Dc^2 - D\kappa^2$, aut etiam $2CD. D\delta - D\delta^2 = 2Dc. c\kappa - c\kappa^2$, hoc eſt quia $D\delta = c\kappa$, erit $2CD. D\delta = 2Dc. c\kappa$, atque adeò $CD = Dc$. Fig. 51.

Porrò ex æqualitate $A. AC. AB + C. CD^2 = A. ac. ab + C. Dc^2$ abjectis æqualibus $C. CD^2$ & $C. Dc^2$, reſtabit $A. AC. AB = A. ac. ab$, vel $AC. AB = ac. ab$. Verum eſt $AB : AC = ab : ac$, vel $AB^2 : AC. AB = ab^2 : ac. ab$, igitur propter $AC. AB = ac. ab$, erit $AB^2 = ab^2$ atque adeò $AB = ab$. Quæ erant demonſtranda.

PROPOSITIO XLI. Problema.

225. *Datis corporibus* A, B *utcunque inæqualibus ſibi directè occurrentibus cum datis celeritatibus, invenire velocitates eorumdem corporum poſt conflictum.* Fig. 52.

Ex præcedenti propoſitione hujus Problematis ſolutio facillima eſt. Nam factis $Dc = CD$, item $ca = CA$, & $cb = CB$, ubi obſervandum punctum D, quo rectæ velocitatum ante occurſum repræ-

ſentatrices terminantur, ſemper cadere debere inter puncta C, *c*, quibus centrum mobilium ante & poſt occurſum ſignatur, punctaque *a* & *b* reſpectu puncti *c*, eodem ordine poſita eſſe, quo alterum C ſitum eſt reſpectu corporum A, B. Quibus obſervatis erit ſemper D*a*, velocitas corporis A, & D*b* corporis B poſt conflictum.

Demonſt. Quia (conſtr.) $ac = AC$, & $bc = BC$, erit $ab = AB$, & quia porrò (conſtr.) $Dc = CD$, hoc eſt, quia celeritas relativa corporum poſt colliſionem æqualis relativæ ante eandem, & pariter celeritas atque directio centri gravitatis utroque caſu eadem eſt, per præcedentem corpora A, B non aliis quam velocitatibus D*a*, D*b* moveri poſſunt poſt colliſionem. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

226. Hinc 1°. ſi mobilia A, B ad eandem partem ferantur, adeò ut punctum D cadat extra AB, ſed ad partes corporis B; erit $Da = CD - AC$ & $Db = CD + CB$. Sin verò punctum D ad partem corporis A extra AB cadat; fient $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$. 2°. Si corpora A, B ex adverſis partibus venientia inter ſe collidantur, ita ut D cadat inter A & B, & punctum C ſit inter D & A, erit $Da = CD - AC$, & $Db = CD + CB$. Ac vice verſa erit $Da = CD + AC$, & $Db = CD - CB$, quoties centrum gravitatis corporum ſitum eſt inter D & B.

Corollarium II.

227. Adeoque ſi corpus A celeritate AD impingatur in quieſcens B, ita ut puncta D & B confundantur, huic quieſcenti B dabit impellens A celeritatem duplam ipſius CB. Atque adeò ſi ambo A & B fuerint æqualia, in ipſo conflictu ſiſtetur motus corporis impellentis A, alterumque B tota velocitate AB deinceps feretur, qua agens A in ipſum impegerat.

Corollarium III.

228. Sin vero corpora ex oppoſitis partibus obviam veniant celeritatibus propriis AD, BD corporibus B, A reciproce proportionalibus, ita ut D incidat in C, utrumque corpus, qua advenerat velocitate, reſiliet. Etenim hoc caſu evaneſcit CD.

Co-

Corollarium IV.

229. Generaliter, ſi corpora A, B dicantur m, n, eorum velocitates propriæ ante occurſum u & r, invenietur Da celeritas corporis A poſt conflictum $=(mu-nu+2nr):m+n, =u, +(u-r).2n:m+n$, & Db vel celeritas corporis B poſt conflictum $=(2mu+mr-nr):m+n, =r, +(u-r).2m:m+n$. Hæ expreſſiones elicitæ ſunt ex debitis ſubſtitutionibus valorum linearum CD, AC & BC in expreſſionibus Corollarii I. Da = CD − AC, & Db = CD + CB, pro caſu, quo mobilia ante concurſum ad eaſdem partes moventur. Formulæ pro altero caſu corporum ex oppoſitis partibus in ſe mutuo irruentium ex hisce jam exhibitis elicientur mutando duntaxat ſigna quibus litera r affecta eſt, eritque Da $=u, +(u+r).2n:m+n$, & Db $=-r, +(u+r).m+n$.

PROPOSITIO XLII. Theorema.

230. *Corpus* A *celeritate* AD *latum interventu corporis medii* X *eandem corpori quieſcenti* B *velocitatem dabit, quam interventu alterius cujusdam corporis medii* Y, *ſi ipſum impellens* A *fuerit ad* X *ſicut alterum* Y *ad quieſcens corpus* B.

Hoc eſt, ſi corpus A celeritate AD primum in corpus X irruat, & hoc celeritate ab impellente accepta deinceps incurrat in corpus quieſcens B; dico hoc corpus B eandem celeritatem accepturum, quàm ſi ab alio corpore Y impulſum fuiſſet celeritate ea, quam Y pariter quieſcens à corpore A itidem celeritate AD ipſi occurrente accepiſſet, exiſtente ſcilicet A ad X ut Y ad B. Ut propoſitum demonſtretur, conſtructio Propoſitionis XL. eſt geminanda, & pro utroque corpore intermedio X & Y ſeorſim ponenda: propterea figura, in qua lineæ majuſculis litteris ſignantur, reſpicit corpus intermedium X, & quæ iiſdem, ſed minuſculis literis notantur, pertinent ad figuram corporis alterius intermedii Y,

Jam ex §. 227. conſtat corpus X accepturum ab impellente A celeritatem DB duplam ipſius CD, exiſtente C centro gravitatis corporum A, X, atque adeò AC ad CD in ratione corporis X ad corpus A; ac diviſa DB in puncto E, ita ut DE ſit ad EB ſicut corpus B ad medium X, mobile X daturum alteri quieſcenti B, in quod impingat velocitate DB, celeritatem duplam ipſius EB. Similis

con-

conſtructio, ſed reſpectu corporum *a*, Y & *b*, inter quæ ipſa *a* & *b* corporibus A & B æquantur, repetita intelligatur, accipietque corpus *b* à medio Y celeritatem 2*eb*. Probandum fore EB = *eb*.

Demonſtr. Quia (ſecundùm hypotheſin) eſt A : X = Y : B, & propter centrum gravitatis C, A : X = CD : AC; nec non Y : *b*(B) = *be* : *de*, erit CD : AC = *be* : *de*, vel invertendo & componendo AD : CD = 2.*cd*(*db*) : *be*; adeoque etiam duplicatis conſequentibus AD : DB (2.CD) = 2*cd* : 2.*be* = *cd* : *be*. Verùm eſt etiam B : X = Y : A, hoc eſt DE : BE = *ac* : *cd*, ergo & componendo DB : BE = *ad* : *dc*, hinc etiam *ad* (AD) : DB = *cd* : BE, ſed paulò ante erat AD : DB = *cd* : *be*; ergo etiam *cd* : *be* = *cd* : BE, atque adeò *be* = BE. Quod erat demonſtrandum.

231. *Aliter.* Sint LN = AD = *ad*, PN = CD; *ac* pN = *cd*, & denique dividatur LN in Q & *q*, ut LN ſit ad QN ſicut B + X ad X, & LN ad *q*N ut B + Y ad Y, & oſtendetur puncta P, *q*, item & *p*, Q coincidere. Nam quia (ſecundùm hypotheſin) A : X = Y : B, erit A + X : A = B + Y : Y, id eſt AD : CD = LN : PN = LN : *q*N, ergo PN = *q*N atque adeo coincidunt puncta P & *q*. Item quia B : X = Y : A, & B + X : X = A + Y : A, erit (conſtr.) LN : QN (= *ad* : *cd*) = LN : *p*N, ac proinde etiam QN = *p*N; coincidunt ergo puncta *p*, Q. Hisce poſitis, & quia AD : DB (2.CD) = LN : 2.PN; & DB : 2.EB = LN : 2.QN; erit ex æquo AD : 2.EB = LN^2 : 4.PN.QN. Eodem argumento invenietur *ad* : 2.*eb* = LN^2 : 4.*p*N.*q*N, ergo invertendo erit ex æquo 2.*eb* : 2.EB = 4.*p*N.*q*N : 4.PN.QN, vel *eb* : EB = *p*N.*q*N : PN.QN : unde cum oſtenſum ſit eſſe *p*N = QN & *q*N = PN, erit omninò *eb* = EB. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

232. Si loco alterutrius ex mediis X, Y ſumatur corpus M medium proportionale inter A & B, atque adeo inter X, & Y, cum A ſit ad X = Y : B; atque LN dividatur in R, ut tota LN ſit ad RN ſicut A + M ad A, celeritas initialis mobilis A erit ad celeritatem corpori B interventu medii M acquiſitam, ſicut LN^2 ad 4.RN^2. Atque adeò celeritas, quam acquiret corpus B interventu alterutrius X vel Y erit ad celeritatem, quam acquiret interventu medii M, ſicut 4.PN.QN ad 4.RN^2, vel ſicut PN.QN ad RN^2. Nam quia A + M : M = LN : RN, & A + M : A = B + M : M, erunt

hoc

hoc caſu ambæ PN, QN cum inter ſe, tum etiam RN æquales, unde cum generaliter ſit $AD : 2EB = LN^2 : 4.PN.QN$, erit in hoc caſu particulari celeritas corporis A, ad celeritatem ipſius B abs M acceptam $= LN^2 : 4.RN^2$, & quia (§. 231.) velocitas ipſius B ab alterutro X vel Y accepta, eſt ad celeritatem initialem corporis A, ſicut $4.PN.QN$ ad LN^2; erit ex æquo celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, ad celeritatem ejusdem à corpore M acquiſitam ſicut $4.PN.QN$ ad $4.RN^2$ hoc eſt, ſicut $PN.QN$ ad RN^2.

Corollarium II.

233. Quia (conſtr.) $PN : LN = A : A + X$, & $LN : RN = A + M : A$, erit ex æquo $PN : RN = A + M : A + X$. Similiter invenietur $QN : RN = A + M : A + Y$, ergo per compoſitionem rationum erit $PN.QN : RN^2 = (A + M)^2 : (A + X . A + Y) = AA + 2.AM + MM : AA + (X + Y). A + XY = AA + 2.A.M + AB : AA + (X + Y). A + AB = A + 2M + B : A + X + B$, nam $A.B = MM = XY$, adeoque unum alterius loco, ut factum eſt, ſubſtituere licet. Jam quia X, M & Y ſunt in ratione continua, erit $X + Y$ major quam $2.M$ atque adeo $A + X + Y + B > A + 2M + B$; hinc erit $RN^2 > PN.QN$; unde cum (§. 232.) celeritas corporis B ab alterutro X vel Y accepta, ſit ad ejusdem celeritatem a corpore M ipſi impreſſam, ſicut $PN.QN$ ad RN^2, liquet hanc celeritatem illa perpetuo majorem eſſe. Imò hæc velocitas mobili B a corpore M collata major erit ea, quam idem B a corpore A celeritate AD ipſum impuliſſet, nam loco corporis X intelligi poteſt quodvis corpus; atque adeo unum ipſi A æquale, quod ab impellente A totam celeritatem (§. 227.) CD accipiet, adeò ut idem ſit, ſive mobile A cum ſua celeritate AD immediate impingat in quieſcens B, ſive id impellat ope intermedii ipſi A æquali, cui totam ſuam celeritatem contulerit; unde cum generaliter oſtenſum ſit, interventu cujusvis corporis X, diverſi ab M, minorem corpori B velocitatem collatum iri quam a medio proportionali M inter extrema A, & B; ſequitur neceſſario etiam corpus A alteri B minorem daturum eſſe celeritatem quam M, etiamſi immediate in id impingat. Atque hoc corollarium continet demonſtrationem facilem Propoſitionis penultimæ tractatus *Hugenii* de Motu corporum ex Percuſſione.

Corollarium III.

234. Hinc primum ex corporibus continue proportionalibus ultimo majorem celeritatem dabit per corpora quotcunque interpoſita continue proportionalia, quam ſi eidem quieſcenti immediate occurriſſet.

Scholion.

Fig. 54. 235. Ex præcedentibus jam facile elicietur regula determinandi velocitatem, quam ultimum corpus quieſcens ex ſerie quotcunque continue proportionalium accipiet transmiſſo motu à primo in ſecundum, tertium, quartum &c. Primum corpus dicatur A, ejusque celeritas ab initio AD, ultimum V: dividatur celeritas initialis AD in puncto C, in reciproca ratione ſecundi corporis ad primum, vel, quod idem eſt, in ratione cujuslibet corporis in ſerie proportionalium ad corpus, quod illud in eadem ſerie proxime præcedit, ita ut AC ad CD ſit in hac eadem ratione, deinde ratio totius AD ad duplam CD continuetur in tot terminis uno minore quot ſunt ſeriei corporum proportionalium, quorum ultimus ſit Q, dico hanc Q exponere celeritatem ultimo corpori V collatam ab omnibus præcedentibus. Adeoque ſi numerus terminorum fuerit $n+1$, celeritas initialis AD primi corporis erit ad Q celeritatem ultimo U acquiſitam, ſicut AD^n ad $(2CD)^n$, hinc habebitur $Q=(2CD)^n : AD^{n-1}=(2CD)^n$, ſumta ſcilicet AD inſtar unitatis, quod hoc loco fieri licet.

236. *Exempl.* Sint centum corpora in continua ratione dupla, motusque primum incipiat à maximo, quæritur Q ſeu celeritas minimo V conferenda. Hoc caſu erunt $AC=\frac{1}{3}$, ec $CD=\frac{2}{3}$, atque adeo $(2.CD)^n=(\frac{4}{3})^{99}$, eſt enim $n=99$. Igitur habemus $Q=(\frac{4}{3})^{99}$, & Log-us $Q=99.$ Log-um $\frac{4}{3}$; atqui Log-us $(4:3)=0.1249388$ qui Logarithmus ductus in 99 dat $99.\ \text{Log.}(4:3)=12.3689412=$ Log. Q, ergo $Q=2338520732310$ quam proxime, nam hic numerus log-mo illi, cujus characteriſtica eſt 12. proxime convenit; atque adeo celeritas, quam corpus centeſimum accipere debet, eſt ad celeritatem primi A ut 2338520732310 ad 1 proxime.

Sin vero motus a minimo incipiat, erit hujus celeritas ab initio ad velocitatem, quam centeſimo & maximo dabit interpoſitis 98. reliquis continue proportionalibus, ſicut numerus 2710371348314606 7

ad

ad unitatem proxime. Hugenius in poſtrema propoſitione tractatus ſupra (§. 233.) laudati numeros pro hisce caſibus noſtris minores exhibet, transſcriptorum forte aut calculi lapſu.

PROPOSITIO XLIII. Theorema.

237. *Centrum gravitatis duorum corporum ſphæricorum elaſticorum ſibi invicem oblique occurrentium, eadem directione & celeritate feretur poſt conflictum, quibus ferebatur ante concurſum.* Fig. 55.

Globi elaſtici P, Q ſibi mutuo occurrant in D celeritatibus propriis PD, QD, & poſt occurſum reſiliant celeritatibus propriis D*p*, D*q*, ita ut hæ lineæ eodem tempore æquabili motu abſolvantur, quo rectæ PD, QD ante ſynodum; ſintque puncta M & m centra gravitatis globorum in P & Q, item in *p*, *q* exiſtentium; probandum eſt rectas MD & D*m* tum æquales, tum etiam in directum poſitas eſſe; quandoquidem MD exponit velocitatem & directionem centri gravitatis M ante conflictum, D*m* vero velocitatem & directionem centri communis gravitatis poſt colliſionem. Sit D punctum contactus globorum, & BA recta jungens centra eorundem, quæ, ubi globi ſe mutuo contingunt, per punctum contactus transibunt; ex centris Globorum P, Q demiſſæ ſint ad AB perpendiculares PA, QB, & ex M recta MC reliquis QB, AP parallela, quibus poſitis, manifeſtum eſt ex art. 29, motui juxta PD æquipollere laterales PA & AD, & motui QD laterales QB & BD. Jam quia motus juxta PA & QB paralleli ſunt, globi quatenus motibus hisce agitantur, in ſe mutuo agere non poſſunt, ſed ſoli motus juxta AD & BD, utpote directe contrarii, in caſu conflictus conſiderandi veniunt reliquis tantisper ſepoſitis & poſtea iterum reſumendis. Porrò quia M eſt centrum gravitatis globorum in P & Q exiſtentium, etiam C eorundem globorum in A & B poſitorum erit centrum gravitatis; adeoque factis Dc = CD, nec non ca = CA & *cb* = CB, erit (§. 225.) D*a* celeritas propria globi A, & D*b* celeritas alterius B, poſt colliſionem in indefinita linea *ab*. Porro per *a* & *b* ductæ ſint rectæ *ap* = AP, & *bq* = BQ ipſi AB normales, quo poſito & quia in ipſo conflictu motus juxta PA & QB, utpote paralleli, nullam mutationem ſubire potuerunt, hi motus poſt impulſum illibati ſunt conſervandi; atque adeo poſt congreſſum corpus P à puncto D recedet motu D*p* reſultante ex lateralibus D*a* & *ap*, alterumque Q motu D*q* naſcente ex lateralibus D*b* & *bq*. Verum

 quia

quia (conſtr.) $ca=CA$; $cb=CB$; $ap=AP$; & $bq=BQ$, figura *abqp* ſimilis & æqualis erit figuræ alteri ABQP, atque adeo $cm=CM$: unde cum (conſtr.) etiam ſit $Dc=CD$, triangulum *Dcm* ſimile & æquale erit triangulo DCM, atque adeo lineæ MD & *Dm* in directum poſitæ erunt, hinc centrum gravitatis globorum P, Q poſt conflictum eadem celeritate & directione quâ ante, progredietur. Quod erat demonſtrandum.

DE
VIRIBUS ET MOTIBUS
CORPORUM
LIBER SECUNDUS.

DE
CORPORIBUS FLUIDIS.

SECTIO I.

De Viribus Fluidorum à Gravitate.

SI corpora fluida cum duris & conſiſtentibus in hoc conveniunt, quod extenſa ſunt & particulis ſeu moleculis duris componuntur; ab iiſdem tamen differunt, quod moleculæ fluidorum non ſolum exiliſſimæ ſunt eousque, ut omnem oculorum etiam microſcopiis armatorum aciem fugiant, ſed etiam disjunctæ & valde mobiles, quæ cuilibet corpori ſolido trajicienti facile cedere atque varie inter ſe agitari queunt: cum ex adverſo dura corpora conſtent partibus ſibi invicem varie implexis atque adeo ægre ſeparandis, ita ut nulla particularum ſenſibiliter moveri poſſit, quin totum partium aggregatum, hoc eſt corporis Maſſa eundem motum participet.

238. Eſt igitur *Corpus Fluidum, cujus elementa* (§. 14.) *à vi quacunque in ea agente commoveri poſſunt quantumque tota fluidi Maſſa oculorum judicio quieſcere videatur*, ut jam ſupra §. 25. dictum. Sic Aqua, Aer, Oleum, Hydrargyrus &c. ſunt corpora fluida, item metalla fuſa, quandiu in fluore ſunt.

Adeoque diſtinctus fluidorum corporum conceptus ſummam involvit molecularum exilitatem, talemque earum configurationem,

ut par inde agilitas provenire queat. Et hisce ſpecificis proprietatibus fluida diſtinguuntur à ſolidis in minutiſſimas itidem particulas diſcerptis, non tamen tantæ agilitatis nec parvitatis, ut eadem qua fluidi elementa inter ſe agitari queant facilitate. Sic frumenta in ſubtiliſſimum pollinem contrita in corpus fluidum ideo non abeunt, quia hujusmodi pollinis particulæ ad eam exilitatem non accedunt; nec proinde ad eam mobilitatem perveniunt quam fluidorum natura requirit.

239. Cum de fluidorum viribus agere ſuſcipimus, non ea nobis eſt mens, ac ſi particularum ſeu elementorum figuras definiri atque digito, ut ita dicam, monſtrari poſſe crederemus, nec proinde curioſius in has elementorum corporum figuras inquiram, quia hæ nimis forte variare ſolent quam ut commode redigi poſſint ſub mathematicos conceptus; nil enim impedire exiſtimo, quominus unius ejusdemque fluidi particulæ tam ratione magnitudinis, quam ratione figuræ, infinitis modis variare poſſint. Idcirco figurarum indagationem, quibus cujuslibet fluidi particulæ circumſcriptæ eſſe debent, Phyſicis relinquam, mihique deinceps ſufficiet noſſe, figuras particularum cujusque fluidi, qualescunque eæ fuerint, mobilitati earum nihil officere ipſo facto, cum particulæ ſint (ſecundùm hypotheſin) alicujus fluidi, id eſt ſumme mobiles.

240. Nec etiam ad inſtitutum noſtrum pertinet anxie disquirere, num vera ſit illorum opinio, qui fluidis quibuslibet motum quendam, quem *inteſtinum* vocant, tribuunt, quo fluidi particulæ variis irregularibus motionibus ultro citroque cieri finguntur; ad diſtinctionem motus progreſſivi fluidi, quo tota ejus maſſa de loco in locum transfertur. Sic cum labitur amnis, motus quo aqua in alveo ſuo ad inferiora devolvitur, eſt progreſſivus; motus vero aquæ calidæ, id eſt internus motus ejus molecularum, vocatur motus inteſtinus: exemplum adduco aquæ calidæ, quia certo certius ejusmodi motu inteſtino particulæ ejus agitantur, etſi motus ipſe in oculos non incurrit; atque adeo tota aquæ maſſa quieſcere videtur. Num vero omnia omnino fluida tali motu inteſtino agitentur philoſophis pariter, ut dixi, expendendum relinquam; nec enim animus mihi eſt Philoſophicis controverſiis me quoquo modo irretire.

241. Corpora fluida à liquidis differunt ut genus à ſpecie, cum liquida quidem fluida ſint, non tamen vice verſa. Liquida enim ſunt, quæ in volumine non nimium exiguo fluunt donec eorum ſuperficies in ſitum horizontalem ſe compoſuerit; unde, quia hæc proprie-

prietas non flammæ nec aëri aut ætheri competit; ideo hæc corpora tantum fluida, non vero liquida dicuntur. Nos in ſequentibus etiam liquoribus fluidi nomen tribuemus, quia revera liquores ſunt corpora fluida: idcirco

242. *Fluida homogenea*, ſeu *uniformiter gravia* ſunt, quorum denſitas per univerſam maſſam uniformis eſt, adeo ut pondera ipſorum abſoluta maſſis eorum proportionalia ſint. Talia ſunt præterpropter omnes liquores nobis cogniti.

243. *Fluida heterogenea*, ſeu *difformiter gravia*, ſunt, quorum denſitas per univerſam fluidi maſſam non eadem eſt nec propterea pondera fluidi maſſis proportionantur. Tale fluidum eſt athmoſphæra, cujus partes altiores, hoc eſt à terræ ſuperficie remotiores rariores comperiuntur; etenim experimenta aëra in montium editiorum jugis rariorem produnt quam in vallibus. Variæ vero athmoſphæræ denſitates variis lineis exprimi poſſunt, atque hinc naſcuntur,

244. *Scala denſitatum* cujusque Fluidi heterogenei eſt figura mixtilinea, cujus ordinatæ horizonti parallelæ fluidi denſitatem exponunt in planis illis, in quibus ordinatæ exiſtunt. Idcirco axis ſcalæ, ordinatas ad angulos rectos excipiens, horizonti perpendicularis erit.

245. *Denſitas media* cujusque fluidi heterogenei eſt denſitas uniformis alicujus fluidi homogenei, quod in eadem altitudine cum fluido heterogeneo eandem preſſuram exerere valet in ſubjectum ſibi planum horizontale ac fluidum heterogeneum. Talis media denſitas innoteſcit applicando aream ſcalæ denſitatum ad ejus axem, ſeu fluidi altitudinem ſuper plano, quod ejus preſſuram ſubit.

246. *Scala preſſionum* ſeu *gravitationum* liquoris heterogenei eſt figura, cujus ordinatæ exponunt gravitationes ſeu preſſuras fluidi in plana horizontalia exercitas, in quibus ordinatæ poſitæ ſunt, abſciſſæ vero ordinatis reſpondentes deſignant diſtantias planorum, quæ preſſiones ſubeunt à ſuprema liquoris ſuperficie. Scala preſſionum etiam definiri poſſet, quòd ſit quadratrix ſcalæ denſitatum; quandoquidem poſtmodum (§. 258.) demonſtrabitur areas ſcalæ denſitatum homologis ordinatis ſcalæ gravitationum proportionales exiſtere.

247. *Liquores in ſtatu manente*, ſeu *in æquilibrio conſiſtere* dicuntur, cum nulla liquoris pars vicinarum actione ſitu ſuo expellitur, ſed omnes partes perfectum inter ſe æquilibrium ſervant.

248. Infiniteſimæ plani cujusque aut etiam ſuperficiei particulæ gra-

gravitationem vel preſſuram cujusvis liquoris ſubeuntes *puncta* deinceps à nobis compendii gratia nominabuntur.

Preſſionis verò vel *gravitationis* nomine intelligimus impreſſionem, quam fluidum gravitate ſua in ſibi ſubjectum planum exerit. Idcirco, ut rem generaliter poſſimus tradere, prout in primo libro tantum non ubique id fecimus, fluida utcunque heterogenea eſſe concipimus, atque quænam preſſiones atque effecta ab ejusmodi fluidis reſultare debeant, generalibus theorematibus complectemur; ex quibus deinceps omnia derivari poterunt, quæ ad liquores homogeneos ſpectant.

CAPUT I.

De generalibus legibus gravitationis Liquorum in ſubjecta plana.

PROPOSITIO I. Lemma.

249. *Preſſiones, quas corpora quæcunque ſolida vel fluida in ſe invicem exercent, fiunt juxta directiones communi plano contingenti corpora perpendiculares, atque transeunt per contingentiæ punctum eorundem*
Fig. 56. *corporum.*

Sit MN corpus quodcunque, in quod aliud corpus CD juxta directionem FC impingat; per commune contingentiæ punctum D utriusque corporis transeat planum AB, ambo corpora in hoc eodem puncto D tangens, quod ideo commune eorum contingentiæ punctum vocatur. Dico impreſſionem impellentis CD in patiens MN exeri tantum juxta directionem CE plano contingentiæ AB perpendicularem, quæ per commune utriusque corporis punctum contactus D transeat.

Demonſtr. Producatur FC usque ad occurſum H cum plano AB, & circa diametrum CH deſcriptum intelligatur parallelogrammum rectangulum CDHI, cujus latera CD, IH plano AB normalia & CI eidem æquidiſtans ſunt. Jam (§. 39.) conatus ſeu preſſio juxta CH æquipollet impreſſionibus juxta CD & CI. Verum, quia CI plano AB parallela eſt, nulla in planum iſtud impreſſio juxta hanc directionem exeri poteſt, ſed duntaxat impreſſio juxta CD plano perpendicularem tota in hoc planum redundabit. Ergo impreſſio, quam corpus impellens C, in planum AB ſeu in corpus MN exerit

rit tantum fieri poteſt juxta directionem CD plano AB perpendicularem, quæ per punctum contactus D tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II. Theorema.

250. *Liquor vaſi cuicunque inditus non poteſt in ſtatu manenti conſiſtere, priusquam ejus ſuperficies ſitum horizontalem acquiſiverit.* Fig. 57.

Sit vas BAC figuræ cujuscunque & quomodocunque poſitum; dico liquorem ei infuſum HGIA non poſſe ſitum manentem habere, niſi ſuperficies ejus HGIF horizontalis fuerit. Habeat enim hæc ſuperficies in ſtatu manenti poſitionem EGCF horizonti inclinatam: quo poſito, quia liquidi moles GCIF plano horizontali HGIF imminens gravis eſt, atque in ſpatium GHEF defluere poteſt, nec quicquam adeſt quod hunc fluxum impedire queat, ea actu defluet ſpatium illud GHEF repletura; idcirco cum liquoris ſuperficies GCE plano horizontali HGF inclinata eſt, non eſt in ſtatu manenti, contra hypotheſin.

Corollarium.

251. Hinc ſi univerſa terra Oceano circundata eſſet, nec in ſe ipſam converteretur, ejus ſuperficies perfecte ſphærica foret. Sed quia motu diurno circa centrum ſuum revolvitur, aquæ ſuperficies ſphærica non erit, ſed figuram habebit ſphæroidis latæ, quia aquæ partes quo propiores ſunt æquatori, eo majorem habent conatum à centro recedendi, atque adeo minus graves ſunt, quandoquidem conatus centrifugi tanto magis de corporum gravitate detrahunt quanto majores ſunt. Ob hanc vero gravitatis inæqualitatem accidit, ut ad obtinendum partium æquilibrium, ad eandem ubique altitudinem aquæ pervenire nequeant, ut aliàs fieret, ſi terra motu illo diurno, ex quo conatus centrifugi partium aquæ reſultant, careret, ſed ſub Æquatore altiſſima & in polis maxime depreſſa exiſtat. Hinc eſt, quod Newtonus, Hugenius aliique telluris ſuperficiei figuram alicujus ſphæroidis aſſignarint, oriundæ ex revolutione alicujus Ellipſeos circa axem minorem, exiſtente axe majore diametro æquatoris terreſtris. Sed de hisce ſuo loco ſermo recurret.

PROPOSITIO III. Theorema.

252. *Partes æquales* (HI, IK) *cujuslibet plani horizontalis* (FG)
Fig. 58. *intra liquorem quemcunque* (DBCE) *in ſtatu manenti conſiſtentem, vaſique, ut libet irregulari,* (ABC) *inditum, æquales preſſiones ſubeunt ab imminente liquore* (DFGE). *Et partes minimæ laterum vaſis* (LF, MG) *ad idem planum horizontale* (FG) *terminatæ easdem pariter preſſiones ab incumbente liquore patientur juxta directiones* (FP, GQ) *iisdem partibus* (FL, GM) *perpendiculares, quas patiuntur æquales particulæ* (FR, GK) *plani horizontalis juxta directiones ipſis normales.*

I. Quoniam (ſecundùm hypotheſin) liquor vaſis eſt in ſtatu manenti, ſuperficies ejus DE (§. 251.) horizontalis ac proinde plano FG parallela erit, & remoto cogitatione liquore DFG plano FG incumbente, reſidui in vaſe FBCG ſuperficies FG etiamnunc in ſtatu manenti conſiſtet, quia horizontalis eſt. Adeoque ſi, reſtituto quem cogitatione removimus liquore DFGH, pars aliqua IK plani FG minorem preſſionem ſubiret quam contigua & æqualis particula HI, liquor in loco IK deberet attolli, aut deprimi, vel ad latera dextrorſum aut ſiniſtrorſum deflecti ſive alicubi condenſari, quandoquidem vis minor majori ſemper cedere debet, & aquæ vel liquoris particulæ per naturam fluidi cedere poſſunt, atqui talia ſine motu partium, quo unæ ab aliis ſitu ſuo pelluntur, contingere nequeunt, ergo liquor non maneret in ſtatu manenti, contra hypotheſin. Partes igitur HI, IK omnesque reliquæ æquales plani FG, æquales preſſiones ſuſtinent. Quod eſt primùm.

II. Sit planum LM alteri FG æquidiſtans, & (§. 250.) omnes ejus æquales particulæ NO, OM æquales itidem preſſuras ab imminente liquore DLME ſubibunt. Idcirco liquor inter duo plana æquidiſtantia LM & FG, velut in prælo, fortiter conſtringitur & quidem viribus æqualibus in partes oppoſitas, ſcilicet à liquore incumbente DLME perpendiculariter deorſum atque à reactione plani inferioris FG perpendiculariter in altum; nam quanta vi planum iſtud premitur, tanta vi in rem prementem reagit. Unde cum plana NO & IK æqualibus viribus in oppoſitas partes urgeantur, neceſſe eſt ut in quolibet plano NI vel OK tantam preſſuram ſubeat quantam in NO vel IK, alioqui ſi minorem pateretur, ibi elaberetur per planum NI liquor ONIK contra hypotheſin. Et quia ob

con-

contiguitatem partium aquæ particulæ laterales LF & MG vaſis preſſuras ſubire debent æquales illis, quas ſubeunt plana NI vel OK, & hæc preſſiones pares illis, quas plana NO, IK, &c. patiuntur, liquet preſſuras liquoris DFGE in particulas laterales vaſis FL & MG æquales eſſe preſſionibus, quas ab eodem liquore patiuntur particulæ illis æquales HI, IK plani horizontalis FG, (§. 249.) juxta directiones FP, GQ particulis illis FL & GM perpendiculares, perinde ac particulæ HI & IK, &c. itidem perpendicularibus plano FG directionibus urgentur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV. Theorema.

253. *Preſſiones ſeu Gravitationes cujuslibet liquoris homogenei in quæcunque plana horizontalia proportionales ſunt altitudinibus liquoris ſuper his planis.* Fig. 59.

Sit DE ſuperficies liquoris DBCE vaſi cuilibet ABC infuſi, fundoque vaſis BC horizontali, quantum opus eſt, protenſo, demittatur ad eum perpendicularis ET; intelligatur inſuper quodvis planum FG fundo BC & DE æquidiſtans, quod productum occurrat rectæ ET in puncto S. Preſſiones liquoris in plana FG & BC exercitæ deſignentur per *pr.* FG & *pr.* BC, probari debet fore *pr.* FG : *pr.* BC = ES : ET. Nam ES eſt altitudo liquoris DFGE ſuper plano FG, & ET altitudo liquoris ſuper BC.

I. Sit ES alteri ET commenſurabilis, & E*p* communis utriusque menſura tantæ magnitudinis, ut ducto per punctum *p* plano *dp*, intra ſpatium vaſis D*de*E duci queat rectula *eo* parallela E*p* vel perpendicularis ipſis DE & *de*, quod ſemper fieri poteſt quantumvis irregulare & ſuperius anguſtum eſſe queat ipſum vas ABC. Factis porro ſingulis *p*2*p*, 2*p*3*p*, &c. æqualibus ipſi E*p*, ductisque per ſingula diviſionis puncta 2*p*, 3*p*, &c. planis 2*d*2*p*, 3*d*3*p*, &c. quibus poſitis, & quia puncto *e* primi ſtrati liquoris imminet *eo*, hoc punctum *e* tantam preſſuram ſuſtinebit, quantum eſt pondus columnulæ *eo*, & (§. 252.) omnia reliqua plani *de* puncta preſſionem patientur æqualem preſſioni puncti *e*; punctum 2*f* in baſi 2*d*2*e* ſecundi ſtrati *e*2*d* patietur preſſionem compoſitam ex preſſione, qua punctum ejus ſupremum d urgetur, & ex pondere columnulæ *d*2*f* æqualis ipſi *oe*, atque adeo gravitatio liquoris in punctum 2*f* & omnia reliqua plani 2*d*2*e* erit dupla ipſius in plano *de*, & propterea æquivalet ponderi columnarum *oe* + *d*2*f*, hoc eſt E2*p*; ſimili argumento

 con-

conficietur preſſionem liquoris in quodlibet punctum plani $3d3e$ æquivalere ponderi columnæ ipſi $E3p$ æqualis in altitudine; hinc preſſiones ſeu gravitationes liquoris in plano FG & BC æquivalebunt columnis, quarum altitudines ſunt æquales lineis ES & EF, ergo erit omnino *pr.* FG : *pr.* BC = ES : ET.

II. Sit ES alteri ET incommenſurabilis, &, ſi fieri poteſt, ratio *pr.* FG ad *pr.* BC major quam ES ad ET, puta æqualis rationi ES : EX cujus conſequens EX minor quam ET defectu XT, ex quo defectu auferri poterit quædam TV minor quam XT, ita ut EV commenſurabilis fiat ipſi ES. Quo poſito, per punctum V planum *b*V tranſire intelligatur, eritque pr. *bc* minor quam *pr.* BC, cum EV minor ſit quam ET, & pr. FG : pr. bc > pr. FG : pr. BC. Jam quia (conſtr.) EV commenſurabilis eſt ipſi ES, erit per partem primam hujus, pr. FG : pr. bc = ES : EV, & (ſecundùm hypotheſin) eſt pr. FG : pr. BC = ES : EX, ergo ES : EV > ES : EX, atque adeo EX major quam EV, contra hypotheſin. Adeoque nequit pr. FG : pr. BC major eſſe quam ES : ET.

Sit igitur ratio pr. FG : pr. BC minor quam ES : ET, ſcilicet æqualis cuidam ES : EY cujus conſequens EY major quam ET, exceſſu TY, auferatur iterum ex hac TY portio YZ talis ut reſidua EZ alteri ES commenſurabilis evadat, per Z tranſire fingatur planum Zκβ fundo BC parallelum in quo κβ inſtar fundi nunc conſiderabimus. Unde quia EZ (conſtr.) major eſt quam AT, erit pr. βκ > pr. BC, adeoque pr. FG : pr. βκ < pr. FG : pr. BC; & quia (conſtr.) EZ commenſurabilis eſt ipſi ES, erit (num. 1 hujus) pr. FG : pr. βκ = ES : EZ, ex hypotheſi verò eſt pr. FG : pr. BC = ES : EY, ergo ES : EZ < ES : EY, eritque adeo EZ major quam EY, iterum contra hypotheſin, nam EZ neceſſario minor erat quam EY, quandoquidem ex hac EY ablata ZY relinquebatur EZ; nequit ergo ratio pr. FG : pr. BC minor eſſe quam ratio ES : ET & quia nec major, ſequitur pr. FG : pr. BC = ES : ET. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

254. Hinc ultrò ſequitur, quod quælibet portio FM plani cujuslibet horizontalis FG ab incumbente liquore DFGE tantam preſſionem ſubire debeat, quantam ſuſtineret à columna ejusdem liquoris portioni illi FM ad altitudinem ES perpendiculariter imminentis. Nam, quod in propoſitione univerſaliter oſtenſum eſt, nulla habita

bita ratione figuræ vaſis, idem valet etiam de vaſis cylindricis, in quibus illicò liquet gravitationes liquoris altitudinibus ejus proportionales eſſe. Unde, ſi altitudines liquoris ſuper plano aliquo horizontali in vaſe prismatico & in vaſe irregulari utrinque æquales ſint, æquales utriusque plani partes æquales preſſiones ſuſtinebunt. At in vaſe prismatico quælibet cujusque horizontalis plani portio ſuſtinet pondus totius columnæ ipſi perpendiculariter imminentis; atque adeo portio quæcunque FM plani FG tantum onus ſuſtinebit, quantum eſt pondus alicujus prismatis, cujus baſis FM & altitudo ES. Adeoque totum planum FG ſuſtinebit onus æquale maſſæ liquoris in prisma conformatæ, quæ planum FG pro baſi habeat & ES pro altitudine.

Corollarium II.

255. Et quia ſupra (§. 252.) demonſtratum eſt, æquales particulas quam minimas FM & FL plani FG & lateris vaſis, æquales preſſiones ſuſtinere, unamquamque juxta directionem ſibi normalem, ſcilicet FM verticaliter deorſum, & FL juxta FR ſuperficiei BFD in F perpendicularem, hinc ſequitur *quamlibet particulam minimam in vaſorum lateribus preſſuram ſubire debere ab incumbente liquore æqualem ponderi columnæ, cujus baſis eſt particula, quæ preſſionem ſuſtinet, & altitudo eſt diſtantia particulæ à liquoris ſuperficie.*

Atque hæc eſt generalis hydroſtaticæ regula ex ſuis genuinis principiis eruta, quæ etſi tantum in liquoribus homogeneis valere videtur, ſeſe tamen ad quoscunque liquores, etiam heterogeneos, extendere in ſequentibus probabitur.

Scholion.

256. Ex his ergo liquet, quod liquores homogenei gravitant in ſua ſubjecta plana pro ratione altitudinis eorum ſuper planis, in quæ gravitant. Ex qua fluidorum proprietate ſequens naſcitur paradoxum; quod ſcilicet parva liquoris cujusque copia tantundem in ſibi ſubjectum planum gravitet, quantum ejusdem liquoris maſſa centies imo millies major in eadem altitudine. Etenim ſi vaſi acuminato BAC, cujus baſis BC notabilis ſit amplitudinis, aqua infundatur pertingens usque in A, & per Corollarium I. hujus, aqua tantam preſſionem in fundum BC exeret, quantam exereret cylindrus aqueus Fig. 60.

 IBCK

IBCK in eadem altitudine cum vaſis liquore. Idcirco pauxilla aqua in tubo acuminato gracilique ABC tantum effectum præſtare poteſt, quantum aquæ moles centuplo, imo pluries, major in eadem altitudine; quod haud dubie non paucis paradoxum videbitur. Ejus tamen veritas ipſa experientia comprobata eſt, atque deinceps probari poteſt; nam ſi fundo vaſis ſtricti ABC orbiculus *a*BC*f* inditus ſit vaſi tam accurate quadrans, ut nullas rimas relinquat, per quas infuſa aqua infra orbiculum transire queat, in centro Q affixum habens filum QM quo attolli poſſit, cujus fili alterum caput ſtateræ MDO annexum ſit in M; ex altera bilancis parte applicetur pondus P eousque augendum minuendumve dum orbiculus B*f* nonnihil attollere incipiat ſtateram MO eam in partem flectendo, cui pondus appenſum eſt; reperieturque hoc pondus P orbiculum paulisper attollere valens ſatis accurate æquari ponderi cylindri aquei BIKC, exiſtentibus jugi brachiis DM, DO æqualibus. Unde cum pondus P tantillo majus eſſe debeat reſiſtentia, quam in parte oppoſita ſuperare poteſt, & hæc reſiſtentia ſit ipſa paucæ aquæ ABC gravitatio in orbiculum *a*BC*f*, omninò concludi debet hanc aquæ ABC gravitationem æquivalere gravitationi cylindri aquei I*af*K.

257. Sed inquies forte, ſi aqua ABC tantam gravitationem in ſuam baſim exerceret, ſequeretur fore, ut vas cum infuſa aqua tantum ponderare debeat, quantum cylindrus aqueus IC auctus pondere vaſis. Nam vas cum infuſa aqua lanci impoſitum atque erecto ſitu detentum tantum ponderare debet, quanta vi lancem premet; ſed lancem urgebit ea vi, qua baſis vaſis ab interno liquore urgetur aucta pondere vaſis, hoc eſt pondere cylindri KB & vaſis ſimul: interim tamen, ſi experimentum capiatur, comperietur ſemper pondus totius non fore majus quam infuſæ aquæ & vaſis pondera ſimul ſumta, atque adeo regula noſtra hydroſtatica phænomenis adverſari videtur. Sed objectio falſæ innititur hypotheſi, quaſi liquoris ABC in baſin gravitatio etiam tota redundare atque exeri debeat in libræ lancem; quod tamen eſt falſum, nam ſi fundus BC urgetur onere IBCK à ſolo liquore ABC etiam latera tubi acuminati BRA & CSA in altum prementur, nam unumquodque horum laterum punctum tanta vi premitur (§. 255.) quantum eſt pondus filamenti aquæ æqualis diſtantiæ puncti ab aquæ ſuperficie, juxta directionem ſuperficiei vaſis perpendicularem, adeoque applicando ea, quæ ſupra (§. 81.) generaliter & in abſtracto oſtenſa ſunt, caſui præſenti, comperietur prædicta illa latera BRA, CSA vel potius in-

ter-

ternam tubi acuminati ſuperficiem convexam, tanta vi à liquore verticaliter in altum agi, quantum eſt pondus aquæ illius, qua cylindrus IC aquam in tubo ABC excedit. Unde, quia latera vaſis & fundus cohærent, ea ſola vis in lancem libræ MO redundare poteſt, quâ gravitatio aquæ ABC in baſin BC excedit vim attollere conantem latera BRA & CSA vaſis ABC ab aquæ preſſionibus provenientem, aucta pondere vaſis; vis vero illa, ſeu exceſſus cylindri IC ſupra maſſam aquæ, quæ modo nominatam vim attollentem exponit, eſt pondus ſolius aquæ in tubo acuminato ABC, ergo vis, qua lanx deprimi atque urgeri debet, eſt ſolum pondus aquæ ABC auctum pondere vaſis, prorſus ut experientia id manifeſtat. Idcirco tantum abeſt, ut objectio ab experientia petita vim propoſitionis noſtræ quicquam infringat, ut eam potius egregie confirmet.

PROPOSITIO V. Theorema.

258. *Gravitationes quorumcunque liquorum in ſubjecta plana horizontalia, ſunt areis homologis in ſcala denſitatum vel etiam ordinatis ſcalæ preſſionis liquorum proportionales.* Fig. 61.

Sit vas quodcunque irregulare ABC liquoris heterogenei plenum usque ad DE, & circa axem ET ſuperficiei liquoris DE fundoque BC perpendicularem, atque adeò fluidi altitudinem ſuper fundo deſignantem, extructæ ſint curvæ HKN & EIX, quarum illa ſit ſcala denſitatum liquoris, utpote cujus ordinatæ EH, $3p3h$, SK, TN denſitates liquoris exponunt in illis planis, in quibus ordinatæ reperiuntur, hæc vero EIX ſcala preſſionis liquoris, cujus ſcilicet ordinatæ $3p3q$, SI, &c. gravitationes liquoris denotant in plana $3d3e$, FG, &c. Ac denique area EHKNT applicata ad ejus altitudinem ET præbet mediam denſitatem TV fluidi heterogenei. Ordinatæ verò ſcalæ gravitationum EIX (§. 246.) areis homologis ſcalæ denſitatum HKN proportionales ſunt, ultimaque TX toti axi AT æqualis eſſe ponitur. Quibus intellectis probandum eſt, fore gravitationem liquoris DFGE in planum FG ad gravitationem liquoris DBCE in fundum BC, ut area ESKH ad aream ETNKH, vel ſicut SI ad TX, &c.

Vaſis liquor diviſus intelligatur, ut in præcedenti, in ſua ſtrata horizontalia æque alta quidem omnia, ſed infiniteſimæ altitudinis, per plana de, $2d2e$, $3d3e$, &c. fundo BC æquidiſtantia. Quia igitur cujusque ſtrati altitudo inſenſibilis ſeu indefinite parva eſt,

den-

denſitas liquoris per totum ſtratum tanquam uniformis ſpectari poteſt, ſcilicet EH ſignificabit denſitatem primi ſtrati *de*ED, ordinata *ph* denſitatem uniformem ſecundi 2d2ed, atque ita porrò de reliquis. Jam puncto e primi ſtrati perpendiculariter imminet columnula ſeu filamentum e o, ejusque adeò pondus ſuſtinebit: atqui pondus ipſius *e o* (§. 33.) eſt ut ejus volumen & denſitas ſeu gravitas ſpecifica conjunctim, hoc eſt $= eo.EH = Ep.EH$ ſeu = rec-lo ω areæ SHK inſcriptum ordinatæ EH adjacens, eademque eſt preſſio, quam ſubeunt omnia reliqua puncta plani *de*; preſſio verò, quam ſuſtinebunt puncta baſeos *2d2e* ſecundi ſtrati *2d2ed*, erit aggregatum ponderum filamenti cujusdam ſecundi ſtrati, & æque alti filamenti *eo* in primo, quorum hoc, ut modo dictum, exponitur rec-lo ω, illud verò rec-lo 2ω ſeu $p2p.ph$: atque adeò erit talis preſſio in *2d2e*, $= \omega + 2\omega$. Eodem argumento conficietur gravitationem liquoris in tertium planum *3d3e* exponi aggregato rectangulorum $\omega + 2\omega + 3\omega$; atque adeo preſſio, quam plani FG puncta ſuſtinebunt, exponetur omnibus rectangulis $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$ quæ areæ ESKH inſcripta ſunt, atque ob infiniteſimam cujusque altitudinem in hanc aream evaneſcunt, ita ut loco aggregati omnium area ipſa ESKH intelligenda ſit, ac propterea presſio, quam planum FG à liquore incumbente ſubire debet, exponitur area homologa ESKH, & gravitatis liquoris in fundum BC per aream ETNKH; eſt ergo omnino *pr.* FG : *pr.* BC = ESKH : ETNKH = SI : TX per §. 246. Quæ erant demonſtranda.

Corollarium I.

259. Hinc preſſio, quam particula quævis FR plani FG ab imminenti liquore patitur, æquivalet ponderi abſoluto maſſæ liquoris cujusdam homogenei, cujus denſitas æqualis ſit denſitati mediæ TV liquoris heterogenei, volumen vero priſma rectum ſuper baſi FR & altitudine æquali SI homologæ ordinatæ ſcalæ preſſionum SIX. Nam, juxta Propoſitionem præſentem, presſio, quam ſubit particula FR, exponi debet facto ex area SEHK in particulam FR plani FG; & (ſecundùm hypotheſin) SEHK : TEHKN = SI : TX = SI.TV : TX.TV, atque (§. 245.) area ETNKH = ET.TV, cum ipſa TV ſeu media liquoris denſitas ſit ea, quæ oritur applicando dictam aream ad altitudinem ET, atque adeò facta, uti poſthac ſemper factum ſupponemus, TX æquali ET, etiam rectangulum TX.TV

areæ

areæ ETNKH æquetur; reperietur rectangulum SI.TV ubique æquale homologæ areæ ESKH, & factum ex hac area in FR, exponens gravitationem ſeu preſſionem in hanc particulam, erit æquale facto SI.TV.FR, quod deſignat prisma, cujus baſis FR eſt planum preſſionem ſuſtinens; altitudo verò SI ordinata ſcalæ gravitationum, ductum in mediam denſitatem TV liquoris heterogenei: atqui (§. 33.) prisma SI.FR ductum in TV exponit pondus liquoris homogenei, cujus denſitas eſt TV & volumen ipſum prisma SI.FR; ergo particula FR plani FG ab incumbente liquore heterogeneo preſſionem ſubit æqualem ponderi prismatis fluidi, cujus baſis ſit ipſa particula preſſionem ſuſtinens, altitudo ordinata homologa SI ſcalæ preſſionum, & denſitas uniformis TV media denſitas liquoris heterogenei.

Corollarium II.

260. Unde, quia æquales & minimæ particulæ lateris FL & contigua FR in plano horizontali FG (§. 252.) æquales ab imminente liquore heterogeneo preſſiones ſuſtinent, quælibet, juxta directionem ipſi perpendicularem, etiam FL preſſionem ſubibit æqualem ponderi prismatis liquidi, cujus baſis ſit particula hæc ipſa FL fluidi impreſſionem excipiens; altitudo vero SI ordinata homologa ſcalæ preſſionum & denique TV media denſitas liquoris heterogenei.

Corollarium III.

261. Si liquor eſt homogeneus, cujus denſitas ſit HE ſcala denſitatum fiet recta axi ET parallela per punctum H ducta, eritque adeo hoc caſu TV = EH, & curva EIX mutabitur in lineam rectam angulum ſemirectum cum axe ET continentem; adeò ut iterum hinc liqueat, cujusque liquoris homogenei gravitationes altitudinibus liquoris ſuper planis, quæ preſſiones ſubeunt, proportionales eſſe. Nam in triangulo rectilineo ETX ordinatæ SI, TX, quæ gravitationes liquoris in plana FG, BC ſignificant, abſciſſis ES, ET proportionales erunt exiſtente linea EIX recta, qualem nunc eſſe ſupponemus, ne pro hoc caſu particulari novum ſchema delineare neceſſum habeamus.

Corollarium IV.

262. Sed ſi liquores homogenei diverſæ denſitatis vel gravitatis ſpecificæ inter ſe conferuntur, gravitationes ſunt in compoſita ratione denſitatum & altitudinem; adeoque ſi in ſyphonis AB*d* crure ABC inſit liquor DC cujus denſitas uniformis ſit EH, & altitudo ſuper fundum æqualis HN; alteri verò cruri *ab* inſit liquor *dt* denſitatis *eh* vel *nc* ad altitudinum *ce* in crure aſſurgens, erit hujus liquoris gravitatio exprimenda rectangulo *he. et*, & liquoris DEC gravitatio exponi debet rectangulo EH. HN, adeoque, ſi tubi per horizontalem *b*B communicantes, atque rectangula EH. HN, *he. et* æqualia fuerint, liquores in æquilibrio conſiſtent; quod proinde continget, ubi altitudines liquoris EC, *ec* denſitatibus ſeu (§. 33.) gravitatibus ſpecificis *he*, HE fuerint reciproce proportionales.

Fig. 62.

CAPUT II.

De gravitationibus Liquorum in Vaſorum latera, & de Tuborum firmitatibus requiſitis ad perferendas liquorum preſſiones.

In Capite proxime antecedenti eas ſolùm gravitationes liquorum contemplati ſumus, quæ in plana horizontalia exeruntur; in hoc verò examinandæ veniunt preſſiones liquorum laterales, quibus parietes ſeu ſpondæ vaſorum afficiuntur. Talis enim indago præbebit regulam pro definiendis tuborum firmitatibus ad reſiſtendum aquæ preſſionibus & viribus, quibus liquores vaſorum latera ab invicem diducere conantur.

PROPOSITIO VI. Theorema.

263. *Vaſis vel tubi* EAQP *ex utraque parte* ETPS *&* AYQV *aperti, & liquori* βαθδ *immiſſi usque ad* ETP, *ſuperficies externa & convexa ab ambiente liquore eadem vi introrſum verſus axem premetur, qua cava vaſis ſuperficies extrorſum urgetur ab interno vaſis liquore.*

Fig. 63.

Nam ſi loco vaſis EAQP intelligatur moles liquoris ejusdem conſtitutionis cum liquore ambiente, ejusdemque figuræ, magnitudinis

dinis & poſitionis cum vaſe; quia (ſecundùm hypotheſin) omnia ſunt in ſtatu manenti, maſſæ liquidæ EAQP ſuperficies externa eadem vi ab ambiente liquore βαθδ urgebitur, quâ ſuperficies ejus cava à liquore EAYQP; alioqui, ſi alterutra presſio alteri prævaleret, partes liquoris ad motum concitarentur, nec proinde aqua vel liquor foret in ſtatu manenti, contra hypotheſin. Jam eandem impreſſionem exercebit liquor ambiens in ſuperficiem vaſis rigidam convexam, quam in ſimilem æqualem & ſimiliter poſitam ſuperficiem aquæ EAYQP; ac pariter hic liquor vel aqua in ſuam cavam ſuperficiem eandem impreſſionem exſeret, quam exſereret in ſimilem & æqualem ſuperficiem cavam, ſed rigidam vaſis. Ergo externa & interna vaſis ſuperficies à liquore ambiente & interno, in vaſis cavitate exiſtente, æqualibus viribus in oppoſitas partes, juxta directiones ſuperficiei vel ſuperficiebus perpendiculares, urgentur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII. Theorema.

264. *Si Priſma rectum* NEABL *terminatum ſuperficie curva* NCEBL, *rectangulo* NLBC *& duabus figuris ſimilibus ac æqualibus quibuscunque* BAC, LEN, *cujuslibet liquoris heterogenei plenum ſit, & planum* cba *baſi* CAB *parallelum, ab eadem diſtet intervallo* Aa, *inſenſibili reſpectu totius liquoris altitudinis* EA *vel* MD. *Superficies cava* CcaABb *& rectangulum* BCcb *viribus æqualibus in partes directe oppoſitas prementur; ipſaque potentia, qua ſuperficies & rectangulum afficiuntur, æquabitur ponderi priſmatis liquidi, cujus baſis eſt rectangulum* BbcC, *& altitudo ordinata* af *ſcalæ gravitationum* EZα *liquoris heterogenei, denſitas verò uniformis* Aω *eadem cum media denſitate ejusdem liquoris heterogenei.* Fig. 63.

Singula curvæ *cab* puncta eandem presſionem ſuſtinent, æqualem (§. 260.) ſcilicet ponderi filamenti liquoris homogenei, cujus altitudo eſt *af* ordinata ſcalæ gravitationum, & denſitas uniformis recta Aω, quæ liquoris heterogenei mediam denſitatem repræſentat: & ſingula puncta curvæ CAB presſionem ſubeunt æqualem ponderi (§. 260.) filamenti ejusdem ac modò liquoris homogenei, cujus denſitas uniformis ſit iterum Aω, altitudo verò Aα homologa ordinata ſcalæ presſionum. Verum, quia differentia αg ordinatarum *fa*, αA (ſecundùm hypotheſin) inſenſibilis eſt atque adeo contemnenda præ his ordinatis, ſingula puncta ſuperficiei cavæ *CaB* una eademque

 po-

potentia, quam exponit pondus filamenti liquidi altitudinis *af* vel A*α* & denſitatis A*ω* affici cenſeri debent, adeoque impresſio, quam à fluido vaſi indito patietur dicta ſuperficies curva & cylindrica (§. 63.) æquivalet presſioni, quam ſubiret rectangulum BC*cb*, ſi etiam ſingulis ejus punctis potentia *af* applicata eſſet, atque gravitatio in hoc rectangulum eſt ut *af*. BC. B*b*, vel *af*. BC. A*a*, ductum in A*ω*, cum pondus cujusque filamenti *af* ſit ut hoc filamentum, tanquam volumen, ductum in denſitatem ſeu ſpecificam gravitatem A*ω*. Atqui ſolidum *af*. BC. Bb ductum in A*ω* denotat (§. 33.) pondus maſſæ fluidæ ſolido iſti quoad volumen æquali, cujus uniformis denſitas æquetur mediæ denſitati A*ω* liquoris noſtri heterogenei. Ergo ſuperficies cava C*a*B & rectangulum C*b* æquali vi in oppoſitas partes urgentur, & tanta quantum eſt pondus prismatis liquoris homogenei, cujus prismatis baſis ſit ipſum rec-lum B*c* ſuperficiem curvam C*a*B ſubtendens, altitudo verò *af* ordinata ſcalæ gravitationem EZ*α*; & liquoris homogenei denſitas ſit media denſitas A*ω* liquoris heterogenei. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

265. Vires, quibus altera ſuperficies cava C*cqyb*B & rectangulum ipſam ſubtendens CBb in oppoſitas partes urgentur, etiam æquales erunt, ſi toti prismati EAQP idem liquor heterogeneus inditus fuerit, utpote quæ vires exponuntur una eademque re, ſcilicet pondere prismatis liquidi baſin rectangulam CBb & altitudinem *af* habentis, cujus denſitas uniformis eadem eſt ac prius, media denſitas A*ω* fluidi heterogenei.

Corollarium II.

266. Propterea gravitatio liquoris heterogenei in totam ſuperficiem cavam CNEABL vel in rec-lum NCBL, item in ſuperficiem NCVQPTLB & idem rectangulum NCBL æquivalebit ponderi prismatis recti & liquidi, cujus baſis ſit area ſeu trilineum EZ*α*AE altitudo CB, denſitasque uniformis A*ω*.

Nam ſi altitudo AE vaſis in innumeras particulas indefinite parvas qualis A*a* diviſa, & per ſingula diviſionum puncta *a* plana horizonti parallela, quale *acqb*, ducta intelligantur, per art. 264. quælibet ſuperficiecula cava *c*A*b* vel *c*Q*b* & rec-lum CB*b* presſionem ſubibunt

bunt æqualem ponderi liquoris homogenei, cujus volumen ſit parallelepipedum ſeu priſma rectum, cujus baſis rec-lum CB*b* ac altitudo *af*, ſcilicet homologa ordinata ſcalæ preſſionum EZα, & cujus liquoris homogenei denſitas ſit Aω par mediæ denſitati liquoris heterogenei vaſis EQ vel ECB, atque pondus liquoris homogenei ſub dicto volumine (§. 33.) exponitur facto & volumine in denſitatem liquoris, quæ eſt Aω, ſeu media denſitas liquoris heterogenei, hoc eſt per *af*. BC. Dd. Aω ; = Aω. BC. rec-lum *f*A; & preſſio omnium ſuperficiecularum C*a*B vel omnium C*q*B, quæ in tota CNELB, vel in tota CNPLB continentur, exponetur per factum ex Aω. BC in omnia rec-la *f*A, quæ areæ EzαA inſcribi poſſunt, vel quia hæc rec-la areæ inſcripta in hanc ipſam aream deſinunt, per factum ex Aω. BC in aream EZαA. Atqui hoc factum (§. 33.) æquivalet ponderi quam habet maſſa liquoris homogenei, cujus denſitas eſt Aω & volumen eſt priſma ex baſi EZαA & altitudine BC. Ergo etiam preſſio liquoris heterogenei in ſuperficiem curvam CNELB, vel in CNPLBQ æquivalet ponderi ejusdem liquoris homogenei maſſæ.

267. Zonæ vero C*cab*B vel C*cqb*B, quorum communis altitudo A*a* nunc ponatur finitæ magnitudinis, preſſionem ſubibunt exponendam pondere priſmatis liquidi, cujus baſis ſit trapezium vel quadrilineum *af*αA, altitudo BC, & denſitas uniformis Aω.

Corollarium III.

268. Unde ſi planum EMDA rectangulo NCBL in medio MD occurrat ad angulos rectos, in hoc plano reperietur media directio preſſionum, quas ſingula puncta ſuperficierum NAL & NQL ſubeunt à liquore heterogeneo, cum in dicto plano EMDA media ſit directio preſſionum, quas ſingula puncta rectanguli NCBL ab eodem in vaſe liquore heterogeneo ſuſtinent, & preſſiones hujus liquoris in ſuperficies curvas NAL & NQL eædem ſint cum preſſione, quam ſuſtinere debet rectangulum NCBL. Idcirco, ſi per centrum gravitatis areæ EZαA planum rec-lo NB perpendiculare ductum intelligatur, cujus & plani EMDA prolongati communis ſectio ſit ZK, hæc KZ (§. 54.) erit media directio gravitationum liquoris in ſuperficiem cavam NAL. Et punctum K vocari nunc poteſt *Centrum preſſionum* vel *gravitationum* liquoris heterogenei.

Corollarium IV.

269. Hinc liquoris heterogenei preſſio lateralis, quam ſuſtinent ſuperficies cavæ NAL vel NQL aut etiam rec-lum æquealtum CBL, eſt ad pondus abſolutum liquoris heterogenei NLBCE, ſicut factum ex prismate recto, cujus baſis eſt figura EzαA, & altitudo BC in Aω ad factum ex prismate NEABL in Aω, vel omiſſa hac Aω, velut prisma illud ex EZαA in BC ad hoc prisma NEABL. Nam (§. 266.) prisma EZαA. BC ductum in Aω ſignificat preſſionem, quam ſuperficies curva CEB vel CQPB ab interno liquore heterogeneo patitur, & prisma NEABL ductum in eandem Aω (§§. 245. & 33.) ſignificat pondus abſolutum liquoris heterogenei ſub volumine NEABL. Propterea, ſi area AαZE fuerit ad bilineum BACB, baſin prismatis ſeu vaſis NEAB, ſicut AE ad BC, presſio lateralis, quam ſuperficies cava NAL vel NQL ſive rectangulum NCB ſubeunt, æquabitur ponderi abſoluto maſſæ liquoris heterogenei NEAB; & presſio illa lateralis hoc pondere abſoluto major minorve exiſtet, prout ratio trilinei EZαA ad bilineum BACB major aut minor fuerit ratione AE ad BC.

Corollarium V.

270. Adeoque, ſi vas noſtrum ponatur eſſe tubus SAYPQ, in quo rectangulum SVYT ſit maxima ſectio baſi AYQV recta; duæ partes ſuperficiei cavæ SEAT & SPQT, rectangulo SVYT adjacentes, *maximam* presſionem à liquore heterogeneo, tubo indito, patientur, atque adeò hic liquor, recenſitas tubi partes à ſe invicem avellere conans, *maximam* impresſionem in lineas SV & TY, in quibus duæ partes SEAT & SPQT ſibi invicem adhærent, exſeret; adeò ut, ni tubus ſatis firmus ſit, qui liquoris presſionibûs reſiſtere valeat, in loco infimo linearum SV vel TY rumpi, vel ſaltem rimis pertundi debeat à liquoris preſſurâ. Nam quia factum EZαA. VY. Aω exponit preſſuram, quam ſemitubus SAT vel SQT à latere ſubit, & propter maximum rectangulum SVYT, baſis ejus VT major eſt baſi CB cujuslibet alius rectanguli NCBL, ultrò liquet veritas aſſerti.

Corollarium VI.

271. Si ergo ſemel conſtiterit juxta quam proportionem procedant firmitates tuborum varias crasſities habentium, ex collatione harum firmitatum cum liquorum gravitationibus innoteſcent facili negotio crasſities tubi ſeu ſpiſſitudo materiæ, ex qua tubus paratus eſt, quæ requiritur ad id, ut tubus citra ſui rupturam liquoris ei inditi presſionem perferre posſit. Firmitatum vero ratio, quibus duo diverſi tubi pollent, demonſtrabitur in ſequenti propoſitione.

Propositio VIII. Theorema.

272. *Reſiſtentiæ ſeu firmitates tuborum ſunt in compoſita ratione ex ratione tenacitatis materiæ unius ad tenacitatem materiæ alterius tubi, ex ratione craſſitiei ad craſſitiem, & denique ex altitudinis tubi unius ratione ad altitudinem alterius.* Fig. 64.

Sit tubus, cujus orificium figura interior AVQY, crasſities materiæ, ex qua tubus paratus eſt, VV vel AA aut QQ, & altitudo tubi V*u* ſeu Y*y*; erunt rectangula *u*VV & *y*YY partes, in quibus ſemitubi *u*A*y* & *u*Q*y* à ſe invicem avellendi juxta directiones VF & YF à potentiis in contrarias partes agentibus, ſibi mutuo adhærent. Jam quia tot vinculis ſemitubi conjunguntur, quot ſunt puncta phyſica in rectangulis illis uVV & yYY, manifeſtum eſt reſiſtentiam tubi æqualem eſſe vi requiſitæ ad omnia vincula ſeu fibras dilacerandas, atqui vis ejusmodi ſeu reſiſtentia tubi eſt ut vis, qua unum vinculum ſeu una fibra rumpi poteſt & numerus fibrarum conjunctim; vis verò, qua opus eſt ad rumpendum unam fibram, eſt nobis tenacitas materiæ tubi vel ſaltem huic tenacitati proportionalis; numerus verò fibrarum eſt ut ſumma rectangulorum *u*VV & *y*YY, ergo vocando tenacitatem materiæ tubi T, erit ejusdem tubi reſiſtentia ſicut factum ex T in duplum rectangulum *u*VV, hoc eſt ut 2.T.VV.V*u*, vel etiam ut 2.A.C.T, vocando altitudinem tubi V*u*, A & crasſitiem materiæ ſeu VV vel YY, C. Sic etiam in alio tubo, cujus firmitas, crasſities materiæ ejusdemque tenacitas, ac denique tubi altitudo dicantur, *f*, *c*, *t* & *a*, & F indicet pariter firmitatem primi tubi, erit *f* ut 2*act*, & cum paulo ante fuerit F ut 2ACT erit omnino $F : f = TCA : tca$. Quod erat demonſtrandum.

Co-

Corollarium I.

273. Hinc figuras 63 & 64, junctim inſpiciendo, quia (§. 267.) preſſio liquoris heterogenei, quæ in partes uAy & uQy exſeritur, eſt $af\alpha A.VY.A\omega$, hæc preſſio etiam erit $=$ AMDS, nominando altitudinem zonæ qua ABQ, quæ eſt Aa ut ſupra, A, quadrilineum $af\alpha A = A.M$, diametrum VY vel AQ $=$ D. adeoque pr. $uAy +$ pr. $uQy = 2$AMDS, exiſtente $A\omega =$ S. Ponendo igitur liquoris preſſionem in zonam aAQq præciſe æqualem eſſe ejus firmitati, ſeu F $=$ pr. $uAy +$ pr. uQy, erit (§. 272.) 2.TCA $=$ 2.AMDS, vel CT $=$ MDS, & in alio tubo $ct = mds$, indicando ſimiles res per ſimiles litteras in utroque tubo majuſculis in primo, & minuſculis in altero. Ergo CT : ct $=$ MDS : mds.

Corollarium II.

274. Habeant inſuper tubi noſtri orificia circularia, atque contineant liquores homogeneos, eritque eo caſu linea EZα recta angulum ſemirectum continens cum EA, adeo ut ſit $af = Ea$, $A\omega$ verò, quæ dicta eſt S, deſignat denſitatem ſeu gravitatem ſpecificam liquoris, & M erit Ei biſecta ſcilicet Aa in i; quandoquidem M. $Aa = af\alpha A$, & hoc caſu hoc quadrilineum abit in trapezium æquale rectangulo ſub Ei & Aa. Hiſce poſitis analogia corollarii præcedentis transformabitur in ſequentes I°. C : c $=$ (M. S. D : T) : ($m.s.d:t.$). Hoc eſt, craſſities materiæ in ambobus tubis firmitates habentibus liquorum preſſionibus æquipollentes, ſunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorundem ſpecificis in diametros orificiorum applicata ad tenacitatem materiæ, ex qua tubi fabrefacti ſunt.

275. Adeoque ſi liquores ejusdem ſpeciei & tubi ex eadem materia facti fuerint, craſſities tuborum æqualiter firmorum erunt in compoſita ratione altitudinum, liquorum, & diametrorum tuborum, hoc eſt in ratione rectangulorum per axem tuborum.

276. II°. T : t $=$ (M. S. D : C) : ($m.s.d:c$). Hoc eſt tenacitates materiæ tuborum æqualis roboris, ſunt ut facta ex altitudinibus liquorum mediis & gravitatibus eorum ſpecificis in diametros tuborum applicata ad craſſities materiæ, ex qua tubi parati ſunt.

Scholion.

227. Ut uſus præcedentium regularum innoteſcat, unum atque alterum exemplum afferre libet. *Exempl.* I. Ad Calcem Operis nonnullorum Academiæ Reg. Pariſ. Scientiarum ſociorum, quod inſcribitur, *Divers Ouvrages de Mathematique & de Phyſique de Meſſieurs de l'Academie Royale des ſciences*, extat diſſertatiuncula Celeb. Olai Romeri Pani De Craſſitie & Viribus tuborum in aquæductibus, ſecundum diverſas fontium altitudines, diverſaſque tuborum diametros, in qua diſſertatione fol. 517. relatum legitur, tubum plumbeum diametri 16 pollicum, cum craſſitie $6\frac{1}{3}$ linearum (linea ipſi eſt 12^a. pollicis vel 144^a. pedis Pariſienſis pars) preſſioni aquæ 50 pedum in altitudine ſufficienter reſtitiſſe in experimento quodam Verſaliis olim ſumpto, qua obſervatione poſita, quærit Autor qualis craſſities alii tubo plumbeo tribui debeat orificium habenti 10 digitorum, ut aquæ preſſionem 40 pedum perferre queat. Canon articuli ſuperioris 275 quæſtioni illico ſatisfaciet, cum hoc caſu craſſities ſint ut rectangula per axem, nam in tubo obſervationis multiplicando aquæ altitudinem 50 pedum in diametrum tubi 16 pollicum, productum 800 denotat rectangulum per axem in tubo obſervationis, & ducendo altitudinem aquæ 40 pedum in diametrum 10 pollicum alterius tubi proveniet 400 pro rectangulo per axem in hoc tubo, quod cum illius 800 tantum dimidium ſit, hujus tubi craſſities juxta canonem tantum dimidia erit crasſitiei in tubo obſervationis, quæ erat $6\frac{1}{3}$ linearum; ergo quæſita alterius tubi crasſities erit tantum $3\frac{1}{6}$ linearum, loco $4\frac{1}{2}$ lin. circiter, quam Dn. Romerus repererat, quia reſiſtentias tuborum ſtatuit eſſe in duplicata ratione craſſitierum cæteris exiſtentibus paribus, quas ſupra in propoſitione apparet eſſe in ſimplice non duplicata illa ratione.

278. *Exempl.* II. Mariottus cenſet, ut habetur in eodem Opere quod in antecedenti exemplo memoravi fol. 513, tubum cupreum ſex pollicum in diametro aquæ presſionem 30 pedum perferre poſſe cum crasſitie dimidiæ lineæ. Ponamus has tuborum plumbei & cuprei reſiſtentias aquæ presſionibus præciſe æquari, invenienda-que ſit proportio tenacitatis plumbi & cupri. In formula ſuperiore (§. 276.) eliſis S & s utpote æqualibus provenit $T : t = (M.D : C) : (m.d : c)$. ubi majuſculæ ad tubum plumbeum, minuſculæ verò ad cupreum pertinent, hinc ſubrogatis ordine loco M, D, C, nu-

meris 50, 16, 6$\frac{1}{3}$; & loco m, d, c, numeris 30, 6 & $\frac{1}{2}$; invenietur $T : t = \frac{2400}{19} : 360 = 240 : 684 = 20 : 57$, atque adeo tenacitas plumbi foret, juxta has obſervationes, paulo major quam ſubtripla tenacitatis cupri.

PROPOSITIO IX. Theorema.

279. *Si vaſis* BAS, *liquoris cujuscunque heterogenei pleni, partes* BAE, SAE *inſtar alarum follis circa verticem* A *ab invicem diduci queant, earundemque partium vel complementorum* OBbA, OSsA *ſolida analoga*
Fig. 23, 24. 2B2A2E, 2S2A2E, *vel* B2B2b2A, S2S2s2A *indicentur iisdem ſignis* δ, κ, *quibus eorundem ſolidorum analogorum centra gravitatis ſignantur, ſignoque* ω *pſeudocuneus* LPQ *ſcalæ gravitationum* LrQ *utrique vaſis alæ communis, quo ejusdem pſeudocunei centrum gravitatis ſignatur, potentiæ quædam æquales ponderi maſſarum* δ, κ *liquoris cujusdam homogenei, cujus denſitas eadem ſit cum* PV *media denſitate liquoris in vaſe heterogenei, in directionibus ſuis homologis* αδ, ξκ *vel* δα *&* κξ *per centra gravitatis ſolidorum* δ, κ *transeuntibus planisque* BS *normalibus vaſi applicatæ, & aliæ potentiæ* γ *&* ω *inter ſe æquales, utpote ſingulæ æquales ponderi molis liquidæ* ω, *cujus denſitas uniformis etiam ſit* PV *æqualis mediæ denſitati liquoris heterogenei, vaſi applicatæ in directionibus* bγ, sω, *plano* BS *æquidiſtantibus, & per centrum gravitatis* ω *pſeudocunei ſcalæ gravitationum transeuntibus; hæ quatuor potentiæ* δ, κ, γ *&* ω *ſimul agentes, quælibet ſcilicet ſecundum ſuam directionem, eadem vi pollent ad diducendas vaſis alas, quam habet eidem vaſi inditus liquor heterogeneus.*

Hæc propoſitio tantum eſt caſus particularis corollarii primi Propoſitionis X. libri primi, nam quæ in hac propoſitione generaliter dicitur ſcala potentiarum ſolido patienti perpendiculariter applicatarum, nunc eſt ſcala gravitationum L*r*Q, quandoquidem quodvis punctum *b* in ſuperficie A*b*B urgetur juxta directionem *bu* ſuperficiei perpendicularem (§. 260.) potentia æquali ponderi filamenti liquidi voluminis 3*er* & denſitatis PV æqualis mediæ denſitati liquoris heterogenei, quod pondus filamenti *r*3*e* exponitur (§. 33.) facto *r*3*e*. PV ex volumine ſcilicet in denſitatem liquoris, atque adeò liquoris gravitationes in cavam vaſis BAS ſuperficiem idem præſtant ac potentiæ ſingulis punctis cavæ iſti ſuperficiei applicatæ, quas deſignant ordinatæ reſpectivæ *r*3*e* ſcalæ gravitationum L*r*Q ductæ in datam PV. Propterea (§. 81.) liquor heterogeneus

vaſis

vaſis eundem effectum præſtabit, quem potentiæ expreſſæ per ſolida δ, κ, & ω ducta in PV, atque adeò æquales ponderi liquoris homogenei denſitatis PV ſub voluminibus illis δ, κ, ω, applicatæ ſolido BAS in directionibus $\alpha\delta$, $\xi\kappa$ vel $\delta\alpha$, $\kappa\xi$ & bγ, sω. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

280. Adeoque momenta fluidi heterogenei vaſis alas diducere conantis circa hypomochlion A (§. 82.) pro ala BAE erunt $PV . \delta . \alpha E + PV . \gamma . Ae$, & pro ala SAE erunt $PV . \kappa . \xi E + PV . \omega . Ae$. Hæc enim facta $PV . \delta$, $PV . \gamma$, $PV . \omega$, $PV . \kappa$ ſignificant pondera liquoris denſitatem PV habentis ſub voluminibus δ, γ, ω, & κ.

Corollarium II.

281. Antecedens corollarium juxta §. 263. etiam obtinet, cum vaſis alæ ab aliquo fluido ambiente extus premuntur, ſed permutatis gravitationum directionibus, hoc eſt, ſicut interni liquoris gravitationes vaſis alas ab invicem diducere conantur, ita vice verſa ambientis fluidi preſſione fit, ut eædem alæ ad ſe invicem conſtringantur fortiter. Unde eædem formulæ, quæ in corollario præcedenti momenta liquoris interni vaſis alas dilatare conantis deſignabant, momenta pariter liquoris ambientis alasque conſtringere conantis exprimeut, ſed ſcalæ gravitationum liquoris exterioris applicatæ.

Scholion.

Adeoque, ad æſtimandas liquoris preſſiones in vaſis diducibilibus, tota difficultas eo reducitur, ut habeatur regula calculum ſubducendi pro inventione momentorum ſolidorum δ & κ reſpectu plani recti AE, & pſeudocunei ω reſpectu plani PQ, vel ſubinde etiam reſpectu plani OAO figuræ 24, quoties ſcilicet vaſis vertex A surſum reſpicit. Calculus vero facile reduci poteſt ad quadraturas figurarum, ut ex ſequentibus duobus theorematibus haud difficulter perſpicietur.

PROPOSITIO X. Theorema Geometricum.

Fig. 27. 282. *Solidi cujuſvis* CBAD, *cujus ſectiones* cbd *baſi* CBD *parallelæ ſint, figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ, momentum reſpectu plani* CAD *baſi* CBD *recti, æquabitur facto ex trilineo quodam* AEFfA *in rectangulum ſub* EF, *quam ipſi* BE *rectæ* CD *normali æqualem ponimus, & data recta* D *ejus magnitudinis, ut parallelepipedum ſub quadrato rectæ* BE *vel* EF *& hac data* D, *æquale fiat ſolido ex bilineo* CBD *in* XE, *exiſtente hac* XE *diſtantia centri gravitatis* X *bilinei* CBD *ab ejus baſi* CD, *ipſum verò trilineum ea lege deſcriptum ſit, ut ejus ordinatæ* EF, ef *ſint in triplicata proportione ordinatarum ipſis in directum poſitarum* BE, be, *in figura* AbBE, *quæ plano* CAD *recta eſt, & per axem* AE *figuræ* CAD *tranſit.*

Sit *x* centrum gravitatis figuræ *cbd*, eritque *xe* diſtantia hujus centri à baſi *cd* bilinei *cbd* in plano figuræ AbBE, quandoquidem figuræ CBD, *cbd* (ſecundùm hypotheſin) ſimiles & ſimiliter poſitæ ſunt, eritque adeò $CBDC.XE : cbdc.xe = BE^3 : be^3$ id eſt conſtr. $= EF : ef = D.EF^2 : D.EF.ef$; atqui (conſtr.) eſt $D.EF^2$ vel $D.BE^2$ æquale ſolido ex CBDC in XE, ergo etiam D.EF.*ef* æquabitur ſolido ex *cbdc* in *xe*, ſeu momento bilinei *cbd* axi *cd* appenſi. Jam, quia momentum ſolidi totius CBAD reſpectu plani CAD æquatur momentis omnium bilineorum *cbdc*, quæ in hoc ſolido continentur, id eſt, omnibus *cbdc* in *xe*, idem ſolidi momentum etiam æquale erit omnibus D.EF.*ef*, quorum ſingula ſingulis *cbdc.xe* æqualia ſunt; atqui omnia $D.EF.ef = D.EF.$ omn. $ef = D.EF.$ aream EAfF. Ergo momentum ſolidi CBAD æquatur facto ex area EA*f*F in rectangulum D.EF. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

283. Adeoque momentum complementi ſolidi CBAD reſpectu ejusdem plani CAD, ſeu ſolidi reſidui poſt detractionem ipſius CBAD à priſmate recto & æquealto CDBG, æquabitur facto ex trilineo AFH in rec-lum D.EF. Nam momentum priſmatis CDBG eſt factum ex rec-lo EH in rec-lum D.EF, & ſolidi CBAD momentum æquatur facto AEF*f*A. D.EF, adeoque momentum complementi hujus ſolidi CBAD æquatur omninò facto ex rec-lo EH, demto trilineo EAF, in rectangulum D.EF, hoc eſt facto ex AFH in D.EF.

Co-

Corollarium II.

284. Unde, ſi ſolidum noſtrum CBAD fuerit analogum ſolido patienti BAE propoſitionis præcedentis, atque adeò idem ſit cum ſolido δ, erit hoc caſu $\delta.\alpha$E ſeu momentum ſolidi δ = EAfF, D.EF, in caſu figuræ 23. quo vertex ſolidi BAS deorſum reſpicit, & $\delta.\alpha$E = HFfA. D. EF in caſu figuræ 24, quo vertex ſurſum reſpicit.

PROPOSITIO XI. Theorema Geometricum.

285. *Si priſma rectum ſuper baſi* CAD *ſectum intelligatur ſuperficie quadam curva* QrLCD, *naſcetur inde cunei ſpecies* QACD, *cujus acies erit in linea* CD, *ejusque facies curva aciei* CD *adjacens oritur motu parallelo lineæ* CD, *ita ut fixum in ea punctum* E *ſemper in curva* LrQ *exiſtat inter movendum, lineaque* CD *plano* LPQ *perpendicularis ſit, hujus cunei momentum reſpectu plani* PQ *alteri* CAD *recti æquabitur facto areæ ſeu bilinei* EiA *in rec-lum* AE. CD; *ubi bilinei ordinata quæcunque* ei *fuerit ad ordinatam homologam* er *figuræ* PLQ, *ſicut rectangulum coordinatarum* Ae, cd *in figura* CAD, *ad rectangulum ex datis* AE, CD. Fig. 28.

Nam quia (ſecundùm hypotheſin) *ei* : er = *Ae. cd* : AE. CD, erit *Ae. cd. er* hoc eſt momentum rec-li cd. er ad diſtantiam Ae plano PQ appenſi = ſolido AE. CD. *ei*. Atqui momenta omnium rectangulorum *cd. er* contentorum in pſeudocuneo æquivalent momento iſtius pſeudocunei, ergo etiam omnia EA. CD. *ei*, hoc eſt, factum ex rec-lo AE. CD in bilineum E*i*A, æquantur momento pſeudocunei QACD. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

286. Quoties figuræ CAD vertex A deorſum converſus eſt, atque adeo cum puncto P congruit, toties curva EiA per puncta L & P tranſibit, adeo ut ordinatæ ejus in his punctis nullæ ſint. Sed ſi vertex A ejusdem figuræ CAD ſurſum reſpicit, adeo ut baſis CD per punctum P tranſeat & vertex cum puncto L confundatur, curva LηI tranſibit quidem per punctum L, non verò per punctum P, cum ordinata ejus in hoc puncto PI ipſi PQ ſeu PL æqualis futura ſit; nam ſi CD eſt in P & A in L, analogia *eη* : *er* = *Ae. cd* : AE. CD,

 fiet

fiet PI : PQ = AE . CD : AE . CD, atque adeò PI = PQ = PL, ubi ſcilicet *Ae* facta fuerit AE. Hocque caſu erit momentum ſolidi reſpectu plani per L transeuntis alterique PQ æquidiſtantis, æquale facto ex rec-lo AE . CD in aream PLηI.

COROLLARIUM II.

287. Hinc, ſi figura CAD fuerit ſectio recta in ſolido patiente BAS figurarum 23 & 24, & curva LrQ ſcala gravitationum liquoris heterogenei, ſolidum QPCD erit pſeudocuneus ſcalæ gravitationum, & momentum ejus, ſeu ω. *Ae*, in caſu figuræ 23 = AE . CD . L*i*PL, & ω. *Ae* in caſu figuræ 24, = AE . CD . LηIP.

SCHOLION.

288. Patet ergo computum momentorum liquorum in vaſis diducibilibus gravitantium totum deduci ad inveſtigationem arearum AEF*f*A, L*i*P & LηIP in figuris 27, 28. quæ in particularibus ex-
Fig. 23, 24. emplis ſemper haberi poſſunt, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter. Sit enim vas BAS conicum liquore homogeneo plenum, adeò
Fig. 27. ut curva LrQ abeat in lineam rectam, quo caſu ſolida δ & $\varkappa$ erunt ſimilia & æqualia ſolidis BAE & SAE, & ſolidum CBAD erit ſemiſſis coni recti, in quo cum ſit $EA^3 : eA^3 (= BE^3 : be^3) = EF : ef$, liquet curvam *A f*F fore hoc caſu parabolam cubicam, atque adeo trilineum EAF erit $= \frac{1}{4}$ AE . EF, & AFH $= \frac{3}{4}$ AE . EF. Et quia CBD eſt ſemicirculus, cujus centrum in E, erit CBDC . XE $= \frac{2}{3} BE^3 =$ D . BE^2, atque adeo D $= \frac{2}{3}$ BE. Hinc (§. 284.) $\delta . \alpha E = \varkappa . \xi E =$ D . EF . AEF $= \frac{2}{3}$ BE . EF . AEFA $= \frac{2}{3}$ BE . EF . $\frac{1}{4}$ AE . EF $= \frac{1}{6}$ AE . BE^3.

Fig. 28. Porrò exiſtente linea LrQ recta & LP = PQ, erit etiam L*e* = *er*, & ſic ubique: unde cum (§. 285.) *ei* ſit ad *er* ut *Ae* . *cd* ad AE . CD, erit ubique ordinata *ei* = *Ae* . *e*E . *cd* : AE . CD = Ae^2 . *e*E : AE^2, ſubſtituendo loco rationis *cd* : CD æqualem rationem Ae : AE propter ſimilitudinem triangulorum *Acd* & ACD, quandoquidem in præſenti caſu figura ACD eſt triangulum. Hinc reperietur per notiſſimas quadraturarum methodos bilineum E*i*A $= \frac{1}{12} AE^2$: hinc in caſu figuræ 23. habebitur (§. 287.) ω. *Ae* (= AE . CD . LiAL) = AE . CD . $\frac{1}{12} AE^2$, ſeu, quia CD tantundem eſt ac 2BE, $= \frac{1}{6}$ BE . AE^3.

Erit

Erit ergo $PV.\delta.\alpha E + PV.\omega.\ Ae = \frac{1}{6}.\ PV.\ AE.\ BE^3 + \frac{1}{6}.\ PV.\ BE.\ AE^3 = \frac{1}{6} PV.\ AE.\ BE.\ AB^2 = PV.\varkappa.\xi E + PV.\omega.\ Ae$ quia in præſenti caſu alæ BAE & SAE, utpote ſemiſſes coni recti BAS, ſimiles & æquales ſunt. Fig. 23.

289. Si conus BAS ab aëre etiam extus premi ponatur, & quæratur altitudo AE ipſius coni, in ſuppoſitione æquilibrii internæ liquoris preſſionis in cavam coni ſuperficiem cum externa aëris in convexam, erit hoc caſu ſcala gravitationum LrQ linea recta axi LP ſeu AE parallela, cujus ab hac AE diſtantia ſit PQ in figuris 23, 24, & 28, & EM vel AN in figura 27. Hoc caſu ſolidum δ vel $\varkappa$ erit priſma baſeos CBDC & altitudinis EM ſeu PQ, hujusque priſmatis momentum ſeu $\delta.\alpha E$ nunc fiet $=$ CBDC. XE. EM (vel quia ſupra inventum eſt CBDC. $XE = \frac{2}{3} BE^3$) $= \frac{2}{3}$ EM. BE^3. Loco pſeudocunei ω nunc habebimus priſma ex baſi CAD & altitudine PQ, unde, quia generaliter eſt $ei : er = Ae.cd : AE.\ CD$ (vel propter triangula ſimilia CAD & cAd) $= Ae^2 : AE^2$, & propter æquales er & PQ, cum linea LrQ ipſi EA parallela ſupponenda ſit, atque per Q transiens, erit $ei = Ae^2.\ PQ : AE^2$, hocque caſu foret curva EiA parabola conica, cujus parameter eſt $AE^2 : PQ$, adeò ut area $EiAE$ hoc caſu futura ſit $= \frac{1}{3}$ AE. PQ $= \frac{1}{3}$ AE. EM; atque adeò $\gamma.\ Ae = \omega.\ Ae$ (= AE. CD. EiAE) $= \frac{1}{3} AE^2$. CD. EM $= \frac{2}{3}$ BE. EM. AE^2. Idcirco vocando athmoſphæræ denſitatem mediam Z, erit ſumma momentorum preſſionis aeris, ſeu $Z.\delta.\alpha E + Z.\omega.Ae = \frac{2}{3} Z.\ BE.\ EM.\ BE^2 + \frac{2}{3} Z.\ BE.\ EM.\ AE^2 = \frac{2}{3}.\ Z.\ BE.\ EM.\ AB^2$. Hinc, quia (ſecundùm hypotheſin) in caſu æquilibrii $PV.\delta.\alpha E + PV.\omega.\ Ae = Z.\delta.\alpha E + Z.\omega.\ Ae$, erit etiam $\frac{1}{6} PV.\ AE.\ BE.\ AB^2 = \frac{2}{3}\ Z.\ BE.\ BM.\ AB^2$, adeoque $PV.\ AE = 4.\ Z.\ BM$. Invenimus enim ſupra, $PV.\delta.\alpha E + PV.\ \omega.\ Ae = \frac{1}{6} PV.\ AE.\ BE.\ AB^2$, & paulò ante pro momentis aeris extus prementis, ſeu pro $Z.\delta.\alpha E + Z.\omega.Ae$ invenimus $\frac{2}{3}Z.\ BE.\ BM.\ AB^2$. Atqui PV. AE denotat pondus columnæ liquidæ, cujus altitudo AE & media denſitas PV, & Z. BM gravitationem totius atmoſphæræ, quam ſimplicius per p indicabimus; ergo ſi vas conicum BAS hydrargyri plenum ſit, oportet altitudinem AE quadruplo majorem eſſe altitudine columnæ mercurialis æquivalentis atmoſphæræ preſſioni, atque adeò minimum 120. digitorum, cum atmoſphæræ gravitatio æquivaleat 30. digitis Mercurii, ad obtinendum æquilibrium inter externam atmoſphæræ preſſionem & internam Mercurii gravitationem follis conici alas ab invicem diducere conantem.

Sin

Sin vero coni vertex ſurſum converſus eſſet, ut in fig. 24. eo caſu præcedentia theoremata præberent PV. AE = $\frac{4}{3}$ Z. BM pro caſu æquilibrii inter preſſuram externam aëris & internam Mercurii, atque adeò pro hoc æquilibrio obtinendo nunc ſufficeret altitudo AE 60. digitorum. Atque hæ determinationes ad amuſſim conſentiunt cum iis, quæ Celeb. Jac. Bernoullius ſuper hac re prodidit in Actis Erudit. Lipſ. 1686. & 1687. occaſione alicujus perpetui Mobilis in Novellis Reipublicæ literariæ D. Bælii 1685. propoſiti, quod conſiſtebat in quadam follis ſpecie triangularis, circa axem horizontalem alterutrius alæ medio affixum mobilis, Mercurio modo implendi, modoque etiam in ſitum rectum deducti iterum aliquo usque deplendi &c. Hujus machinæ ſucceſſum irritum fore ex principiis hydroſtaticis & vectis natura oſtendit eleganter modo laudatus Bernoullius. Papinus verò, etſi ſucceſſum pro dubio habuiſſe videtur atque imperfecta preſſionum æſtimatione impoſſibilitatem motus ejus utcunque oſtenderit, nihilominus tamen Bernoullianam machinæ diſcuſſionem eludi poſſe exiſtimavit, motum parallelum alis tribuendo, quo vectis rationem, in qua Bernoullii impugnatio fundata erat, ceſſaturam eſſe confidebat perperam. Ea vero, quæ ſuper prædictam machinam in utramque partem agitata fuere, legi poſſunt in Actis Lipſ. ſupra citatis.

CAPUT III.

De Æquilibrio Corporum ſolidorum in Fluidis quibuscunque demerſorum, vel iisdem Fluidis innatantium.

PROPOSITIO XII. Theorema.

290. *Omne fluidum heterogeneum corpus quodcunque ſolidum in ipſo demerſum, vel eidem innatans, tanta vi in altum pellere conatur, quantum eſt pondus maſſæ liquoris cujusdam homogenei ſub volumine ſolidi analogi corpori demerſo ejusve parti immerſæ, cujus denſitas æquet mediam denſitatem fluidi heterogenei, ſecundum directionem fluidi ſuperficiei normalem per centrum gravitatis ſolidi analogi transeuntem.*

Fig. 25. Generale iſtud theorema aliud non eſt quam §. 83. in concreto ſumtus; idcirco reſumendo ſchema dicti paragraphi ponendoque lineam OLQ, quæ illic dicebatur ſcala potentiarum ſolido patienti appli-

applicatarum nunc eſſe ſcalam preſſionum ſeu gravitationum fluidi heterogenei, planumque FO, quod ſupra in citato loco planum ſublime vocabatur, nunc in concreto erit ſuperficies fluidi, in quo corpus AB*a*S demerſum eſt, & ex dicto paragrapho 83. illicò liquebit ſolidum corpus *a*BAS ea vi in altum urgeri, quæ æquetur ponderi maſſæ liquidæ 2*a*2B2A2S ſub volumine ſolidi demerſo corpori analogi, cujus denſitas uniformis æqualis ſit PV ſeu mediæ denſitati fluidi heterogenei. Nam (§. 260.) ſingula puncta ſuperficiei corporis *a*BAS preſſionem ſubeunt æqualem gravitati ſeu ponderi filamenti cujusdam fluidi homogenei, cujus filamenti longitudo eadem eſt cum homologa ordinata ſcalæ gravitationum OLQ, & fluidi homogenei denſitas uniformis æqualis mediæ denſitati PV fluidi heterogenei in quo corpus *a*BAS demerſum eſt, quod pondus filamenti (§. 33.) æquatur perpetuo facto ex volumine ejus expoſito per ordinatam ſcalæ gravitationum in denſitatem ejus PV, unde, quia in caſu præſenti potentiæ ſingulis punctis ſuperficiei *a*BAS perpendiculariter applicatæ ſunt ordinatæ reſpectivæ ſcalæ OLQ in datam PV ductæ, liquet (§. 83.) potentiam corpus *a*BAS in fluido heterogeneo attollere conantem facto ex ſolido 2*a*2B2A2S in PV exponendam eſſe, hoc eſt (§. 33.) pondere maſſæ liquoris homogenei, cujus denſitas PV & volumen ſit modo recenſitum ſolidum, dictæque potentiæ directionem *xy* plano FO, hoc eſt fluidi ſuperficiei normalem, transire per centrum gravitatis ſolidi 2*a*2B2A2S. Quod primùm de corpore demerſo *a*BAS erat demonſtrandum.

Non diverſa erit demonſtratio circa corpus *a*BAS fluido heterogeneo XZ innatans. Sit enim hujus fluidi ſcala gravitationum curva LQ, & 2B2A2S ſolidum analogum parti immerſæ BAS, potentia ſolidum *a*BAS attollere connitens etiamnunc erit pondus molis fluidæ 2B2A2S, cujus denſitas uniformis PV æquatur mediæ denſitati liquoris heterogenei, ejusque directio ſuperficiei liquoris heterogenei FL perpendicularis, transibit per centrum gravitatis ejusdem ſolidi 2B2A2S per §. 83. Quod erat demonſtrandum. Fig. 26.

Corollarium I.

291. Hinc corpora in fluidis exiſtentia non gravitant totâ ſuâ abſolutâ gravitate, ſeu pondere abſoluto, ſed duntaxat pro quantitate, qua pondus illorum abſolutum ſuperat pondus maſſæ fluidi homogenei, cujus volumen ſit ſolidum corpori dato analogum, denſitas-

que par mediæ denſitati fluidi, in quo corpus demerſum eſt. Adeoque, ſi pondus maſſæ fluidæ modo dictæ æquetur ponderi abſoluto corporis, hoc corpus in fluido non gravitabit, hoc eſt, non deſcendet nec aſcendet; & tantum negative gravitabit, hoc eſt, in fluido aſcendet, ſi nominata fluidi moles gravior fuerit quam demerſum corpus, vi æquali exceſſui, quo fluidi pondus ſub volumine ſolidi, dato corpori analogi, hujus pondus excedit.

Corollarium II.

292. In corollario præcedenti jam ſupponitur lineam jungentem centra gravitatis corporis dati & ſolidi eidem analogi, juxta ſcalam gravitationum, fluidi ſuperficiei normalem eſſe, alioqui corpus in fluido demerſum in omni caſu circa ſeipſum convertetur, usque dum dicta linea centra gravitatis conjungens fluidi ſuperficiei perpendicularis facta fuerit. Nam ſi linea *xy* producta ſuperficiei fluidi FO
Fig. 25. ad angulos rectos occurrat, atque per centrum gravitatis ſolidi 2*a*2B2A2S tranſeat, vi præſentis propoſitionis ſolidum *a*BAS juxta directionem hanc *xy* ſurſum agetur, ipſum verò proprio pondere deſcendere nititur juxta directionem *tu* parallelam *xy* per centrum gravitatis corporis *a*BAS tranſeuntem. Jam, ſi linea connectens centra gravitatis corporum *a*BAS & 2*a*2B2A2S plano FO obliqua ſit, neceſſe eſt ut directio *tu* corporis *a*BAS deſcendere conantis & *xy* directio potentiæ attollentis ſint diverſæ, ſeu non congruentes, unde, quia idem corpus *a*BAS à duabus potentiis oppoſitas in partes agentibus juxta *tu* & *xy* urgetur, liquet id in ſe ipſum converſum iri juxta ordinem literarum *a*BAS, nec motum ejusmodi converſionis prius poſſe ceſſare, quam corpus eum intra fluidum ſitum nactum ſit, quo directiones *tu* & *xy* ſibi invicem congruant, atque adeò linea jungens centra gravitatis ſolidorum *a*BAS & 2*a*2B2A2S plano FO perpendicularis facta ſit.

Hactenus generalia circa æquilibria & motus corporum in omnis generis fluidis poſitorum, ſequuntur unum alterumve corollarium circa fluida homogenea, & faciliora aliquot problemata.

Corollarium III.

293. Si corpus *a*BAS fluido homogeneo immerſum eſt, fluidi ſcala gravitationum erit triangulum rectangulum iſoſceles OPQ, &

& ſolidum $2a2B2A2S$, corpori $aBAS$ analogum, eidem ſimile & æquale erit; atque adeò fluidum homogeneum tanta vi ſeu potentia corpus in ipſo demerſum vel innatans attollere conatur, quantum eſt pondus maſſæ liquoris ſub volumine corporis demerſi ſimili & æquali vel partis fluido immerſæ. Idcirco cuilibet corpori tantum de ſuo pondere intra ejusmodi fluidum decedit, quantum ponderat maſſa fluidi modo recenſita. Atque in hoc corollariolo fundantur ferme omnes regulæ, quas Autores circa æquilibria ſolidorum cum fluidis homogeneis ſubinde tradunt.

Corollarium IV.

294. Hinc etiam (§. 292.) linea jungens centra gravitatis corporis cujusque fluido homogeneo innatantis & in eo in æquilibrio conſiſtentis, ejusque partis fluido immerſæ ſuperficiei fluidi normalis exiſtet. Alioqui corpus fluido innatans hinc & inde vacillaret, donec in hunc ſitum ſe compoſuerit.

Corollarium V.

295. Diverſæ partes unius ejusdemque corporis diverſis liquoribus homogeneis immerſæ in caſu æquilibrii, ſunt in reciproca ratione denſitatum ſeu gravitatum ſpecificarum liquorum, quibus idem corpus ſucceſſive immerſum eſſe ponitur.

Dicantur liquores L, l, eorum gravitates ſpecificæ S, s, corporis liquoribus ſucceſſive immiſſi partes immerſæ P, p; & dico fore $P:p=s:S$. Nam quia corporis liquori L immerſa pars eſt P & S ſpecifica gravitas liquoris, factum ex P in S (§. 33.) exprimet pondus abſolutum maſſæ liquidæ ſub volumine P, & eandem ob rationem $p.s$ denotabit pondus maſſæ liquoris l ſub volumine p; ſed pondera $P.S$ & $p.s$, quæ in caſu æquilibrii uni eidemque corpori liquoribus L, l immerſo æqualia ſunt, etiam inter ſe æquabuntur; adeò ut $P.S=p.s$, & per conſequens $P:p=s:S$.

Scholion.

296. Corollarium præcedens fundamentum continet diverſarum machinularum hygroſtathmicarum, quibus diverſorum liquorum ſpecificæ gravitates explorari ſolent. Uſitatiſſima conſtat bulla vitrea M collo tereti & cavo MA inſtructa, cui ſubinde pauxillum Mercu- Fig. 67.

 rii

rii infundi ſolet, ut machinula in liquoribus ſitu ſemper erecto conſiſtat; bulla verò M ut plurimum deſinit in ſacculum N, in quo infuſus Mercurius ſe colligere poſſit. Machinulæ collum MA ab artificibus in partes æquales dividi ſolet, ſed perperam, ad indicandas æquales gravitatis liquorum differentias. Verùm quâcunque ratione collum diviſum ſit, ope nonnullarum obſervationum machinula apta redditur indicandis omnium liquorum ſpecificis gravitatibus. Ipſæ vero obſervationes ſequenti ratione peragi debent. Fig. 67. Notetur primùm totius machinulæ cum indito Mercurio pondus, quod nominabimus P, idque granis expreſſum ſupponemus.

Diviſiones colli.	Pondera machinulam liquori immergentia.
1 . . .	$P = P$
2 . . .	$2P = P + a$
3 . . .	$3P = P + b$
4 . . .	$4P = P + c$
5 . . .	$5P = P + d$
6 . . .	$6P = P + e$
&c.	&c.

Machinula deinde liquori cuidam L immiſſa mergatur usque ad primam diviſionem, ſeu usque ad GG, quod ſemper fieri poteſt addendo vel demendo nonnihil Mercurii. Appendantur porro machinulæ ſucceſſivis vicibus tot grana, usque dum eadem liquori L immergatur ad diviſiones omnes ſequentes 2, 3, 4, 5, 6, ponderaque totalia, quæ machinulam in eodem liquore usque ad dictas diviſiones deſcendere faciunt, ſint P, P + a, P + b, P + c, &c. qualia in adjecto laterculo conſpiciuntur, & quæ pondera in hoc laterculo etiam ſignantur per P, 2P, 3P, 4P reſpective; in quibus expreſſionibus numeri literæ P præfixi non denotant multipla ponderis P, ſed ſunt duntaxat notæ generales characteriſticæ ſignificantes ad quamnam colli diviſionem referendus ſit granorum numerus per literam P cum ſuo præfixo numero ſignificatus. Adeoque P, 2P, 3P, 4P &c. ſignificant quidem diverſos numeros granorum P, P + a, P + b, P + c qui ex obſervatione innoteſcunt, atque adeò in tabella quadam, ut in ſuperiori laterculo, diligenter notandi ſunt, ſed minime progreſſionem arithmeticam, qualem ſeries P, 2P, 3P, &c. exhibere videtur; ex ejusmodi obſervationibus parata tabella machinulam omnium reliquorum liquorum gravitati inveſtigandæ aptam reddunt; nam remotis omnibus granis *a*, *b*, *c*, *d*, &c. ut ſola machinula cum indito Mercurio remaneat, immergatur ea in liquore quodam A, usque in BB, id eſt ad quartam colli diviſionem, & in alio liquore O immergatur usque ad 6 ſeu in CC, eritque gravitas ſpecifica liquoris A ad gravitatem ſpecificam alterius O, ut numerus granorum 6P conveniens ſextæ colli diviſioni ad numerum granorum 4P, qui convenit quartæ diviſioni; id eſt gravitates ſpecificæ liquorum ſunt

in

in reciproca ratione numerorum ex conſtructa tabula excerptorum, qui colli diviſionibus, ad quas in liquoribus machinula deſcendit, conveniunt. Demonſtratio facilis eſt; nam (§. 295.) gravitas ſpecifica liquoris A eſt ad gravitatem ſpecificam alterius O ſicut N6 ad N4 hoc eſt, in reciproca ratione partium machinulæ liquoribus immerſarum, atqui N6 eſt ad N4, ut maſſa liquoris L cujus volumen eſt N6 ad maſſam ejusdem liquoris cujus volumen eſt N4; hæ verò maſſæ N6 & N4 liquoris L ponderabunt 6P & 4P grana reſpective, cùm tot grana cum fluidi L maſſis modo indicatis in æquilibrio fuerint vi obſervationis paulo ante deſcriptæ; ergo gravitas ſpecifica liquoris A eſt ad gravitatem ſpecificam liquoris O, ut 6P ad 4P, prout dicebatur. Hujus generis aliæ machinæ ex iisdem principiis conſtrui poſſunt.

Scholion II.

297. Etſi me non lateat æquilibria fluidorum cum inter ſe, tum etiam ſolidorum corporum cum fluidis homogeneis ex aliis principiis nonnihil brevius poſſe deduci, ſcilicet ex fundamento maximi deſcenſus centri gravitatis, quem omnia corpora inter ſe commiſſa affectant; ſeu, quod ferme eodem redit, ab æqualitate momentorum corporum inter ſe agitandorum, cujusmodi principiis Paſcalius aliique uſi ſunt. Verùm, præterquam quod talia principia indirecta ſunt, ea vix ac ne vix quidem absque longis ambagibus fluidis heterogeneis applicari poſſe videntur in ea univerſalitate, in qua præcedentes propoſitiones ex principiis ſuis proximis directe deduximus; malui methodo & fundamentis circa potentias ſingulis punctis cujusque corporis applicatis, quæ in primo libro expoſuimus, inſiſtere, utpote quæ modum non inelegantem ſubminiſtrarunt preſſiones fluidorum heterogeneorum ad æquivalentes preſſiones fluidorum homogeneorum reducendi.

PROPOSITIO XIII. Problema.

298. *Datis diametro alicujus pilæ metallicæ cavæ, & ratione ſpecificæ gravitatis metalli, ex quo pila parata eſt, ad aliquem liquorem homogeneum, invenire diametrum cavitatis pilæ ad id requiſitæ, ut pila in liquore illo homogeneo ad datam profunditatem immergatur.*

Sit pila FDE, & ex diametro ejus FM, profunditate LM, ad quam pila liquori APB immergi debet, & ex ratione 1 ad *n* ſcili-

cet gravitatis ſpecificæ metalli ad liquoris gravitatem, invenire oportet diametrum HN cavitatis pilæ HIK ſuperficiei FDE concentricæ.

Quia in caſu æquilibrii pilæ cum liquore pondus pilæ (§. 293.) æquari debet ponderi, ſeu gravitati maſſæ fluidæ DME, atqui pilæ gravitas eſt factum ex ſphæra FDE — ſphær. HIK in ſpecificam metalli gravitatem, quæ eſt ut 1, & gravitas maſſæ liquoris, eſt ut factum ex ejus volumine DME in gravitatem ejus ſpecificam n, ergo ſphær. FDE — ſph. HIK $= n$. ſegm. DME. Dicantur FM, a; circumfer. FDE, b; LM, c & denique HN, x; eritque ſphæra FDE — ſph. HIK $= (a^3b - bx^3) : 6a$; & ſegmentum ſphæricum DME $= (3abcc - 2bc^3) : 6a$, quod ſegmentum ductum in n, præbet $(3abccn - 2bcn^3) : 6a = (a^3b - bx^3) : 6a$, ex qua elicitur $x^3 = a^3 - 3accn + 2c^3n$, vel $\sqrt[3]{(a^3 - 3accn + 2c^3n)} = x$, ſeu poſita $c = a : m$, exiſtente m numero quocunque, erit etiam $x = a\sqrt[3]{(m^3 - 3mn + 2n : m^3)}$. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

299. Hinc, ſi tota pila fluido debet immergi, fiet $c = a$, ſeu $m = 1$, & poſtrema æquatio mutabitur in $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$. Idcircò, ſi pila ænea in aëre octingenties aquâ leviore natare ponatur, erit, poſita gravitate ſpecifica æris noncupla gravitatis aquæ, $n = 1 : 7200$, atque adeò formula $x = a\sqrt[3]{(1 - n)}$ abit in $x = a\sqrt[3]{(7199 : 7200)}$, atqui per compendium logarithmorum invenietur valor rationalis ipſius $a\sqrt[3]{(7199 : 7200)}$ inter fractiones decimales 0. 99995a & 0. 99996a, adeòque $a - x$ ſeu dupla metalli craſſities eſt minor quinque centies milleſimis diametri FM, atque adeò craſſities ipſa FH vel MN minor una quadrageſies milleſima ejusdem diametri FM particula. Unde, ſi globus æneus cavus parari deberet, cujus craſſities MN tantum ſit unius ſcrupuli ſeu 144^mæ pedis partis, pilæ diametrum majorem 277 pedibus eſſe oporteret, ut in aere librata conſiſtere poſſit. Sin vero cum P. Franciſco de Lanis Pilæ æneæ diametrum 8. pedum aſſumere velimus, ejus craſſities minor requireretur, quam una quinquies milleſima pedis pars; ac denique ſi diameter ſtatuatur cum eodem Autore Tom. II. fol. 291. *Magiſterii Naturæ & Artis*, 25 pedum, craſſities metalli foret minor quam tres quadringenteſimæ pollicis partes. Hisce ſimilia etiam exhibere digna-

dignatus eſt Illuſtris Leibnitius Tom. I. *Miſcellaneorum Berolinenſium* pag. 127. ex quibus omnibus abunde liquet, ſpem abjiciendam eſſe omnem, fore ut navigatio aërea fortunato aliquando eventu ſuſcipi queat, in quam egregius ille de Lanis nos erigere voluiſſe videtur.

PROPOSITIO XIV. Problema.

300. *Data ſpecificâ gravitate bacilli teretis & gracilis* AB *& liquoris cujusque homogenei, determinare quousque bacillus extremitate ſua* A *è filo ſuſpenſus, ita ut altera extremitate* B *libere pendeat, liquori debeat immergi.* Fig. 68.

Ponatur gravitatem ſpecificam bacilli AB ſe habere ad gravitatem ſpecificam liquoris ENF ut BD ad bacilli longitudinem AB, atque bacilli partem BC liquori immergi, quæritur magnitudo ipſius AC vel BC ex datis AB & DB.

Analyſis Geometrica. Per §. 293. bacillus liquori immerſus usque ad C perpendiculariter ſurſum agitur vi æquali ponderi liquoris ſub volumine BC partis bacilli liquori immerſæ juxta directionem IK per centrum gravitatis, ſeu per medium I ejusdem BC transeuntem liquorisque ſuperficiei EF normalem; adeoque ſi filo IKP trochleam K amplectens appenſum fuerit pondus P, æquale gravitati maſſæ liquidæ BC, hoc pondus P in directione KP deſcendere nitens eandem vim in bacillum juxta directionem IK exeret ac fluidum ENF bacillum attollere connitens; ipſe vero bacillus proprio ſuo pondere deſcendere conatur juxta directionem OQ ſuperficiei liquoris EF itidem perpendicularem & per centrum gravitatis bacilli, quod eſt in ejus medio O transeuntem; idcircò liquor baculum attollere conans & gravitas eundem effectum præſtabunt, quem præſtarent pondera P & Q, quorum hoc bacilli gravitatem abſolutam, illud verò, ut jam dictum, pondus liquoris ſub volumine BC deſignant, lineæ inflexili & gravitatis experti AB in directionibus IK & OQ inter ſe parallelis ac ſuperficiei liquoris EF normalibus, applicata; unde, cum bacillus liquori aliquousque immerſus (ſecundùm hypotheſin) in ſtatu manenti, ſeu in æquilibrio, conſiſtat, ex principio vectis erit (§. 55.) $P.SU = Q.TV$, demiſſa ſcilicet ex A normali AU ſuper EF, vel $P:Q = TV:SV = 2OA:2JA$ (ſeu producta BA in M, ut AM æqualis ſit CA) $= BA:BM$. Nam, quia IA eſt media arithmetica inter BA & CA vel AM, ejus dupla ſeu 2IA æquabitur

tur aggregato extremarum BA & CA vel AM, hoc eſt rectæ BM, & dupla ipſius OA eſt BA. Verùm pondus P eſt ad pondus Q (§. 33.) ut factum ex illius volumine BC in gravitatem ejus ſpecificam AB ad factum ex volumine alterius Q ſeu AB in denſitatem ſeu gravitatem ſpecificam ejusdem BD, hoc eſt $P : Q = BC.BA : AB.BD = BC : BD$. Atqui paulo ante habuimus $P : Q = BA : BM$, ergo inde naſcitur $BA : BM = BC : BD$; & $BM.BC = BA.BD$. Hinc ſi centro O & intervallo OB vel OA deſcriptus ſemicirculus BNA, atque per punctum in ejus diametro datum D perpendicularis diametro DN ducta ſit ſemicirculum DNA ſecans in N, erit BN^2 ($= BA.BD$) $= BM.BC$, atque adeò recta BN tanget ſemicirculum CNM centro A & intervallo AC vel AM deſcriptum in puncto N, quod proinde communis erit interſectio ſemicirculorum BND & CNM; atque adeò æquales exiſtent AC & AN; atqui hæc AN eſt media proportionalis inter datas BA & DA, ergo etiam AC, atque adeò hæc AC data eſt. Quod erat inveniendum.

Corollarium.

301. Adeoque etiam ex parte bacilli BC cuilibet liquori immerſa & bacilli ipſius longitudine AB, ſemper innoteſcet ratio gravitatis ſpecificæ liquoris ad gravitatem ſpecificam bacilli; etenim ad longitudinem bacilli BA ejusque partem CA extra liquorem extantem duntaxat ſumenda eſt tertia proportionalis DA, eritque BA ad BD ſemper ut gravitas ſpecifica liquoris ad gravitatem ſpecificam bacilli liquori aliquousque immerſi. Atque adeò portiones diverſæ BD, quæ reſultant à diverſitate liquorum, quibus bacillus ſucceſſive immergi poteſt, erunt in reciproca ratione gravitatum ſpecificarum ipſorum liquorum. Liquet ergo talem bacillum aptum exhibere inſtrumentum hygroſtathmicum (Gallis *Peſe-liqueur* dici ſolitum) quo liquorum ſpecificæ gravitates examinari queant. Qua ratione bacillus dividi debeat, ut ex partibus ejus immerſis gravitates liquorum dignoſci queant, facile colligitur ex hoc corollario, adeoque eidem ulterius explicandæ ſuperſedeo.

Hactenus aliquot exemplis illuſtravimus hydroſtaticæ regulam indicantem quousque corpora ſolida liquidis immergi debeant, ut cum hisce liquidis æquilibrium faciant; reſtat adhuc unicum exemplum adducendum, quo alia hydroſtaticæ regula, ſitum corporum ſolidorum in fluidis conſiſtentium reſpiciens, illuſtretur, hunc in finem

finem facillimum omnium eligemus propoſitione ſequenti excutiendum.

PROPOSITIO XV. Problema.

302. *Datâ ratione ſpecificæ gravitatis priſmatis triangularis* ABG *ad gravitatem alicujus liquoris* XBZ, *determinare ſitum priſmatis, in quo præcedente vertice* B *trianguli* ABG, *id liquori immiſſum cum eo in æquilibrio maneat.* Fig. 65.

Sit MBN pars liquori immerſa & punctum D ejus centrum gravitatis, C vero centrum gravitatis trianguli totius ABG, adeoque (§. 294.) lineam DC, jungentem centra gravitatis totius & partis immerſæ triangulorum, oportet eſſe liquoris ſuperficiei XZ perpendicularem in caſu æquilibrii. Jam ex centrobaricis conſtat, centra gravitatis C, D triangulorum ABG & MBN reperiri in lineis BP & BQ, baſes AG & MN triangulorum bifariam dividentibus in punctis P & Q, lineasque vel intervalla PC, QD trientes eſſe totarum PB & QB; hinc ductis PQ, PM & PN, ipſæ PQ & CD æquidiſtantes erunt, cum PC & QD ſint partes ſimiles ipſarum PB & QB. Jam cum oporteat ipſam CD perpendicularem eſſe rectæ XZ, neceſſe eſt ut etiam PQ eidem XZ vel MN normalis ſit, unde, quia jam QM & QN æquales oſtenſæ ſunt, ipſas PM & QNP pariter æquari oportet.

Porrò, quia in caſu æquilibrii maſſæ liquoris MBN pondus (§. 293.) æquale eſt ponderi abſoluto priſmatis ABG, per §. 33. erit gravitas ſpecifica liquoris ad gravitatem priſmatis ut triangulum ABG ad triangulum MBN; atque adeo hæc triangulorum ratio data, quandoquidem ratio gravitatis ſpecificæ liquoris ad priſma ABG (ſecundùm hypotheſin) data eſt. Propterea problema eo reducitur, ut deſcribatur centro QP & intervallo quodam PM vel PN circulus MON, qui ex lateribus AB & GB abſcindat ſegmenta MB & NB talia, ut ducta linea MN, triangulum ABG ſit ad triangulum MBN, vel rectangulum ABG ad rec-lum MBN in ratione data ſpecificæ gravitatis liquoris ad gravitatem priſmatis ABG, quam dicemus $a:f$. Idcirco demiſſis ex P perpendicularibus PR ad BA, PS ad BG ac denique BV ad AG, ſi dicantur AB, a; BG, b; BR, l & BS, m; incognita verò BM, x; ex comparatione triangulorum rectangulorum PRM & PSN, in quibus juxta ſuperius oſtenſa hypothenuſæ PM & PN æquantur, elicietur æquatio, quæ reducta exhibe-

bit iſtam biquadraticam $x^4 - 2lx^3 + 2bfmx - bbff = 0$, cujus radices determinabunt BM vel BN, atque adeò punctum M vel N & radium PM circuli deſcribendi MON, cujus interſectiones M & N cum rectis BA & BG determinant poſitionem rectæ MN. Quod erat inveniendum.

Similiter incidiſſemus in æquationem biquadratam, ſi loco priſmatis ABG ſumſiſſemus conum ſcalenum.

CAPUT IV.

De Figuris, quas fluida in corporibus flexibilibus ſtagnantia hisce corporibus flexibilibus inducere debent.

CONſideravimus hactenus vaſa liquores continentia tanquam rigida & inflexibilia, quorum figuræ à liquorum gravitationibus mutari nequeant. Sed ſi vaſa materia molli & flexili conſtent, non continget, ut liquor intra eorum cavitatem ſtagnans in ſtatu manenti ſtatim conſiſtere queat, quæcunque figura ipſis tributa fuerit, ſed poſteaquam ipſorum latera variis modis inflexa fuerint, eam liquoris preſſuræ figuram vaſis inducent, quam perfectum inter omnes potentias gravitantes æquilibrium depoſcet.

Ejusmodi vaſa in œconomia animali magno numero occurrunt, cum pleraque flexilia & mollia, utpote ex fibris carnoſis contexta, ſint, in quibus vaſis varii humores & fluida periodicis motibus circumeunt. Quales igitur figuras ejusmodi vaſa induere debeant non injucunda nec inutilis eſt diſquiſitio. Revera enim talis indagatio non contemnenda Celeb. Joh. Bernoullio produxit circa Vires & Motus muſculorum in Diſſertatione ejus ſuper hac materia oppidò eleganti, cujus præcipua contenta in Actis Lipſ. 1694. pag. 200. ſeq. continentur. Sic etiam inſignis Medicus & Geometra Scotus Archibaldus Pitcarnius illius generis ſpeculationes in Phyſiologiam loco multiplicium illorum fermentorum, quibus ſecretionum in œconomia animali negotium antehac transigi credebatur, ad Garamantas procul & Indos ablegandarum, invehere conatus totus in eo eſt, ut probet in ſua docta Diſſertatione de *Circulatione Sanguinis*, orificia vaſorum & poros glandularum partiumque corporis noſtri alias quam circulares figuras non habere, nec proinde figuris, ſed figurarum amplitudine inter ſe differre; ex quo deinceps concludit,

dit, *nulla fermentis peculiaria ſupereſſe promptuaria, fermentaque ipſa in Animali nulla.*

Figuram vaſorum circularem ex generali Mechanicæ principio, *Quod fluida quæcunque preſſionem ſuam communicent per lineam corpori continenti & fluidi actionem ſuſtinenti in quovis puncto impulſus perpendicularem*, ſupra etiam (§. 249.) à nobis demonſtrato, derivare contendit, ſectionem canalis axi rectam tanquam polygonum infinitilaterum reſpiciens, cujus polygoni latuscula indefinite parva impreſſiones fluidi juxta directiones ipſis normales ſuſtineant, & quia hæ impreſſiones in ſingula latera æqualia poligoni in circumſtantiis apud Autorem æquales ſunt, eas per lineolas rectas & poligoni lateribus perpendiculares repræſentat. Hucusque omnia bene, ſed dum ex eo, quòd hæ perpendiculares laterum poligoni cum ſe invicem angulos efficiunt, concludere vult, aut ſaltem inferre videtur, omnes dictas perpendiculares in uno eodemque puncto concurrere debere, fallitur, etſi cæterum certiſſimum ſit perpendiculares illas reapſe in uno eodemque puncto convergere; nam ex eo, quod duæ quæque perpendiculares concurrunt, non ſequitur omnes in uno puncto coire. In omni curva rectæ, quæ duobus curvæ contiguis elementis perpendiculares ſunt, angulos continebunt, hoc eſt, concurrent, ſed quis inde inferret omnes perpendiculares curvæ in uno eodemque puncto convenire? Ex principiis ergo illis, quæ Cl. Vir poſuit, & quæ tanquam vera ultro admittenda puto, nondum ſatis oſtendit rem eò deduci, *ut inveniatur curva cujus omnes ſubtangentes in puncto concurrant*, prout ſcribit pag. 28. *Diſſert. Medic.* Voluit dicere rem deduci ad inventionem ſeu inveſtigationem curvæ, cujus omnes *ſubperpendiculares* curvæ ad unum idemque punctum terminentur; nulla enim datur curva, cujus ſubtangentes concurrant, quandoquidem omnes ſubtangentes ſumuntur in eadem linea, id eſt, in axe datæ curvæ, ſeu in alia linea, quæ inſtar axis ſit. Fateor quidem, quòd, ſi omnes curvæ perpendiculares in puncto concurrant, omnes ſubnormales ad unum idemque punctum quoddam terminatum iri, aſt etiam eſt fatendum, tunc ea reductione problematis ad conſiderationem ſubnormalium non opus eſſe; nam ſi omnes curvæ perpendiculares in quodam puncto convergant, ilicò concludendum hanc curvam eſſe circulum; adeò ut problema jam ſolutum ſit absque ulteriore reductione, ſive ad proprietatem nominatam ſubperpendicularium, ſive ad methodum, quam Pitcarnius dicit inverſam fluxionum. Idcirco nos ſequenti Problemate perſpicue oſtendere conabimur cur-

 vam

vam quæſitam reapſe eam eſſe, cujus cunctæ perpendiculares in idem punctum ſeu centrum vergant, non obſtante, quòd hoc idem problema jam ſupra (§. 102.) ſolutum ſit, ſed diverſa ratione ad illuſtrationem generalis theorematis, quod infinita ejusmodi alia problemata ſolvit.

PROPOSITIO XVI. Problema.

Fig. 69. 303. *Dato tubo* AB *ex materia molli ſeu flexili clauſo in* B, *apertoque in* A *ad horizontem verticaliter erecto, & aquæ aliusve liquoris pleno, determinare figuram, quam ſectio quælibet horizontalis in tubo à liquoris preſſuris acquiret.*

Fig. 70. Sit AZBX figura quæſita, cui rectæ ZX, AB ad angulos rectos in R ſe invicem decuſſantes perpendiculariter occurrant in punctis A, Z, B, X. Sint contigua curvæ elementa DC, DE & Z*z*, A*a*, punctis Z, A adjacentia ſingula inter ſe æqualia, ducanturque *zy*, DK rectæ ZX normales, ipſisque æquidiſtans EN, nec non per puncta C & D rectæ CM & DN ipſi ZX parallelæ, & per *a* lineola *ab* eidem ZX æquidiſtans; ac denique fiant D*m* = EN & Dg = CM. Quibus poſitis, quia ſectionis tubi ZAXB ſingula puncta à liquoris ſuperficie æqualiter diſtant, ſingula puncta æqualem preſſionem ſubibunt, & quodvis ejus punctum D (§. 255.) preſſionem ſuſtinebit æqualem ponderi filamenti liquoris, cujus longitudo, quam per lineam DH curvæ perpendicularem in puncto D indicabimus, æquetur fluidi altitudini ſuper ſectione ZAXB, juxta directionem curvæ ubique normalem Dδ; ergo ſingulæ DH, quæ ſumuntur in lineis curvæ perpendicularibus, potentias eidem curvæ applicatas repræſentabunt, atque adeo rec-lum DH. DC refert potentiam in totum elementum DC agentem. Verum potentia DH (§. 39.) æquipollet lateralibus DF & FH, quarum hæc ipſi ZX parallela, illa verò eidem perpendicularis eſt; ergo etiam potentia agens in totum curvæ elementum CD, quæ exponitur rec-lo DH. DC, æquipollet potentiis lateralibus CD. DF & CD. FH, vel quia triangula ſimilia CDM & DHF præbent CD. DF = CM. DH & CD. FH = DM. DH potentiis lateralibus per rectangula CM. DH ac DM. DH exponendis juxta directiones DF & FM vel huic parallelam, agentibus.

Jam (§. 98.) eſt generaliter ∫FH, hoc eſt aggregatum potentiarum juxta directiones FH, ſeu juxta directiones rectæ ZX paralle-

las

las agentes in omnia elementa curvæ CD vel DE in curvæ arcu ZDE vel ZD contenta, id eſt per modò oſtenſa, omnia rectangula DM. DH reſpectu arcus ZD, quæ componunt rectangulum DK. DH, ad DN − Zy, ſeu CM − Zy, ſicut firmitas curvæ in puncto A, quam firmitatem hac litera A deſignamus, ad conſtans curvæ elementum CD; hoc eſt DK. DH : CM − Zy = A : CD, vel quia (ſecundùm hypotheſin) ZX curvæ ad angulos rectos occurrit in Z, atque adeò Zy reſpectu Zz & CM evaneſcit, fiet DK. DH : CM = A : CD & permutando DK. DH : A = CM : CD.

Item omnes DF ſeu ∫DF, hoc eſt, in præſenti caſu omnia rectangula CM. DH pertinentia ad arcum curvæ DA, hoc eſt, rectangulum KR. DH, quandoquidem omnes CM componunt KR, ſeu ſinum arcus DA, ſunt ad DM − Ab ſicut A ad CD, vel quia etiam RA (ſecundùm hypotheſin) curvæ normalis eſt in A, atque adeo Ab præ Aa vel CD aut MD evaneſcit, erit etiam KR. DH : DM = A : DC, & permutando KR. DH : A = DM : DC; atqui paulo ante etiam habuimus DK. DH : A = CM : CD ſeu invertendo A : DK. DH = DC : CM ergo ex æquo KR. DH : DK. DH = KR : DK = DM : CM = FH : DF, adeoque juncta DR triangula DKR & DFH ſimilia ſunt, atque adeo rectæ DR & DH ubique in directum jacent, ac proinde omnes DH curvæ ZDA normales productæ in eodem puncto R concurrunt, hinc curva quæſita ZDA eſt circulus. Quod erat inveniendum & demonſtrandum.

Corollarium I.

304. Analogia præcedentis paragraphi DK. DH : A = CM : CD, elemento curvæ Aa vertici A adjacenti applicata, præbebit bR. DH : A = ab : aA, verum quia RA curvæ perpendicularis eſt, fiet ab = aA ergo etiam A = bR. DH ſeu AR. DH. Eſt igitur firmitas tubi in quolibet ſectionis puncto, ut rectangulum ex radio ſectionis AR vel ZR in potentiam ſectionis puncto applicatam DH, hoc eſt in liquoris altitudinem ſuper hoc punctum. Propterea 1°. in tubis æqualium orificiorum tenacitates ſeu firmitates requiſitæ ad perferendas fluidi preſſuras erunt ut altitudines fluidi homogenei ductæ in ſuas denſitates ſeu gravitates ſpecificas. 2°. Si facta ex altitudinibus liquorum in denſitates æqualia fuerint, firmitates tuborum erunt ut radii orificiorum. 3°. Si ejuſmodi facta radiis ſectionum tuborum axibus normalium reciproce proportionalia fuerint, firmitates erunt æquales.

Corollarium II.

305. Quia vires æquales eidem vel ſimilibus ſubjectis ſimiliter applicatæ non niſi ſimiles effectus producere poſſunt, ideo nihil refert, an tubus ſeu vas flexile à pondere liquoris in ejus cavitate gravitantis, an vero à fluido quodam elaſtico extrorſum prematur juxta directiones, perinde ac fluidum facit, curvæ perpendiculares. Nam fluidi elaſtici preſſiones ſemper revocari poſſunt ad æquivalentes preſſiones alicujus liquoris, cujus altitudines per DH repræſentabantur. Hinc enim eſt, quod bullæ aqueæ, quas pueri loturam ſaponis per fiſtulas ſtramineas flatu ſuo protrudentes ſubinde ludendo formant, in globulos intus cavos rotundentur. Idcirco viſcoſitatis aquæ in ejusmodi bullis vis requiſita ad reſiſtendum aëris incluſi elaſticitati eſt ut hæc vis elaſtica, ducta in radium bullæ vel potius in radium cavitatis ejusdem.

Scholion.

306. Non abs re fuerit hoc loco obſervaſſe firmitates tuborum flexibilium eodem prorſus modo ſe habere, quo firmitates tuborum rigidorum, has enim oſtendimus eſſe (§. 275.) ut rectangula tuborum per axes, ſeu ut facta ex altitudinibus liquorum inter ſe & abſolute homogeneorum in diametros tuborum, quoniam craſſities tuborum in hac factorum ratione eſſe oportere oſtendimus, &, cæteris paribus, reſiſtentiæ ſunt ut craſſities, in flexibilibus vero reſiſtentia ſeu firmitas in quolibet puncto eſt ut vis inflans, ſeu ut liquoris altitudo ducta in tubi ſemidiametrum, adeoque firmitas tubi in duobus punctis diametraliter oppoſitis perinde ac in rigidis eſt factum ex liquoris altitudine in totam diametrum. Hinc non video, quibus rationibus Vir ingenioſus D. Parent rationem peripheriæ ad diametrum formulis ſuis pro firmitatibus tuborum rigidorum æſtimandis introduxerit in Commentariis Academiæ Reg. Scientiarum 1707.

PROPOSITIO XVII. Problema.

Fig. 71. 307. *Si in linteo* ZDAX *in terminis ſuis* Z *&* X *fixo ſtagnet quilibet liquor heterogeneus, cujus ſcala gravitationis ſit curva* ROS; *invenire figuram lintei manentem.*

Sint

Sint iterum, ut in præcedenti problemate, Zz, CD, DE, *Aa* elementa curvæ ZDA æqualia, & DL, El ordinatæ axi AR rectæ, Dπ vero & Eρ eidem axi parallelæ, & reliquis ductis quales in figura apparent. Jam, quia omnia in æquilibrio ſunt per hypotheſin & (§. 260.) elementum curvæ CD preſſuram ſuſtinet æqualem ponderi prismatis liquidi CD. LO, cum LO ſit ordinata ſcalæ gravitationum, potentia qua elementum CD urgetur juxta directionem perpendicularem erit DC. DH facta DH ubique æquali homologæ LO, & quia inſuper ob omnes potentias curvæ perpendiculares (§. 96.) firmitas lintei in omnibus punctis eadem eſt, atque adeo per datam quantitatem A deſignari poteſt, erit (§. 98.) ∫FH ſeu omnes FH : DN − Z*y* = A : DC; vel quia Zy evaneſcit præ ipſa DN, fiet ∫FH : DN = A : DC, & permutando ∫FH : A = DN : DC. Jam, quia potentia FH, quæ ex DH derivata eſt, non ſolum punctum D, ſed integrum elementum DC reſpicit, loco FH poni debet FH. DC perinde ac loco DH in hoc caſu intelligi debet DH. DC, & quia præterea FH. DC (propter triangulorum DHF & CDM ſimilitudinem) æquale eſt rec-lo DH. MD, vel DH. NE, id eſt, LO. Ll, erunt omnia LO. Ll areæ RLO inſcripta æqualia huic areæ; ergo ∫FH, id eſt, area RLO : A = DN : DE vel DC, & hæc analogia reſpectu elementi curvæ *Aa* fiet area RO*sb* vel ROSA : A = *ab* : *a*A, unde, quia in A, elementum *a*A = *ab*, erit etiam A = areæ ROSA, adeoque præcedens analogia RLO : A = DN : NE mutabitur in RLO : RAS = DN : NE.

Sit denique curva RQT ejus naturæ, ut rec-lum SA. AT ſit = trilineo ROSA, & SA. LQ = trilineo ROL, eritque ROL : RAS = AS. LQ : AS. AT = LQ : AT : unde cum invenerimus ROLR : BASR = DN : NE, erit etiam LQ : AT = DN : NE. Hinc centro A intervalloque AT deſcripto quadrante circuli TKV, ductaque per Q rectæ RA parallela QK quadranti occurrente in K, ac denique acta AK, erit etiam AI : AK = DN : DE, atque adeo triangula DNE & AIK ſunt ſimilia & ſimiliter poſita, ac proinde radius AK parallelus erit tangenti curvæ quæſitæ in puncto D. Eritque pariter DN : NE = AI : IK. Quæ erant invenienda.

Corollarium I.

308. Ductâ per quadrantis punctum K tangente Kα, ſi in recta LO ſumatur Lβ = Kα & ſic reſpectu cujusvis alius curvæ puncti, omnia

omnia puncta β erunt in curva quadam, $R\beta\omega$ aſymptotam AS habente, cujus area $SAL\beta\omega$ ad partes aſymptotæ æquabitur rectangulo ſub radio AT & ordinata DL curvæ ZDA. Nam triangula ſimilia AIK & $AK\alpha$ præbent $AI : IK = K\alpha : AK$, ſed $AI : IK = DN : NE$, ergo $K\alpha : AK$ vel $AT = DN : NE$, ergo $AT.DN = K\alpha.NE = L\beta.Ll$, ergo omnia $AT.DN$ hoc eſt rec-lum $AT.DL$ = omnibus rec-lis $L\beta.Ll$, quæ areæ $AL\beta\omega S$ inſcripta ſunt, id eſt, huic areæ $AL\beta\omega S$; atque adeò $DL = AL\beta\omega S : AT$.

Corollarium II.

309. Analogia, in quam paragrapho 307. circa finem incidimus, $DN : NE = AI : IK$ immediate præbet æquationem differentialem curvæ quæſitæ $DN = NE.AI : IK$. Nam ſi dicantur $Z\pi = y$, $\pi D = RL = x$, $AI = LQ = p$, adeoque $IK = \sqrt{(bb - pp)}$ exiſtente $AT = AK = b$, $RA = AS = a$, & denique $\pi\rho = DN = dy$, $NE = Ll = dx$, ſuperiorque æquatio $DN = NE.AI : IK$ factis debitis ſubſtitutionibus juxta denominationes linearum modo inſtitutas, mutabitur in $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$. quæ eſt æquatio differentialis curvæ quæſitæ ad amuſſim conveniens cum æquationibus, quas Celeberrimi Bernoullii Fratres, quisque ſua methodo, invenerunt. Si linea ROS fuerit recta, curva RQT erit parabola conica æquationem habens $aap : b = xx$; & ſubſtituto valore $bxx : aa$, loco p in æquatione differentiali ante inventa $dy = pdx : \sqrt{(bb - pp)}$, habebitur $dy = xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ quæ iterum coincidit cum eâ quam ſupra (§. 104.) dedimus.

Corollarium III.

310. Quoniam (§. 96.) tenacitas lintei in omnibus punctis eadem eſt, recta 12 angulum DiA à tangentibus curvæ DI & Ai formatum biſecans (§. 110.) erit media directio omnium fluidi gravitationum in curvam DA, & ſubtenſa anguli TAK æqualis angulo LDI (§. 112.) parallela exiſtet mediæ directioni 12; adeoque (§. 110.) erit potentia juxta mediam directionem 21. ad tenacitatem lintei in D ut ſinus anguli D1A ad ſinum A12, hoc eſt, ut ſinus KAT ad ſinum KTA, id eſt, ſicut KT ad AK. Unde cum tenacitas lintei (§. 307.) ſit trilineum ROSA (conſtr.) = AS. AT. vel AK, erit potentia juxta 21 = AS. AK. KT : AK = AS. KT = AR. KT. Et quia in ſymbolis corollarii antecedentis $KT = \sqrt{(2bb - 2bp)}$ & $AR = a$, erit potentia juxta mediam directionem $21 = a\sqrt{(2bb - 2bp)}$.

Scholion.

311. Curva hujus propoſitionis ZAX uni parti famoſi problematis circa iſoperimetras ab ingenioſiſſimis Bernoulliis ſoluti, ſatisfacit. Nam ſi ex ſingulis ejus punctis D, E, &c. indefinitæ $D\sigma$, $E\theta$, &c. axi AR parallelæ agantur, & in iis fiat $\pi\sigma = LQ$; $\rho\theta = lq$, &c. naſcetur curva ZξX, quæ cum baſi ZX majus ſpatium continebit quam quælibet alia curva ex alia iſoperimetra ZDAX ſimili lege deſcripta, ut in Actis Lipſ. 1701. pag. 213. & Comm. Acad. Reg. Scient. Pariſ. 1706. d. 17. Apr. ab eximiis Geometris eſt oſtenſum.

Præter æquationem $dy = pdx : \surd(bb - pp)$ Dn. Jac. Bernoullius invenit aliam hujus formæ $dy = (b - p).\, dx : \surd(2bp - pp)$ quæ *minimum* continet, & altera *maximum*. Sed una ex altera nullo negotio elicitur, etenim, ſi in priore $dy = pdx : \surd(bb - pp)$ loco p ponatur $b - p$, ſeu complementum ejus ad maximam b, orietur altera æquatio, & ſi in altero pro $b - p$ ſubſtituatur p, redibit prior.

312. Radius circuli curvam oſculantis in ejus puncto quolibet D, ſeu radius evolutæ $D\gamma$, eſt quarta proportionalis ad LO homologam ordinatam ſcalæ gravitationum ROS, & datas RA & AT. Cujus rei demonſtratio ex noſtra conſtructione facilis eſt.

Caput V.

De Preſſionibus Aeris ex Gravitate.

Quæ Capitibus I. & II. hujus libri ſecundi circa preſſiones omnis generis fluidorum *generaliter* oſtenſa ſunt, etiam de *Aëre* in *ſpecie* intelligenda eſſe nemo non videt, quandoquidem etiam Aër gravis eſt, atque adeò legibus fluidorum gravitate ſua agentium ſubjici debet. Propterea ſuperſedere particulari deductione phænomenorum ex aeris gravitate provenientium, eamque ex ſuperioribus à nobis adductis Lectoris induſtriæ eliciendam relinquere potuiſſemus, niſi argumenti præſtantia ejusmodi deductionem vendicare ſibi videretur.

312. Aëra gravem eſſe extra omne dubitum eſt poſitum, cum experimenta omni exceptione majora gravitatem ejus invincibiliter adſtruant. Talia experimenta apud Galilæum, Boylium, Mariottum, Borellum & alios dilucide deſcribuntur, qui proinde conſuli poſſunt.

Huc etiam facit ſchediaſma Celeb. Jac. Bernoulli Actis Lipſ. 1685. pag. 430. inſertum, quo peringenioſum ponderandi aeris modum aperuit, cum ſucceſſu aliquando in opus deductum.

313. Antiquiſſimum probandæ gravitatis aëris experimentum Ariſtotelis illud videtur eſſe, quo Philoſophus *Utrem inflatum plus trahere quam compreſſum & flaccidum exiſtimavit*, & poſt eum plerique etiam ex recentioribus Philoſophis, quorum nemo ante Jac. Bernoullium experimenti fallaciam cognoviſſe videtur, tametſi omnes idem experimentum parum accuratum judicarunt. Aſt Bernoullius in Actis Lipſ. 1685. pag. 436. luculenter oſtendit, atque deduxit ex principiis hydroſtaticis, *Utrem ſeu veſicam inflatam non eſſe gravioris ponderis, quam complicatam, licet aërem gravitate haud deſtitui præſupponas.* Quod mirum eſt ante ipſum neminem vidiſſe, aut ſaltem à ſe obſervatum monuiſſe illis occaſionibus, quibus de aëris gravitate ejusve probandæ rationibus agebatur; cum illius ratio vel leviter attendenti ſatis manifeſta ſit, atque duobus verbis explicari poſſit. Nam cum veſica tumida cum aëre incluſo ponderatur, id contingit in aëre cujus columna lancibus imminet, adeò ut pondus in unam trutinæ lancem agens ſit hæc columna aërea & veſicæ pondus; ſi poſtea expreſſo ſeu expulſo è veſica aëre veſica denuo ponderatur, lanci eadem ac prius columna aërea imminebit, adeò ut & hoc quoque caſu pondus in lancem agens futurum ſit eadem ac prius columna aërea atque veſicæ pondus. Adeoque utroque caſu, ſive tumida ſive compreſſa & flaccida veſica trutinæ appendatur, ſemper idem pondus ut reperiatur neceſſe eſt, vel ſi quando contingat ut poſtquam aërem è veſica expreſſimus, ejus pondus tantillo minus quam ante reperiatur, ejusmodi ponderis decrementum non aëris expulſi gravitati debet tribui, ſed particulis pinguibus inter contrectandum & comprimendum veſicam ab ea abraſis, vel alia de cauſa exhalantibus. Sed ut hæc omnia verbo complectar, aëris ponderatio ope veſicæ, perinde ſe habet, ac ſi quis aquæ phialæ incluſæ pondus exploraturus primum phialam cum incluſa aqua ponderaret, & deinceps effuſâ in lancem trutinæ aquâ, hujus aquæ effuſæ & phialæ pondus eadem trutina conjunctim quæreret, quis non videt idem pondus utroque caſu repertum iri, ſive phiala cum infuſa aqua, ſive etiam vacua phiala, ſed aquâ, quam capiebat, lanci infuſa, ſimul ponderentur?

314. Idcirco ſi ponderandi aeris modus fallacia vacare debet, *oportet vaſis volumen poſt expulſum aërem non mutari*, & deinde aeris ejecti

ejecti pondus ſatis accurate innoteſcet. Ad hoc proinde Celeb. Joh. Bernoullius ex amplo recipiente vitreo aërem, quantum fieri poteſt, diligenter eduxit, & aquæ in aëris expulſi locum ingreſſum permiſit; quo experimento comperit gravitatem aëris ad aquam eſſe ut 1 ad 740 circiter. Sed alio poſtea, eoque magis accurato, experimento per condenſationem aëris in amplo vaſe æneo tentato invenit gravitatem aëris ad aquam, ut 1 ad $774\frac{6}{41}$. Hinc, quia hæc ratio rationi 1 : 800 proxime æquatur, ob numerorum commoditatem hanc poſteriorem loco alterius 1 : $774\frac{6}{41}$ deinceps adhibebimus, ad exprimendam rationem ſpecificæ gravitatis aëris ad gravitatem aquæ.

Aëris gravitas etiam probari ſolet, & recte, phænomeno Barometrorum. Sed ut argumenti vis melius capiatur, ſequentem propoſitionem facilem præmittam, ex qua deinde præcipuum Barometri ſymptoma, item & Antliæ Cteſibianæ, Siphonum reflexorum, aliorumque ejusmodi inſtrumentorum phænomena, per modum corollariorum, deducam. Et denique in Scholio annexo Barometrum novæ conſtructionis à Celeb. Joh. Bernoullio excogitatum proponam, quo atmoſphæræ variantes preſſiones, magis quam ullo alio barometro, ſenſibiliter indicari queunt.

PROPOSITIO XVIII. Theorema.

315. *Si in vaſe amplo* MON *liquoris cujuscunque pleno, usque ad* MN *demittatur vasculum* BE *argentum vivum continens, cum tubo vitreo* AB *utraque ſui extremitate aperto & vasculo* BE *perpendiculariter inſiſtente; ſed ita tamen, ut orificium ejus apertum* A *ſemper extra liquorem* MON *extet, hydrargyrus per orificium tubi inferius* B *aſcendet, usque dum altitudo ejus in tubo* CD, *ſit ad altitudinem* PC *liquoris ſuper ſuperficie reſidui in vasculo Mercurii, ut ſpecifica gravitas liquoris* MON *ad ſpecificam gravitatem Mercurii.* Fig. 73.

Id eſt, poſito liquorem MON aquam eſſe, decies quater argento vivo leviorem, altitudo DC Mercurii in Tubo AB conſtanter decima quarta pars erit altitudinis aquæ PC.

Hæc propoſitio tantum caſus eſt particularis Propoſitionis V. hujus ſecundi libri, & coincidit cum corollario IV. ejusdem Propoſitionis, in quo indicatur preſſiones liquorum homogeneorum in ſe, ſed heterogeneorum inter ſe æquales fore, atque adeò liquores ipſos in ſe invicem gravitantes in æquilibrio conſiſtere, quoties facta ex

co-

eorum altitudinibus in ſpecificas eorum gravitates æqualia, atque adeò altitudines ſpecificis gravitatibus reciproce proportionales fuerint. Unde, quia (ſecundùm hypotheſin) argentum vivum in tubo AE in altitudine CD preſſioni liquoris in altitudine MO æquilibratum eſt, erit (§. 262.) altitudo Mercurii CD ad altitudinem liquoris tubum ambientis MO, ſicut hujus liquoris ſpecifica gravitas ad gravitatem ſpecificam hydrargyri. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

316. Cum tubi AB liquor ambiens MON quodcunque fluidum grave repræſentare poſſit, ponamus eum ſignificare aërem atmoſphæræ, tubique foramen ſuperius A extra atmoſphæram extare; vel, quia hæc conditio in praxi impoſſibilis eſt, ſumemus aliam, quæ ipſi æquivaleat, ſupponendo tubum AB una ſui extremitate A hermetice ſigillatam eſſe, adeò ut orificio ejus aperto B ſurſum converſo & tubo Mercurio impleto per hoc orificium, poſteaque eodem digiti pulpa obſtructo, atque Mercurio in vaſculo CE ſtagnanti immiſſo, poſt retractum digitum orificium inferius B intra argentum vivum vaſis CE obſtruentem, nullus aër forinſecus adveniens tubi partem ſuperiorem AD à Mercurio deſcendente ad D usque relictam ingredi poſſit, & hoc pacto jam obtinetur ſcopus conditionis, quâ requiritur in propoſitione ut orificium apertum A extra liquorem MON promineat eo ſolo fine, ut liquor ambiens fiſtulam ingredi nequeat; quibus poſitis, & quia argentum vivum in fiſtula AB ad altitudinem plus minus 28. digitorum pedis Pariſienſis ſuſpenſus hæret, oportet atmoſphæræ gravitationem æquivalere preſſioni iſti Mercurii ad altitudinem 28. ſuſpenſi, etenim ſi aër gravis non eſſet in nulla prorſus intra fiſtulam AB altitudine elatus conſpiceretur; ſed in eadem cum Mercurio vaſculi CE ſuperficie terminatus; eodem plane modo, quo argentum vivum in fiſtula AB figuræ 73. plane ad nullam altitudinem CD attolleretur, ſi nullus eſſet liquor ambiens, qui in Mercurium vaſculi CE gravitare poſſit.

Fig. 72. Fig. 73.

Corollarium II.

317. Ut ſciatur, in qua altitudine preſſio aquæ æquivaleat preſſioni atmoſphæræ, reſumi debet caſus propoſitionis præſentis & per liquorem MON intelligenda eſt aqua decies quater levior quam Mer-

Mercurius, atque diſpiciendum eſt, quousque tubus AB cum vaſculo CE vaſi MON debeat demergi, ut Mercurius in fiſtula utrinque aperta aſſurgat ad altitudinem 28. digitorum. Jam quoniam (§. 315.) demerſo vasculo ad profunditatem 28. pollicum infra ſuperficiem aquæ MN Mercurius aſſurgit in tubo AB ad altitudinem CD unius digiti; demergendum erit vasculum CE in liquore ſeu aqua MON ad profunditatem quater & decies 28. pollicum id eſt ad profunditatem 392. pollicum, hoc eſt, paulo minus quam 33. pedum, ut Mercurius ad altitudinem 28 pollicum elevetur. Igitur *preſſio atmoſphæræ æquivalet preſſioni aquæ in altitudine* 33. *pedum circiter*. Ac per conſequens, ſi aër atmoſphæræ uniformis ubique denſitatis eſſet, altitudo atmoſphæræ foret 26400. pedum; ſed multo major erit, quandoquidem aër, quo altior eſt, eò etiam rarior deprehenditur.

Corollarium III.

318. Ex hisce principiis peti etiam debent rationes phænomenorum antliæ Cteſibianæ. Hæc antlia conſiſtit in Cylindro ligneo vel ſubinde etiam metallico BA cylindrice excavato, ab utraque parte aperto quidem, ſed inferius orificium B aquæ immergendum nonnihil anguſtius habens cavitate antliæ. Cavitati huic intruditur, ope virgæ ferreæ, embolus coriaceus CD, attollendus per vices atque deprimendus, qui per totam antliæ longitudinem antliæ cavitati tam affabre quadrare debet, ut omnem aëri ex ſuperiori cavitatis parte in inferiorem tranſitum præcludat. Ejusmodi organon *Antlia ſuctoria* vel *Aſpirans* ſubinde vocatur, quod in ea quadam attractionis ſpecie attolli aqua videatur. Sed aſcenſionis aquæ cauſa eadem eſt, quæ Mercurium etiam in Barometris ſuſpenſum tenet, *preſſio* ſcilicet *atmoſphæræ*. Nam retracto embolo CD in *mn*, neceſſe eſt aquam vigore hujus atmoſphæræ preſſionis per orificium B antliam ingredi & cavitatem *m*B*n* ab aëre vacuam implere, ſiquidem (ſecundùm hypotheſin) ex ſuperiore antliæ parte A*mn* aër embolo *mn* impeditus in cavitatem *m*B*n* tranſire nequit, nec proinde quicquam eſt in ſpatio *m*B*n*, quod externæ aëris preſſioni aquam per orificium intrudenti reſiſtat. Hinc, quo altius attolletur embolus, eò altius etiam aqua, ipſum pone inſequens, in antlia aſſurget; usque dum embolo delato in MO ad diſtantiam ab aqua IK 33. pedum circiter, aquæ altitudo ſuper IK totidem pedum fuerit, adeò ut per corolla-

Fig. 74.

larium præcedens ejus preſſio æquivaleat preſſioni atmoſphæræ. Nam ſi embolum quantum voles ulterius eleves in *cd*, aqua non ideo altius enitetur, ſed in altitudine ſua 33. pedum ſubſiſtet, quæ altitudo aquæ maxime limitata eſt, ut aquilex quondam Galilæo retulit, utpote quæ atmoſphæræ preſſioni æquivalet.

Corollarium IV.

319. Quod ad ſiphones reflexos attinet, eorum vires ex præce-
Fig. 75. dentibus commode deducentur. Sit ABC ejusmodi tubus in B inflexus inæqualium crurum AB & CB; & in vulgus notum eſt, quod immiſſo breviori crure AB vasculo EF, aquæ aliusve liquoris pleno, ſi ſuctionis ope aqua ex longiore brachio BC eliciatur, fore, ut aquæ aut liquoris fluxus juxta ABC ex breviore in longius brachium tamdiu continuetur, donec vasculum EF penitus exhauſtum fuerit, modò crus brevius AB altitudinem in aqua 33. pedum circiter non ſuperet, ſed eâdem minus ſit, & orificium C cruris BC humilius ſit orificio A alterius cruris AB. Hujus phænomeni ratio ſtatim apparebit conſiderando hunc ſiphonem aliud non eſſe, quam geminum barometrum, cujus utrumque crus ſimplicis barometri vices obeat. Etenim cogitando crus AB aquæ plenum in vasculo EF itidem aquam continenti inſiſtere, concipitur barometrum ſimplex BAEF, & crus CB aquæ plenum in vasculo GCH aqua pariter impleto erectum, efficit alterum barometrum BCGH. Repræſentet nunc KL columnam aquæ 33. pedum æquivalentem atmoſphæræ preſſioni, & in ea ſumantur KM = AB cruri minori, & KN = CB cruri majori. Jam, quia gravitatio atmoſphæræ in aquam EF eſt KL, & gravitatio aquæ BA in crure ſiphonis minoris eſt tantum KM, prævalebit externa aëris preſſio KL internæ preſſioni aquæ in tubo BA, quæ eſt KM, vi LM, quam vim ideò *attollentem* atmoſphæræ in tubo BA deinceps dicemus, quia tanta præciſe vi atmoſphæræ preſſio aquam AB in crure minori ſiphonis elevare conatur. Eodem argumento erit LN vis attollens atmoſphæræ in crure longiori BC, nam hæc vis attollens eſt exceſſus preſſionis externæ KL ſupra internam BC, quæ eſt KN ex conſtructione, atque adeò aqua in tubo BC revera attolletur, aut ſaltem preſſio atmoſphæræ eam attollere conabitur, vi illa LN. Verum, quia vis attollere conans aquam in tubo AB eſt LM, & vis attollens aquam in tubo BC eſt LN, & minor majori cedere debet, liquet aquam revera in tubo AB

in

in altum coactum iri vi MN, æquali differentiæ virium attollentium LM & LN. Hanc ergo differentiam MN appellare poſſumus *vim motricem* aquæ in tubo reflexo juxta ordinem AQBC; propterea aqua ex vaſculo EAF per tubum recurvum ABC fluet, & per orificium C ſeſe exonerabit, & effluet, donec totum vaſculum EAF depletum fuerit.

Corollarium V.

320. Quia MN eſt vis motrix aquæ in ſiphone ABC circulantis; & hæc vis MN eſt differentia inter KN & KM, id eſt inter BC & BA, hoc eſt DC, facta ſcilicet BD = BA. Fig. 75.

Hinc 1°. vis motrix nulla eſt, nec proinde aqua in ſiphone juxta ABC fluere poteſt, ubi crura BA & BC æquantur. 2°. Nec fluere poteſt, cum crus brevius AB exceſſerit vel æquaverit altitudinem 33. pedum atmoſphæræ preſſioni æquipollentem. Sint enim K*m* major quam KL & æqualis AB, & K*n* = BC, & quia nunc interna preſſio aquæ BA eſt *m*K; externa verò atmoſphæræ eſt LK, prævalebit externæ interna vis *m*L, quæ nunc eſt *vis extrudens*, quoniam hac vi *m*L aqua aliquousque ex tubo BA hoc caſu extrudetur, tantum abeſt, ut externa aëris preſſio vim habeat attollendi aquam ut in corollario antecedenti; ſic etiam *n*L eſt vis extrudens aquam ex tubo BC. Adeoque hæ vires extrudentes efficient, ut in crure minori aqua ſe demittat usque in Q ita ut QA nunc æquetur ipſi LK, perinde ac PC in altero crure, aqua in eo ſeſe demittente in P; ſcilicet in utroque crure eouſque, quo vires extrudentes evanuerint.

Corollarium VI.

321. Sed ſi AB fuerit minus 33. pedum & BC multò majus, fluet quidem ex minori AB per majus BC, ſed absque eo, ut in toto tubo aqua continua ſit, ſed in ſummitate formabitur ſubinde vacuum. Sit enim ut prius KL, 33 pedum, AB vel KM minor quam KL & BC, cui æqualis ſit K*n* major quam KL; quibus poſitis, ſi L*n* major fuerit quam LM plus aquæ effluet ex tubo BC quam influere poteſt per crus AB, atque adeo in ſummitate B erit vacuum, nec proinde aqua inter fluendum per totum ſiphonem contigua erit. Nam quia K*n* hoc caſu exprimit preſſionem aquæ in tubo BC & KL preſſionem atmoſphæræ minorem, *n*L exponit vim extrudentem aquam

aquam ex tubo BC; in altero verò AB, vis attollens eſt LM, major ideo erit vis extrudens nL vi attollente LM, atque adeò plus aquæ egredietur atque expelletur ex tubo BC, quam ingreditur in tubum AB. Idcircò ubi fluxus ad ſtatum manentem perductus fuerit, relinquetur in ſummitate vacuum BP æquale exceſſui, quo vis extrudens nL ſuperat vim attollentem LM, ſeu æquale nL − LM. Idcirco exiſtente nL − LM = 0, vel vi extrudente æquali vi attollenti, aqua in ſiphone contigua erit.

Corollarium VII.

322. Ope corollarii præcedentis jam facile derivabitur ſolutio ſequentis Problematis. *Dato minore ſiphonis crure* AB *invenire longitudinem majoris* BC, *ut aqua in ſiphone fluens in ſummitate ſiphonis vacuum* BP *relinquat datæ magnitudinis* R. Nam poſitis KM cruri minori, KL atmoſphæræ preſſioni ſeu 33. pedum, & Kn cruri majori æqualibus, per corollarium 6. hujus aqua per ſiphonem ABC fluens relinquet vacuum BP = nL − LM, unde cum hoc vacuum debeat eſſe æquale R, erit nL − LM = R, vel nL = R + LM, hinc nK = LK + R + LM = 2LK + R − MK, hoc eſt, crus majus BC æquari debet reſiduo detracti minoris cruris AB ex dupla atmoſphæræ preſſione data R aucta. Adeoque, ſi AB fuerit 16. pedum & R, 10. pedum, erit BC = 60. pedum. Sed in ejusmodi caſu adhibenda foret aqua ab aëre, quantum fieri poteſt, purgata; aliàs aër ex aqua transſpirans ac ſeſe in ſpatio BP ſenſim ſenſimque colligens liberum aquæ fluxum ex crure AB in alterum BC impediet.

Scholion.

323. Quanquam ſupra dictum ſit in Barometris ordinariis Mercurium in altitudine 27. vel 28. pollicum certorum locorum reſpectu ſubſiſtere, id tamen non in mathematico rigore eſt accipiendum quaſi argentum vivum barometri, in eodem ſemper loco conſtituti, in eadem altitudine conſtanter hæreret; nam ejusmodi Mercurii altitudines ſubinde variant, & ex hisce variationibus variationes in atmoſphæræ preſſionibus utcunque dignoſcuntur. Dico *utcunque*, nam ut Celeb. *Wolfius* in ſua *Aërometria* optime notavit, variationes Barometrorum non ſatis accurate diverſitatem gravitationis atmoſphæræ indicant, & propterea, quæ aliàs barometra vocari ſolent inſtru-

menta,

menta, duntaxat *Baroſcopii* appellatione digna cenſuit, *Barometri* nomen inſtrumento illi reſervaturus, ſi quod unquam inveniri poſſit, quod aëris gravitationes accuratiſſime monſtret.

Inter alios defectus, quibus communia baroſcopia laborant, forte præcipuus eſt, quod variationes eorum non ſatis ſenſibiles ſunt: hanc ob rem eximii Philoſophi Hugenius, De la Hire, & Joh. Bernoullius alias baroſcopiorum conſtructiones excogitarunt, quibus inſtrumentis minimæ in aëris gravitate mutationes ſenſibiliter exprimerentur; hinc nata ſunt gemina, quæ vocantur barometra Hugenii & Hirei, quorum conſtructionibus explicandis nunc non immorabor, cum Hugenii barometrum compoſitum in Ephemeridibus Gallicis deſcriptum habeatur, & apud alios paſſim Autores de rebus hisce agentes, & Celeb. Hireus baroſcopii à ſe excogitati deſcriptionem etiam tradiderit in Actis Academiæ Regiæ Pariſ. Scient. 1708. d. 21 Martii. Sed quia barometrum, quod Acutiſſ. Geometra Joh. Bernoullius jam à multis retro annis excogitavit publico nondum innotuit, nec à ſimplicitate ſua contemnendum eſt, ejus deſcriptionem, ab Ingenioſiſſ. Autore mihi benigne communicatam, hoc loco afferre non pigebit; conſtructio itaque barometri Bernoulliâni ita habet.

324. Sit ABC tubus è duobus ramis inæqualium diametrorum compoſitus, figuram gnomonis præ ſe ferens; rami horizontalis BC in C aperti diameter lineam ſeu duodecimam digitis Pariſini partem non excedat; rami verò verticalis AB in ſummitate obſtructi diameter eſto 4. linearum vel amplius adhuc, prout variationum gradus in hoc barometro magis ſenſibiles ſunt exprimendi, & rami hujus altitudo ſit, qualis in baroſcopiis communioribus, 30. aut 31. pollicum; longitudo verò rami horizontalis BC, quæ à proportione diametrorum ramorum pendet, 3. pedum minimùm eſſe debet. Si tubo ſic parato Mercurius infundatur, & ramus ejus horizontalis pariter plenus ſit Mercurio ad medietatem usque E circiter, aëre exiſtente mediæ conſiſtentiæ, habebitur barometrum, quod 16. vicibus magis ſenſibiles exhibebit variationes, quam ordinaria barometra. Liquet enim, quod, deſcendente Mercurio in ramo verticali ex ſpatio unius pollicis, progredietur in ramo horizontali ex E in F per ſpatium 16. pollicum; nam ramus verticalis aliud non eſt, quam ſimplex ſeu commune baroſcopium. Fig. 76.

Quod ſi verò ramus horizontalis anguſtior aut verticalis amplior fieret, nemo non videt fore, ut variationes creſcant in duplicata

ratione diametrorum, adeò ut hæ variationes in infinitum magis magisque ſenſibiles reddi queant. Sed quia praxis talia ſemper incommoda ſecum trahere ſolet, quæ theoriæ ſucceſſum difficilem efficiant, nimia eſt fugienda horizontalis rami anguſtia, quia aëris preſſio non ſatis commode agit in tubo valde anguſto, nec in eo Mercurius facile movetur. Horizontali igitur ramo vix minor quam unius lineæ diameter tribui debet. Propterea, loco imminutionis ejus diametri, ſatius eſt verticalem ramum majoris amplitudinis aſſumere, non quidem per totam ejus longitudinem, ſed tantum in Fig. 77. ſummitate, addendo ſcilicet tubo BM, qui ejusdem ac in vulgaribus barometris craſſitiei eſſe poteſt, capſulam vitream AM, in qua Mercurius perinde ac in Hugenii geminato deſcendet atque aſcendet. Verum exiſtente hac capſula valde laxa, inſignis rami horizontalis longitudo, quæ hoc caſu requiritur, inſtrumentum inconcinnum uſuique parum accommodatum redderet, niſi incommodo iſti promptum eſſet remedium, contorquendo ramum horizontalem in ſpiralem vel quoquo alio modo in minus ſpatium redigendo flexuris illis, quas figura 78. exhibet, dummodo hæ flexuræ omnes in eodem plano horizontali exiſtant.

Ad commodiorem hujus Barometri impletionem non abs re fore notat Autor, ſi ramus perpendicularis AB in exiguum tubulum in L apertum deſinat, ita ut per ejus orificium argentum vivum infundi poſſit, dum orificium rami horizontalis C, obſtructum tenetur. Ambobus ramis hoc pacto impletis orificium L hermetice eſt ſigillandum & obturamentum, quo orificium C obſtruebatur, demendum, ut argentum vivum in verticali tubo AB ad conſuetam in communioribus barometris altitudinem ſe demittere poſſit ſcilicet ad terminum D, & ex horizontali ramo ſuperfluus effluere hydrargyrus; ſed quia hac ratione ramus horizontalis Mercurii plenus manebit, ſuctione pars ejus conveniens eſt adimenda vel beneficio tubi capillaris ampullula inſtructi, quæ calefacta atque tubo horizontali intruſa atque in eo refrigeſcens Mercurium in ſuam cavitatem trahet. Hac ratione barometrum conſtructum uſuique paratum erit.

Cæterum non inutile fuerit, ſi tubus verticalis in loco, quo horizontali jungitur, exigua curvatura inſtar receptaculi H inſtruatur, ad impediendum ex horizontali in verticalem ramum aëris ingreſſum, ſi quando horizontalem forte Mercurius deficeret, aut fortaſſe etiam ex nimia atmoſphæræ preſſione ſeu à vibrationibus Mercurii

ex

ex translatione barometri de loco in locum orta, quod poſtremum inconveniens ſi non tolli penitus, ſaltem obſtruendo orificium C, minui poteſt.

Præter ſimplicitatem, qua Bernoullianum iſtud barometrum ſe commendat, aliis inſuper prærogativis præſtare videtur barometris compoſitis hactenus inventis. Nam tubi pro Bernoulliano & facile parantur facileque etiam implentur, nec liquores in eo adhibentur in vapores ſenſibiliter abeuntes, quibus barometri effectus mirum quantum alterari ſolent. Nam in baroſcopio à nobis deſcripto ſolus adhibetur Mercurius, qui in vapores ſenſibiliter non ſolvitur. Geminatum vero Hugenii barometrum, præterquam quod tubos requirat ægre parabiles & difficillime liquoribus implendos, liquores depoſcit evaporationi obnoxios, cui incommodo illud etiam quod à Celeberrimo De la Hire ingenioſe excogitatum & in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. loco jam ſupra indicato ſubjectum eſt, aliudque præterea incommodum ſecum trahit, quod liquores ejusdem ſpecificæ gravitatis ſed impermiſcibiles requirat, alioqui variationes ejus non indefinite augeri poterunt, ſed intra certos terminos conſiſtent quos transgredi nequeunt. Nam vocando ſpecificas gravitates argenti vivi, & ex liquoribus in barometro iſto adhibendis gravioris ſcilicet & levioris m, t, p; capſularum vitrearum diametrum a, diametrum tubi anguſtioris b; invenio poſt Clariſ. Bernoullium, variationes in barometro Hireano ſe habere ad variationes in barometro ordinario ſeu communi, ut quantitas maa ad $2mbb, + (aa - bb . t - p)$. Jam quo minor eſt b quam a, eo propius accedit hæc ratio, rationi m ad $t - p$, quæ limitem exprimit, intra quem variationes barometri à Cl. De la Hire inventi collatæ cum variationibus Barometri communis continentur, quæ data ratio m ad $t - p$ eo ſolùm caſu infinita fit, quo $t = p$, hoc eſt eo caſu, quo liquores in Hireano barometro adhibiti ejusdem ſunt ſpecificæ gravitatis, ſed qui invicem permiſceri nequeant.

Poſteaquam deſcriptio Bernoulliani barometri coram Concilio Academiæ Scientiarum Regiæ Pariſienſis prælecta fuit, nuntiatum eſt Celeb. ejus Autori ſimilem barometri conſtructionem jam ante complures annos excogitatam fuiſſe à Celeberrimo Aſtronomo Joh. Dominico Caſſino, ſed poſtea neglectam ab ipſo jacuiſſe, quod in praxi non ſucceſſiſſet ob aërem, qui Mercurio in tubo ſeu ramo horizontali ſe miſcuiſſe ejusque liberum fluxum impediiſſe ſcribitur. Sed quia, quid hac in re laudatus Vir molitus ſit, nusquam memo-

 riæ

riæ proditum ſit, nec Bernoullius de ejus tentaminibus quicquam fando audiverit, inventionis laus ipſi denegari non poteſt, maxime quod ejus cum ſucceſſu in Belgio factum eſſe periculum teſtari poteſt; & incommodum illud, quod Caſſino remoram injecit, tolli poſſe arbitratur, tubum horizontalem ſuctione implendo; vel etiamſi compreſſione crumenæ cujusdam coriaceæ argenti vivi plenæ tubique horizontalis orificio applicatæ Mercurius tubo intruſus aſcendere cogatur usque ad ſummitatem tubi verticalis, orificium ſuperius apertum habentis; hac Mercurii intruſione peracta, & obturato ſummo verticalis tubi orificio, crumena à tubo horizontali eſt removenda, ut argentum vivum in tubo verticali ad conſuetam altitudinem delabi poſſit. Denique ut Mercurii fluxus in tubo horizontali commode fiat, tanta tubo iſti amplitudo eſt tribuenda, quantâ opus eſt ut Mercurius in eo contineatur, absque eò ut diffluat.

CAPUT VI.

De Vi Elaſtica Aëris in Genere.

325. Aër, quantum experimentis conſtat, nullo alio in cæteris fluidis & liquoribus exemplo, ſibi peculiarem habet affectionem, quâ non ſolum continuo ſe expandere conatur, ſed etiam ad majus, quam antea occuparat, ſpatium ſeu volumen reapſe ſe expandit quoties nullo corpore ambiente impeditur. Conatus ejusmodi expanſivus aëris *Elater* ſeu *Vis elaſtica* ejus nuncupatur. Experimenta, quæ hanc aëri *elaſticitatem* ineſſe evincunt, plura à Boylio, Mariotto, Jac. Bernoullio aliisque cautis obſervatoribus tentata & feliciter ad exitum deducta ſunt, quæ apud laudatos Autores legi poſſunt, vel etiam in Aërometria Clariſſ. Wolfii, in qua ſelectiſſima quæque experimenta accurate deſcribuntur. Inter hæc experimenta unum alterumve hoc loco recenſebo, quod aëris vim elaſticam ad oculum demonſtrare exiſtimo.

I. Veſica bubula vel porcina flaccida & complicata, ſed obſtructum habens orificium ope circumligati fili, in recipiente ſenſim ſenſimque intumeſcere conſpicitur, ſimul atque aër ex recipiente educitur ope antliæ pneumaticæ, & ſi veſica tenera ſit, rumpi ſubinde obſervatur à ſolo elatere pauxilli aëris in veſicæ rugis latentis.

II. Ab eodem aëris elatere phiala vitrea tenuiorum parietum & probe obſtructa in recipiente ab aëre evacuato in minuta ſubinde fragmenta diſſilit; & huic ſimile phænomenum bibulos quandoque terret, cum generoſum vini hauſtum facere volentes lagenam ſuam vitream hiſcentibus labris tam arcte admovent, ut præ metu vel unius ſolum nectaris ſui guttæ effuſionis, communicationem aëris externi cum eo, qui lagenæ ineſt, tollant, atque ſtrenue ſugendo lagenæ aër rarefiat, quo fit, ut prævalente externi aëris preſſione lagena in fruſtula conteratur, & merum pereat.

III. Vis elaſtica aëris probatur etiam experimento hæmiſpheriorum æneorum, quæ educto ex eorum cavitate aëre, tam pertinaciter ſibi invicem adhærere comperiuntur, ut maximis etiam ponderibus ipſis appenſis, vel in oppoſitas partes trahentibus, vix ſeparari poſſint, quæ tamen aëris plena nullo ferme negotio ab invicem diducuntur.

326. Verum, recenſitis experimentis non obſtantibus, D. Parent Elaſticitatem aëris in Hiſtoria Acad. Reg. Pariſ. Scientiarum Academiæ 1708. in dubium vocare velle videtur, ſi Hiſtoriæ verba obiter tantum expendantur; aſt textus diligentius inſpectus poſtea manifeſtat, elaterem aëris in ſenſu paragraphi præcedentis non denegari. Nam Autor modo nominatus tantum negat particulas aëris concipiendas eſſe inſtar lamellarum plicatilium, vel inſtar filamentorum in ſpiras contortarum, & ſeſe poſtea evolventium, aut ullius rei inſtar hisce æquivalentis. Sed eas potius tanquam moleculas conſiderandas arbitratur, materiæ æthereæ, ultra quam cogitari poſſit, exili & agitatiſſimæ innatantes. Idcirco juxta laudatum Autorem moleculæ aëreæ tanto magis ab invicem diſtant, &, quod elateris ſpeciem præ ſe ferre dicit, tanto magis à ſe invicem recedere conantur, quo abundantior fuerit ætherea materia meatus aëris transfluens, & quo pernicior ejus motus. Ab hac enim materia ætherea vim omnem derivandam eſſe putat, qua aëris moleculæ in alia corpora agere poſſint. Ex quibus omnibus abunde liquet Cl. Parent tendentiam illam molecularum aërearum, qua à ſe invicem diſcedere conantur, non negare, nec proinde vim illam elaſticam noſtro ſenſu ſumtam in dubium vocare. An autem hæc aeris Elaſticitas, ſeu conatus particularum ejus à ſe invicem recedendi, proveniat ab elaſticitate propria particularum compreſſarum, & deinceps in priſtinum ſtatum ſe reſtituere molientium, an vero ab æthere interfluente, quæſtiones ſunt phyſicæ, quæ in utramque par-

tem diſputari poſſunt, quæque omnes ſuis difficultatibus circundatæ ſunt.

327. Hypotheſi Parentianæ explicandæ elaſticitatis aëris ſimilem ante plures annos etiam excogitaram; ſed cui poſtea nuncium miſi, quod eadem poſita, non aëra tantum, ſed omnes prorſus liquores vi elaſtica præditos eſſe debere, qua tamen liquores carent, ex ea ſequi viderim. Nam ſi aëreæ moleculæ ideo à ſe invicem recedere conantur, quod rapidiſſimo ætheris motu per poros aëris indeſinenter circulantis ejusdem aëris moleculæ à ſe invicem abigantur & repellantur, cur quæſo in reliquis liquoribus moleculæ non eodem modo ab invicem repelluntur ab interfluente æthere, qui non minus trans liquorum poros, quam trans aëris meatus fluere & moveri debet? Reſpondebitur forte diſparitatem provenire à craſſitie molecularum, quibus liquores componuntur, nec non à longe majori liquorum denſitate, quam ſit aëris denſitas, & ob has duas rationes fieri, ut moleculæ liquorum non eo ſucceſſu, quo aëris particulæ à ſe invicem ab interfluente æthere abigantur, cum ipſæ particulæ abigendæ valde magnæ & ætheris trans liquorum poros fluentis copia valde parva ſint reſpectu aëris. Aſt valde dubito, an hæ rationes ſincere philoſophantibus ſatisfacturæ ſint; nam anguſtia pororum in liquoribus, quæ adducitur ad reddendam rationem, cur liquores vi elaſtica careant, potius contrarium probare videtur. Notum enim eſt, fluida eò velocius moveri ſolere quo anguſtiora ſint loca, per quæ fluant, ſic fluminis in diverſis ſectionibus fluentis velocitates ſunt ſectionibus reciproce proportionales; ac propter hanc rationem, velocitas ætheris fluentis per porum alicujus liquoris L erit ad velocitatem ejusdem fluentis per porum aëris A, ut amplitudo pori aëris ad porum liquoris; atqui in diverſis liquoribus pororum ſimiliter poſitorum amplitudines, hoc eſt, diſtantiæ duorum vicinorum elementorum in liquoribus, ſunt in reciproca ſubtriplicata proportione denſitatum; nam duæ maſſæ ſimiles & æqualis ponderis diverſorum liquorum volumina habent denſitatibus ſuis reciproce proportionalia, & volumina, quæ (ſecundum hypotheſin) ſunt ſolida ſimilia, ſunt in triplicata proportione laterum homologorum, adeoque & denſitates erunt in reciproca triplicata ratione laterum homologorum in ſolidis ſimilibus, atque adeo latera ejusmodi homologa in reciproca ſubtriplicata ratione denſitatum; verum particulæ in ambobus liquoribus, præter propter ſimiliter poſiſitæ, admittunt interſtitia lateribus ſolidorum homologis proportio-

nalia,

nalia, unde cum latera ſolidorum ſint in reciproca ſubtriplicata ratione denſitatum, erunt etiam pororum amplitudines ſeu particularum fluidorum ſibi invicem proximarum diſtantiæ in reciproca ſubtriplicata ratione denſitatum. Atqui velocitas ætheris fluentis trans porum liquoris L eſt ad celeritatem ejusdem fluentis trans porum aëris A, reciproce, ut porus aëris ſeu interſtitium duarum ejus molecularum vicinarum ad porum liquoris, atque adeo directe in ſubtriplicata ratione denſitatis liquoris L ad denſitatem aëris A, id eſt, in ſubtriplicata ratione gravitatis ſpecificæ liquoris ad gravitatem ſpecificam aëris. Jam cum, ut ſupra (§. 314.) dictum, gravitas aquæ ad gravitatem aëris ſit ut 800. ad 1, & radix cubica ex 800. ſit quam proxime $\frac{92}{10}$; erit velocitas ætheris trans aquam ad celeritatem ejusdem trans aërem proxime ut 92. ad 10; hinc, quia fluidorum impreſſiones in corporibus, in quæ agunt, ſunt in duplicata ratione velocitatum, ut id ſuo loco oſtendetur, erit hoc caſu vis ætheris ad abigendas moleculas aquæ ad vim ejusdem ad abigendas à ſe invicem moleculas aëris, ut quadratum ex 92. ad quadratum ex 10. proximè, id eſt ut 8464. ad 100; adeoque aquam oporteret habere in Parentii Hypotheſi plus quam octoginta vicibus majorem vim elaſticam quam aër, cur igitur nulla in aqua elaſticitas deprehenditur? multò major adhuc deberet eſſe elaſticitas hydrargyri & aliorum fluidorum aquâ ſpecifice graviorum.

Verùm quicquid ſit de cauſa phyſica elateris aëris, ad inſtitutum noſtrum ſufficit aëri vim elaſticam ineſſe, quod præter experimenta ab initio hujus capitis relata, etiam probari poteſt effectibus antliæ Guerikianæ à Roberto Boylio poſtea magis perfectæ, cujus opera aër in vaſis quibuscunque, quæ eidem rite applicari queunt, quantum velis rarefieri, atque adeò pars aëris quantacunque repetitis hauſtibus educi poteſt, quod minime ſuccederet ſi aër virtute illa expanſiva careret.

328. Eſt vero ejusmodi *Antlia Pneumatica* tubus æneus in tota ſua cavitate perfectè lævigatus, ita ut embolus, qui ultro citroque in eadem cavitate agitandus antliæ cavitati ubique accuratiſſime quadret, nec ullas rimas relinquat per quas aër transpirare poſſit.

Embolus eſt piſtillum ex circulis coriaceis orificio antliæ perfecte quadrantibus conflatum, quod antliæ cavitati ope manubrii centro ejus inſerti ad fundum antliæ intrudi & dehinc iterum ad caput ejusdem ſeu orificium retrahi poſſit.

Epiſtomium Antliæ eſt clavicula cylindrica tubo incurvato antliæque

que fundo afferruminato ad angulos rectos inſerta, libere hinc inde volvenda, foramine rotundo amplitudinis circiter tubi recurvi pertuſo, eum in finem, ut foramen iſtud cum cavitate tubi recurvi antliæ communicans liberum aëri ex vaſe, ex quo aër expelli debet (quod vas *Recipiens* cum aliis brevius deinceps vocabitur) per tubum recurvum in antliam transitum permittat, & in alium ſenſum converſa, & cum ſæpius jam nominato tubo recurvo non communicans modo commemoratum aëris transitum ex recipiente in antliam impediat atque tollat.

Spiraculum eſt cavitas ex ſummitate epiſtomii in foramen ejus transverſum deſinens, & cum tubi recurvi cavitate ſubinde communicans; hians acicula ænea pro rei indigentia obturanda, ejus úſus, ut ſpiraculum apertum cavitati antliæ cum aëre ſubtili liberam communicationem permittat.

Tubus inflexus fundo antliæ afferruminatus plerumque deſinit in cochleam marem, cui catinus æneus in centro cochlea fœmina excavatus circumvolvitur. Catino applicatur circulus coriaceus madefactus, cui recipiens utplurimum campaniforme imponitur, & circumcirca aqua affunditur marginibus catini, ad margines ejus elatis contenta, ad impediendum externi aëris ingreſſum.

Agitatio emboli conſtat uno ejus *itu* ex fundo antliæ usque ad orificium ſeu caput ejus, unoque *reditu* ab orificio usque ad fundum.

329. In figura 79. AB eſt corpus antliæ, EF embolus cavitati antliæ affabre adaptatus, ut antlia nusquam perfluere queat; BOH eſt tubus ad O inflexus antliæ fundo in B afferruminatus, & cum ejus cavitate & cum recipiente M communicans per foramen H; hujus tubi foramini inſeritur epiſtomium IK, quod, prout in hunc vel illum ſenſum convertitur, tollit vel aperit communicationem antliæ cum recipiente M. Hoc epiſtomium IK perforatum eſt usque ad ejus foramen transverſum, ac hæc cavitas vocatur ſpiraculum cui acicula I inſeritur, ut communicatio antliæ cum externo aëre tollatur, acicula verò removetur iterumque extrahitur, quoties hac communicatione opus eſt, vel ad expellendum aërem ex antliæ cavitate, vel etiam ad admittendum externum aërem, eo caſu, quo aër recipientis eſt condenſandus. CD eſt catinus, cujus margines in C & D nonnihil elevati marginum inſtar ſunt, aquam circa recipiens affuſam continentes; catino circulus coriaceus in centro perforatus & madefactus applicatur, cui deinceps recipiens M imponitur

mani-

manibusque fortiter aſtringitur, &, ut modo dictum, circumcirca aqua affunditur in catino, omnia ad id, ne aër exterior per ullam rimam in recipiens ſe inſinuare queat. Et ſic omnia ad uſum erunt parata. Non me latet artifices nonnihil aliter antlias conſtruere ſolere, quoad nonnullas circumſtantias, cum ejus corpori ſitum inclinatum dent, qui tamen in ſchemate noſtro eſt horizontalis; ſed hoc accidentale eſt, nec ad ejus eſſentiales uſus facit. Sic etiam ſpiraculum ſubinde aliter quam à nobis deſcriptum eſt parare conſueverunt & tubum BOH; ſed quocunque modo id conſtruant, idem ſemper effectus debebit præſtari, cum eo qui eſt in antlia hujus deſcriptionis. Imò vero, ſi quæ aliter parant, id duntaxat reſpicit faciliorem antliæ uſum.

330. Præparatis omnibus quæ §. præcedenti deſcripta ſunt, aperiatur epiſtomium IK, ut recipiens M cum antlia AB per tubum HOB communicare poſſit, obturato ſcilicet ſpiraculo I, & retrahatur embolus EF usque ad orificium antliæ A in *ef*, quo fiet ut aër qui cavitatem recipientis M & tubi HOB impleverat, ſe diffundat per totum ſpatium MHOB*ef*, compoſitum ex cavitatibus recipientis M, tubi HOB & antliæ B*ef*, atque adeò reſiduus recipientis aër ſe habebit ad aërem, quem antea continebat, ut recipientis M tubique HOB cavitates ſimul ad cavitates M, BOH & B*ef* ſimul ſumtas, ac propterea raritas ejusdem aëris reſidui erit ad raritatem aëris totalis, qui antea recipienti inerat, ut MHOB*ef* ad MHOI. Dehinc clauditur epiſtomium IK, extrahiturque ſpiraculi I obturamentum, atque intruſione emboli *ef* verſus fundum antliæ B aër ex antliæ cavitate per apertum ſpiraculum expellitur, ac clauſo denuo ſpiraculo I prima emboli agitatio peracta erit, eodem tenore repetentur ſecunda, tertia, quarta, &c. agitationes; ex quibus ultro fluit ſequens

PROPOSITIO XIX. Theorema.

331. *Si cavitates antliæ* Bef, *tubi* BH *& recipientis* M *ſimul, fuerint ad cavitatem ſolius recipientis* M *ut recta* Q *ad aliam* P, *raritas aëris reſidui poſt quamlibet emboli agitationem erit ad raritatem ejus ante hanc agitationem, ut* Q *ad* P. Fig. 79.

Nam, quia poſt emboli itum ex B in *ef* aër recipientis M (§. 330.) ſe diffundit per totum ſpatium MHOB*ef*, raritas aëris reſidui in cavitate M poſt emboli itum, ad raritatem ejus ante hunc itum,

 erit

erit, ut ſpatium MHB*ef* compoſitum ex cavitatibus recipientis M tubi HOB & antliæ B*ef* ad cavitatem recipientis ſolius M, id eſt (ſecundùm hypotheſin) ut Q ad P. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

332. Si ratio P ad Q continuetur in quotcunque terminis R, S, T, &c. & primus P exponat raritatem aëris in recipiente M in ſtatu naturali exiſtentis, termini ſequentes progreſſionis noſtræ Q, R, S, T, &c. indicabunt raritatem aëris in recipiente reſidui, poſt primam, ſecundam, tertiam, quartam, &c. emboli agitationem. Nam, quia raritas aëris poſt primam emboli agitationem eſt ad raritatem ejus ante hanc agitationem ut Q ad P, & hic terminus P exponit raritatem aëris in ſtatu naturali qualis erat ante primam agitationem, ideo exponet Q raritatem aëris in recipiente reſidui poſt primam emboli agitationem; ſic quia raritas aëris poſt primam ad raritatem poſt ſecundam emboli agitationem eſt ut P ad Q, vel ut Q ad R, & Q exponit raritatem aëris poſt primam emboli agitationem, exponet R raritatem aëris reſidui poſt ſecundam emboli agitationem; eodemque argumento conficitur exponere S, T, &c. raritates reſidui in recipiente aëris poſt tertiam, quartam, &c. agitationem.

Corollarium II.

333. Hæc etiam obtinent, mutatis mutandis, in condenſationibus aëris recipientis. Quo caſu loco itus, quem diximus eſſe eductionem emboli ex fundo antliæ B usque in *ef*, nunc per itum intelligam intruſionem emboli *ef* usque ad antliæ fundum. Propterea, ſi progreſſio T, S, R, Q, P continuetur in totidem terminis *q*, *r*, *s*, *t*; &c. hi termini ſignificabunt raritatem aëris in recipiente M, poſt primum, ſecundum, tertium, quartum, &c. emboli itum ſeu in antliam intruſionem. Nam aër, qui ante primam intruſionem diffuſus erat in ſpatio MOef, poſt primam intruſionem redigetur in ſpatium multo anguſtius BOHM, vel neglecta cavitate tubi BOH (quæ inſenſibilis eſt præ cavitate recipientis M, & quæ tubi cavitas etiam ſubinde tollitur, ſpatium EFOH aqua implendo) raritas aëris ante primam emboli intruſionem, quæ dicitur P, ad raritatem ejusdem aëris poſt primum itum eſt ut ſpatium MHOef ad ſpatium M,

M, hoc eſt, ut Q ad P ſeu P ad *q*; ergo *q* repræſentat raritatem aëris in recipiente M poſt primam emboli intruſionem, & pari argumento termini ſequentes *r*, *s*, *t*, &c. indicabunt raritates poſt ſecundam, tertiam, quartam, &c. emboli intruſiones.

Corollarium III.

334. Unde, cum (§. 20.) denſitatibus raritates reciprocè ſint proportionales, magnitudines Q, R, S, T, &c. quæ à magnitudine P æquè remotis *q*, *r*, *s*, *t*, &c. etiam reciproce proportionales exiſtunt, exponent denſitates aëris in recipiente M, poſt primam, ſecundam, tertiam, &c. emboli intruſionem in antlia AB.

PROPOSITIO XX. Problema.

335. *Cavitatibus antliæ & recipientis, vel ſaltem ratione unius ad alteram datis, definire, quot emboli agitationibus opus ſit ad reducendum recipientis aërem ad datum raritatis vel denſitatis gradum.* Fig. 80.

Ad axem AZ extructa ſit quæcunque log-mica B1*n*, in qua magnitudines P, Q, R, S, &c. aptentur tanquam ordinatæ, ut in P0, Q1, R2, S3, T4, &c. quæ cum (ſecundùm hypotheſin) ſint in progreſſione geometrica, intervalla axis PQ, QR, RS, ST, &c. erunt æqualia. Numeri ordinatis adſcripti indicant, quot emboli agitationibus opus ſit ad redigendum recipientis aërem ad eum raritatis gradum, quem ordinata quæque exponit; ſic P0 ſignificat nulla emboli agitatione aërem reduci ad raritatem P0 ſeu P, S3 verò innuit 3 emboli agitationibus aërem reduci ad raritatem S3 vel S, & ſic de reliquis; litera verò *n* denotat numerum quæſitum emboli agitationum, quibus aër Recipientis reducitur ad raritatem datam Z quæ ordinata Z*n* repræſentatur. Hac raritates repræſentandi ratione fit, ut quælibet abſciſſa PS ſit ad abſciſſam PQ ut numerus 3 ordinatæ S3 adſcriptus ad unitatem 1 ordinatæ P1 adſcriptam, hinc erit etiam PZ : PQ = n : 1, vel ſimpliciter *n* = PZ : PQ. Atqui PZ eſt log-us rationis Zn ad P0 ſeu Z ad P, & PQ log-us rationis Q1 ad P0 ſeu Q ad P; ergo numerus quæſitus *n* = log. (Z : P) : log. (Q : P). Atque hinc reſultat regula Bernoulliana.

Log-us rationis (Z : P) quam habet raritas aëris deſiderati ad raritatem aëris naturalis, dividatur per log-um rationis (Q : P) quam

 habent

habent antlia & recipiens ſimul, ad cavitatem ſolius recipientis, indicabit quotiens quæſitum agitationum numerum n. Qui erat inveniendus.

Hujus regulæ à Celeb. Jac. Bernoullio olim ſine demonſtratione publicatæ analyſin ex calculo exponentialium petitam jam anno ni fallor 1693. promulgavit Cl. Varignon in Actis Acad. Reg. Scientiarum, eamque poſtea multis acceſſionibus auctam in Actis ejusdem Academiæ anni 1705. denuò cum publico communicavit.

Corollarium I.

336. Cum log-us cujusque fractionis ſit differentia log-orum numeratoris & denominatoris, erit log-us $Z:P = \log. Z - \log. P$, & $\log. Q:P = \log. Q - \log. P$. adeoque n ($= \log. (Z:P) : \log. Q:P) = (\log. Z - \log. P) : (\log. Q - \log. P)$.

Hinc ſi $Q:P = 2:1$, & $Z:P = 6:1$, erit $\log. Z - \log. P = 0.7781512$, & $\log. Q - \log. P = 0.3010300$, adeoque $n = 0.7781512 : 0.3010300 = 2\frac{4}{7}$ circiter.

Porrò ope canonis ſuperioris ex tribus quantitatibus $Z:P$; $Q:P$ & n, datis quomodocunque duabus, tertia ſemper per log-os haberi poteſt. Sed hisce non vacat diutius immorari.

Corollarium II.

337. Quanquam hoc Problema tantum de rarefactione aëris agit, canon tamen, in quem circa finem §. 335. incidimus, etiam caſibus illis applicari poteſt, quibus aër recipientis non quidem rarefaciendus ſed condenſandus eſt. Ut ſi quæratur, quot emboli pulſibus aër recipientis in naturali vel quocunque alio ſtatu conſtitutus, cujus denſitas ad denſitatem aëris in naturali ſtatu data ſit, ad gradum denſitatis X reduci poſſit. Fiat ut X ad P ita P ad Z, & hæc Z exponet (§. 20.) raritatem aëris cujus denſitas eſt X, quandoquidem P repræſentat denſitatem & raritatem aëris in ſtatu naturali. Jam datis $Q:P$, & $Z:P$ invenietur per canonem citatum numerus quæſitus n pulſuum emboli, quibus aëri raritas $Z = P^2 : X$ ſeu denſitas X inducitur. Verùm hoc caſu, quo aër recipienti eſt intrudendus, magnitudo Z eſt infra ipſam P, atque adeo log-us rationis $Z:P$ erit negativus, hinc etiam valor numeri n negativus exiſtet, quo tamen aliud non indicatur, niſi emboli itus in caſu condenſationis con-

contraria ratione ſe habere, quam in caſu, quo recipientis aër eſt rarefaciendus, adeò ut ad ſigna non debeat attendi.

Scholion.

338. Modus eſt expeditus explorandi rationem cavitatis antliæ ad cavitatem recipientis, ſi vas quoddam cylindriforme ſuper baſi ſeu fundo ſuo rectum aqua impleatur tanta, quantam recipiens & antlia ſimul capere poſſunt & dehinc aquæ altitudo notetur per A; deinde ope ſiphonis tantum aquæ exhauriatur ex vaſe cylindrico, quantum aquæ capere poteſt antlia, reſiduæque in vaſe cylindrico altitudo ſignetur B, dico A fore ad B ſicut Q ad P; nam cylindrus ex altitudine B æquatur cavitati recipientis ſolius, unde cum ſit altitudo A ad altitudinem B, ut cylindrus A ad cylindrum B, id eſt, ut cavitates antliæ & recipientis ſimul ad cavitatem ſolius recipientis, hoc eſt (ſecundùm hypotheſin) ut Q ad P, liquet propoſitum.

CAPUT VII.

De Viribus elaſticis aëris cum denſitatibus ejus comparatis.

NOn ſolum per experimenta, quorum nonnulla initio capitis proxime antecedentis recenſui, conſtitit aëra vi elaſtica præditum eſſe; ſed etiam Philoſophis innotuit hanc vim expanſivam aëris eo majorem eſſe, quo major ſit aëris denſitas, & vice verſa; idcirco examinandum adhuc reſtat an elaſticitates creſcant præciſe juxta proportionem denſitatum, an vero ſecundum aliam quamcunque rationem. In hoc capite nonnulla exhibebimus theoremata ad hanc rem facientia.

339. Cum aëris elaſticitas conſiſtat in niſibus illis, quibus aëris moleculæ à ſe mutuo recedere conantur, manifeſtum eſt, quod preſſio, quam quodlibet planum, quo aëris expanſio impeditur, à particulis aëris plano contiguis ſubit, æqualis eſt univerſæ vi ſingularum particularum urgentium.

PROPOSITIO XXI. Theorema.

340. *Si aër ſub volumine cujusvis prismatis* BOF *redigatur in minus* Fig. 81.

nus volumen GOF, *niſusque, quibus proximæ quæque moleculæ* C, c *&* I, i *à ſe invicem recedere conantur, ſint in reciproca ratione denſitatis, cujus exponens eſt* n, *intervallorum* Cc *&* Ii *earundem molecularum, hoc eſt, in ratione* Cc^{-n} *ad* Ii^{-n}, *vel* Ii^{n} *ad* Cc^{n}. *Erunt vires, quibus plana* BC *&* GI *ab aëre elaſtico* BF *&* GF *premantur, ut poteſtas* n *denſitatis aëris* BF *ad ſimilem poteſtatem aëris* GF. *Hoc eſt, ut* d^{n} *ad* D^{n} *vocando denſitatem aëris in volumine* BF, d *& denſitatem in volumine* GF, D.

Nam vis, quâ planum BC à particulis aëris ipſum tangentibus urgetur, eſt ad vim, qua planum GHI à particulis aëreis ipſi contiguis urgetur, eſt ut omnes particulæ in plano BC ad omnes, quæ ſunt in plano GHI, vel potius, ut vis ex omnibus, quibus particulæ plano illi adhærentes pollent, reſultans, ad vim reſultantem ex viribus, quibus omnes moleculæ plani hujus GHI præditæ ſunt, atqui vis omnium C, quæ ſunt in plano BC, eſt ad vim omnium I, quæ ſunt in plano GHI, ut vis unius C ad vim unius I, id eſt (ſecundùm hypotheſin) ut Ii^{n} ad Cc^{n}; ergo vis, qua planum BC eſt ad vim, qua planum GHI urgetur, ut Ii^{n} ad Cc^{n}. Verum eſt Ii ad Cc ut IF ad CF, ſeu ut priſma BF ad priſma GF, id eſt, ut denſitas aëris BF ad denſitatem aëris GF vel, ſicut *d* ad D, ergo Ii^{n} ad Cc^{n}, id eſt, vis, qua urgetur planum BC, ad vim, qua ab incluſo aëre GF planum GHI urgetur, eſt ut d^{n} ad D^{n}, ſeu directe, ut denſitatum dignitas cujus index eſt *n*. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

341. Adeoque, ſi vires, quibus particulæ C, *c*, & I, *i* à ſe invicem aufugere conantur, fuerint interſtitiis Cc, Ii reciprocè proportionales, vires elaſticæ aëris erunt denſitatibus proportionales.

PROPOSITIO XXII. Theorema.

Fig. 82. 342. *Si aër, qui eſt ſub volumine* CFE, *redigatur in volumen minus* cfe *priori ſimile, ac vires, quibus moleculæ aëreæ in utroque volumine à ſe invicem recedere conantur, ſint, ut in propoſitione præcedenti, in reciproca ratione poteſtatis ex indice* n *intervallorum* GH, gh *quibus moleculæ*, G, g *planis* BAE *&* bae *adjacentes à proximis* H *&* h *diſtant, erit vis, qua totum planum* BAE *ab aëre elaſtico* FCE *urgetur, ad vim, qua planum* bae *ab aëre elaſtico* fce *premitur, ut latus cubicum ex poteſtate*

teſtate denſitatis d *aëris* FCE *ab indice* n *denominata, ad latus cubicum ex pari dignitate denſitatis* D *aëris* cfbe; *hoc eſt, ut radix cubica ex* d^n *ad radicem cubicam ex* D^n.

Quia volumina CFE, *cfe* ſunt ſolida ſimilia, etiam plana BAE, *bae* erunt figuræ ſimiles, & particulæ aëreæ in iis ſimiliter poſitæ erunt. Propterea vis elaſtica aëris CFE, quæ exeritur in planum BAE, erit ad vim elaſticam aëris *cfe* redundantem in planum *bae*, ut vis, qua unica particula G premit planum BAE ad vim unius particulæ *g* urgentis planum *bae*, id eſt (ſecundùm hypotheſin) ut gh^n ad GH^n, ſeu quia GH & *gh* in ſolidis ſimilibus CFE & *cfe* ſunt lineolæ ſimiliter poſitæ, ut ab^n ad AB^n. Jam quia ſolidum *cfe* eſt ad ſolidum CFE ut denſitas aëris in FA ad denſitatem aëris in volumine *fa*, id eſt, ut *d* ad D, tum etiam ut ſolidum *fa* ad ſolidum FA, vel quia hæc ſolida (ſecundùm hypotheſin) ſimilia ſunt, ut ab^3 ad AB^3, erit $ab : AB = \sqrt{C}. d : \sqrt{C}. D$ & $ab^n : AB^n = \sqrt{C}. d^n$, ad $\sqrt{C}. D^n$. Ergo vis aëris, quæ exeritur in planum BAE, eſt ad vim, quæ exeritur in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^n ad latus cubicum ex D^n. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

343. Figura verò KIE in plano BAE ſimilis & æqualis figuræ *bae* preſſionem ſubibit ab aëre elaſtico FA, ſe habentem ad preſſionem, quam aër elaſticus *fa* exerit in planum *bae*, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Nam preſſio figuræ KIE eſt ad preſſionem figuræ BAE, ut figura KIE, vel æqualis *bae* ad figuram BAE, id eſt, propter figurarum ſimilitudinem ut ab^2 ad AB^2, & (§. 342.) preſſio figuræ BAE ad preſſionem figuræ *bae*, ut $\sqrt{C}. d^n$ ad $\sqrt{C}. D^n$, ergo ex æquo & per compoſitionem rationum preſſio in figura KIE ad preſſionem in figura *bae* ſe habet, ut latus cubicum ex d^{n+2} ad D^{n+2}. Ut habet Celeb. Newtonus Sch. Prop. 23. Lib. II. Pr. Ph. Nat. Math.

Corollarium II.

344. Hinc, ſi iterum fuerit $n = 1$, aut vires centrifugæ moleculaum aëris ſuis diſtantiis ab invicem reciproce proportionales, erunt vires elaſticæ, ſeu preſſiones, quas æquales figuræ KIE & *bae* à ſuo quæque aëre ſubibunt, in ratione denſitatum, atque in hac circumſtantia res convenit cum Corollario Propoſitionis præcedentis. Et con-

converſim, ſi vires elaſticæ denſitatibus proportionales fuerint, molecularum vires, ſeu conatus centrifugi, diſtantiis ſuis à proximis moleculis reciproce proportionales erunt.

PROPOSITIO XXIII. Theorema.

Fig. 83. 345. *Si vires elaſticæ aëris fuerint, ut rationes, quas habent quantitates aëris ad reſidua voluminum, ſub quibus aër continetur, eædem vires erunt ut ordinatæ ad lineam alterutri hyperbolæ æquilateræ aſymptotam æquidiſtantem, denſitates vero, ut abſciſſæ ordinatis homologæ, quarum abſciſſarum origo ſit in ipſa hyperbolæ curva.*

Si ſegmenta AD lineæ datæ AB exponant quantitates aëris in eodem volumine, per totam AB expoſito, contentas, eædem AD denſitates aëris ſimul indicabunt; nam juxta §. 16, denſitates ſunt ut rationes, quas materiæ quantitates habent ad volumina, in quibus continentur, & hoc loco diverſæ aëris quantitates eidem volumini incluſæ ſpectantur. Segmenta vero DB ipſius AB ſunt reſidua voluminis AB, detractis ſcilicet ex hoc volumine aëris quantitatibus AD, AD, &c. In punctis D ad AB excitatæ ſint perpendiculares DC exponentes vires elaſticas aëris, denſitates AD homologas habentis; quibus poſitis, & quia (ſecundùm hypotheſin) elaſticitas aëris ſub denſitate AD eſt, ut ratio AD ad DB; fiat, aſſumta quadam data H, ratio $DC : H = AD : DB$, eritque componendo $DC + H : H = AB : DB$, atque adeò producta recta EB datæ AB normali in G, ut GB fiat æqualis aſſumtæ datæ lineæ H, ductaque per punctum G linea GF alteri AB æquediſtanti, erit $CF : DF = AB : DB$; vel ducta per C parallela CE ipſi AB, fiet $EG : BG = AB : CE$, unde curva AC cujus ordinatæ DC exponunt vires elaſticas aëris, abſciſſæ verò AD denſitates reſpectivas, eſt hyperbola inter aſymptotas GF & GE. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

346. Si ipſæ AD fuerint exiguæ magnitudinis, reſpectu totius AB, trilineum, vel trilinea, ADC ſpectari poſſunt tanquam rectilinea absque errore ſenſibili, ac hoc caſu elaſticitates DC ejusmodi denſitatibus AD quam proxime proportionales exiſterent; ſin verò denſitates majores ſint, quam ut AD præ tota AB evaneſcat, elaſticitates aëris in longe majori creſcent proportione quam denſitates.

Hy-

Hypotheſin præſentem excogitavit Celeb. Jac. Bernoullius ejusque rationem phyſicam dare conatus eſt in tractatu ſuo de *Gravitate Aetheris* pag. 97. ſeqq. quas Lector ibi legere atque examinare poterit. Ex hac hypotheſi etiam Celeb. ejus Frater Johannes hanc noſtram Propoſitionem XIII. propoſuit in eleganti ſua Diſſertatione *De Motu Muſculorum* jam ſupra laudata.

Scholion.

347. Leibnitiana hypotheſis, qua Illuſtris Vir ſtatuit aërem ut plurimùm mixtum eſſe ex materia *comprimibili* & *incomprimibili* fortaſſe non incongrue ad præſentem propoſitionem exigi poteſt. In iſta hypotheſi aëris puri ſeu materia tantum comprimibili conſtantis elaſticitates eſſent denſitatibus proportionales, in aëre verò mixto ex comprimibili & incomprimibili vires elaſticæ non ſequuntur rationem denſitatum, ſed in majori harum ratione exiſtunt inter ſe, ita ut pro varia proportione mixturæ ex comprimibili materia & incomprimibili elaſticitatum cum denſitatibus collatarum lex variare debeat, atque adeò rationi conſentaneum ſit, vires elaſticas inter ſe eſſe in proportione rationum, quas quantitates materiæ comprimibilis ſub aliquo volumine contentæ habent ad reſidua hujus voluminis materiæ incomprimibilis plena, ut habet hypotheſis hujus Propoſitionis XXIII. Cæterum Boylius, Mariottus, Bernoullii, Amontonius, Joh. Polenus & alii accuratis experimentis compererunt denſitates aëris viribus comprimentibus, ſeu elaſticitatibus ejus quam proxime proportionales exiſtere. Modus unus inter alios quo experimentum ſumſerunt, eſt qui ſequitur.

348. Sit tubus ABC inſtar ſiphonis reflexus apertus in A & hermetice ſigillatus in C, per orificium A argentum vivum infunditur in breviore crure pertingens usque in E, & in longiore AB usque in H, & ubi omnia in ſtatu manente fuerint, baſis D ab incumbente Mercurio HD, aucto preſſione totius atmoſphæræ, ſeu 28. digitorum, eandem preſſuram ſubibit, quam baſis E ab elaſticitate aëris ſpatio CE incluſi; ſi porrò Mercurius infundatur per orificium A ut tandem ſubſiſtat in I, & in altero ramo CB pertingat usque ad G, ita ut aër CE in ſpatium anguſtius CG redactus ſit, baſis F preſſuram ſuſtinebit columnæ IF auctæ atmoſphæræ gravitatione 28. digitorum, alteraque G ab aëre elaſtico CG parem preſſionem ſubibit. Idcirco ſi IF + 28. digit. Mercurii ad HD + 28. digit. fuerit, ut Fig. 84.

CE ad CG, erunt vires comprimentes ſeu elaſticitates aëris ejuſdem denſitatibus directe proportionales, ut à Mariotto, Amontonio & Poleno pluribus experimentis comprobatum eſt. Vid. Mariotti *Tentamen de Natura Aëris*, tum etiam Tractatus de Motu Aquarum, in quibus ejuſmodi experimenta à ſe capta diſtincte exponit, perinde ac poſt ipſum fecit Amontonius in Commentariis Acad. Scient. Pariſ. Sed quia communiter ſpatia CE, CG, &c. perexigua ſunt in eorundem menſuris & proportionibus explorandis, facile eſt errorem committere; idcirco Mariottus modo iſti proportiones inveſtigandi inter vires elaſticas, ſeu vires comprimentes, & denſitates aëris, merito alium adjecit ex obſervationibus barometri petitum, quem Jac. Bernoullius deinceps magis excoluit in ſuo Tractatu de Gravitate Ætheris. Hic modus eſt indirectus, quia in eo aſſumitur id, quod eſt probandum inſtar principii, & concluſio confertur cum phænomenis, cum quibus ſi conſpiraverit retrogrado ordine concluditur principium aſſumtum eſſe verum. Nam fiſtulæ barometri in hoc altero experimentali modo infunditur Mercurius ad certum ſignum usque, reliquo tubi aëri naturalis conſiſtentiæ relicto, non verò, ut in communi barometrorum conſtructione fieri ſolet, totus tubus hydrargyro impletur; dehinc inverſo tubo, obſtructo ejus orificio, & demiſſo infra ſuperficiem Mercurii in vaſculo quodam ſtagnantis, aperitur obſtructum orificium, ut Mercurius in fiſtula vaſculo perpendiculariter inſiſtenti deſcendere queat, qui non totus quidem ex tubo effluet, ſed tamen humilius ſe in fiſtula demittet, propter aërem fiſtulæ introductum, quam in barometro ordinario; ex quo, quantum fieri poteſt, omnis aër diligenter excludi ſolet. Jam ſi mercurius hac operatione poſita, ad illud ipſum ſignum delabitur, & in eo ſubſiſtit, in quo ipſum ſubſiſtere debere calculus indicavit, qui in hypotheſi fundatur, quod denſitates ſint viribus comprimentibus proportionales, ecquis de bonitate hypotheſeos ambiget? Quod vero Mercurius ad ea præciſe ſigna perveniat, quæ ipſe calculus in hac memorata hypotheſi fundatus determinavit, id conſtitit Mariotto & Jac. Bernoullio ex obſervationibus accuratis. Quousque vero Mercurius in præmemoratis circumſtantiis ſe demittere debeat, manifeſtabit ſequens Problema.

PROPOSITIO XXIV. Problema.

Fig. 85. 349. *Datis atmoſphæræ preſſione, & longitudine alicujus fiſtulæ* AB *apertæ*

apertæ in B, *clauſæ verò in* A, *definire ad quam altitudinem intra fiſtulam ſuſpenſus manere debeat Mercurius, ſi, poſt impletionem fiſtulæ eo usque ut ſola pars longitudinis datæ,* V *æqualis, Mercurii vacua, ſed aëris naturalis plena retineatur, & poſtquam apertum orificium* B *digiti pulpa vel alia ratione obſtructum, inverſoque tubo idem obſtructum orificium argento vivo in vaſculo* D *ſtagnanti immerſum fuerit, tubo exiſtente in ſitu perpendiculari, ita ut aër tubo incluſus in ſummitate fiſtulæ* AB *æquali* V *primùm ſe colligere poſſit, dein remoto digito orificium* B *obſtruente, Mercurius libere deſcendere queat.*

Fiat AG æqualis columnæ argenti vivi æquivalentis atmoſphæræ, ſeu 28. digitorum circiter, eique in G ad angulum rectum AGO aptetur linea indefinite longa GH, & in recta AL per A tranſeunte, ipſi GH parallela ſumatur AL æqualis V, ſeu columnulæ aëreæ AC tubo AB Mercurii pleno usque in C intromiſſæ, deſcriptaque intra aſymptotas AGH hyperbola LKN per punctum L, ſumtaque in aſymptota AG linea AB æqualis fiſtulæ AB longitudini datæ, ducatur per punctum B linea BK angulum ſemirectum conſtituens cum aſymptota AG, agaturque ex puncto K hyperbolæ, in quo recta BK ei occurrit, linea IK parallela aſymptotæ GH, eritque AI æqualis altitudini columnæ argenti vivi BM, in qua in æquilibrio exiſtet cum externa atmoſphæræ preſſione, & BI vel IK exponet ſpatium AM, in quod aër naturalis conſiſtentiæ in fiſtula AC ſeſe extendet. Fig. 86. Fig. 85.

Demonſtr. Quia denſitas aëris AM eſt ad denſitatem aëris AC ut AC ad AM, id eſt, ut AL ad IK, ſeu propter hyperbolam LKN, ut GI ad GA, & denſitates aëris viribus elaſticis ejus ſub illis denſitatis gradibus ſunt (ſecundùm hypotheſin) ut hæ denſitates, erit vis elaſtica aëris AM ad vim elaſticam aëris AC, ut GI ad AG; atqui aër naturalis conſiſtentiæ AC vim elaſticam habet atmoſphæræ preſſioni per AG expoſitæ æqualem, ergo vis elaſtica aëris AM æquipollet columnæ Mercuriali GI, atque adeo preſſio compoſita ex elaſticitate aëris AM & gravitatione columnæ BM = AI, eſt AG compoſita ex AI & IG; æqualis ergo eſt interna preſſio, reſultans ex vi elaſtica aëris AM & gravitatione Mercurii MB, externæ atmoſphæræ AG, ac propterea columna argenti vivi in altitudine MB intra fiſtulam librata hæret. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

350. Ex hiſce nunc facile elicietur valor rectæ BI aut æqualis IK vel AM. Sed in hac determinatione caſus diſtingui debent. Nam fiſtulæ longitudo AB major eſſe poteſt quam AG, vel minor. Si illud, & quia angulus ſemirectus IBK lineam BI alteri IK æqualem efficit, adeo ut figura IKPB ſit quadratum æquale duobus rectangulis IO & GP ſimul, hoc eſt $IK^2 = IK.BG + GH.HN = IK.BG + AG.AL$, ergo $IK = \frac{1}{2}BG + \surd(\frac{1}{4}BG^2 + AG.AL)$. Hinc exiſtente BG nulla coincidentibus punctis B & G, fiet $IK = \surd(AG.AL)$.

Sin vero iiſdem poſitis fiſtulæ AB longitudo minor fuerit quam AG, fiat Aβ eidem fiſtulæ longitudini æqualis, poſitaque conſtructione problematis antecedente paragrapho tradita, ſimili fere argumento invenietur $ik = -\frac{1}{2}\beta G + \surd(\frac{1}{4}\beta G^2 + AG.AL)$.

Corollarium II.

351. Si jam cum Cl. Jac. Bernoulli, qui etiam in ſuo Tractatu *De Gravitate Ætheris* pag. 117. ſeqq. hoc problema tractavit, ponamus AC vel AL, a; BC, b; adeòque $AB = a + b$, $AG = b + c$, unde $AG - AB = \beta G = c - a$, & denique $CM = y$; ſubſtitutis hiſce valoribus in ultima æqualitate paragraphi proxime antecedentis, invenietur $ik = a + y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \surd(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)$ adeoque $y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \surd(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab)$, quæ eſt ipſiſſima æquatio, quam inſignis vir etiam reperit. In eandem incidiſſemus æquationem, ſi in altera formula corollarii præcedentis loco BG ſubſtitutum fuiſſet $a - c$.

In numeris ſit fiſtula AB, 21. digit. AG nunc 27. digit. AC, 1. dig. invenieturque ik vel AM, 3. digitorum adeòque BM, 18. digitorum.

PROPOSITIO XXV. Problema.

Fig. 85, 86. 352. *Datis columna* AG *argenti vivi, æquivalente preſſioni atmoſphæræ, & longitudine fiſtulæ* AB, *definire quantum ſpatium* AC *aëris naturalis conſiſtentiæ plenum in ſummitatem fiſtulæ debeat introduci, ut, poſtquam aër ex* AC *ſe extendit in ſpatium* AM, *Mercurius in data altitudine* BM *intra fiſtulam ſuſpenſus maneat.*

In

In hoc problemate ex datis AG, AB, AI vel BM quæritur AL vel AC aut V. Idcirco facto iterum angulo ſemirecto ABK, & AI = datæ, in fiſtula altitudine Mercurii manentis BM, agatur IK parallela aſymptotæ GH rectæ BK occurrens in K, per quod punctum nunc ducenda eſt hyperbola NKL, rectæ AL ipſi GH parallelæ occurrens in L, erit AL ſpatium quæſitum. Demonſtratio eadem penitus eſt cum demonſtratione propoſitionis antecedentis, atque adeo hoc loco non repetenda. In numeris habebitur AL applicando rectangulum datum GIK ad lineam AG, quæ atmoſphæræ preſſionem exponit: nam GI eſt exceſſus, quo AG excedit datam AI vel BM, & IK vel BI aut AM eſt etiam (ſecundùm hypotheſin) data, adeoque & rec-lum GI. IK eique æquale rec-lum AG. AL datum erit; adeo ut diviſo rec-lo GI. IK per AG, quotiens, vel in geometrica phraſi quarta proportionalis ad AG, IG & IK futura ſit AL denotans quantitatem quæſitam aëris in fiſtulam AB intromiſſi, ut Mercurius in data altitudine BM conſiſtat. Quod erat inveniendum.

Scholion.

353. Si jam determinationes hujus & antecedentis propoſitionis cum phænomenis convenerint, ut ſatis egregie cum iis conſpirare deprehenſæ ſunt; omnino inferri debet, aſſumptam hypotheſin, quod denſitates aëris viribus comprimentibus ſeu elaſticitatibus ejus proportionales ſint, naturæ ſatis conſentaneam eſſe, modo ea non in majore latitudine ſumatur, quam experimenta, cum quibus convenire videtur. Ejusmodi verò experimenta cum aëre mediocris denſitatis capta ſunt; idcirco, ſi quis præmemoratam hypotheſin ad aërem denſiſſimum vellet extendere, inſigniter hallucinaretur, quandoquidem juxta ſuperius dicta (§. 346.) in aëre denſiore elaſticitates majorem habent inter ſe proportionem quam denſitates ipſis convenientes.

Caput VIII.

De Denſitatibus aëris in diverſis Atmoſphæræ locis in omni poſſibili elaſticitatum hypotheſi.

In hoc capite non agetur de aliis aëris denſitatibus quam quæ aëri à pondere incumbente inducuntur; propterea in hisce ſer-

mo non erit de rarefactione & condenſatione aëris, quæ à calore & frigore proveniunt.

DEFINITIONES.

I.

Fig. 87, 88. 354. Curva C1C2C circa axem OA2A extructa, cujus ordinatæ AC, 2A2C, &c. exponunt gravitatem variabilem cujusque corporis in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ transeunt, dicatur *ſcala gravitatis variabilis*.

II.

355. Curva verò B1B2B circa eundem axem A2A deſcripta eſto *ſcala denſitatum* atmoſphæræ, quia ordinatæ ejus AB, 2A2B, &c. exponunt denſitates atmoſphæræ in locis A, 2A, &c. per quæ ordinatæ ductæ ſunt.

III.

356. Et curva A2DD ſubter CB horizontem circa eundem axem AO deſcripta, ſit *ſcala elaſticitatis* aëris, cujus ſcilicet abſciſſæ AO, A2O, A1O repræſentent elaſticitates aëris ſub denſitatibus OD, 2O2D, 1O1D.

IV.

357. Productis ordinatis ſcalæ elaſticitatis aëris DO, 1D1O, 2D2O in E, 1E, 2E, &c. ſi ſingula rectangula DOE, 1D1O1E, 2D2O2E inter ſe & dato plano æqualia fuerint, puncta E, 1E, 2E, &c. erunt in curva E1E2Ee, quam *reciprocam ſcalæ elaſticitatis* deinceps vocabimus.

AXIOMA.

358. Elater aëris æqualis ſemper eſt vi comprimenti, atque adeo in quolibet atmoſphæræ loco aëris vis elaſtica æquivalet ponderi aëris incumbentis. Nam vires directe contrariæ, ut vis aërem comprimens & elater aëris, æquales ſunt, quia omnia in ſtatu manenti poſita eſſe intelliguntur.

PRO-

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA.

359. *Ordinatæ quæcunque æquales* ab *&* od *in ſcalis denſitatum & elaſticitatum aëris ultra communem ſcalarum axem* AT *productæ, in ſcala gravitatis variabilis & curva ſcalæ elaſticitatis aëris reciproca perpetuò areas æquales* ACca *&* OEeo *abſcindent.* Fig. 87.

Ordinatæ $\alpha\beta$ & $\omega\delta$ ſuis reſpectivis *ab* & *od* indefinite vicinæ protrahantur in $\varkappa$ & *f*. Jam gravitas aëris *a*T loco *a* incumbentis, aërique in hoc loco denſitatem *ab* vel *od* inducens (§. 358.) æquatur elaſticitati aëris expoſitæ per abſciſſam A*o*, & pondus aëris loco α incumbentis æquatur elaſticitati aëris in α, quæ repræſentatur abſciſſa Aω; adeoque differentia ponderum αT & *a*T, id eſt, pondus columnulæ aëreæ αa æquabitur differentiæ elaſticitatum Aω & A*o* hoc eſt ωo. Atqui (§. 32.) pondus columnulæ αa exponitur ſolido $ab.ac.a\alpha$; ergo hoc ſolidum æquatur alii ſolido ex ωo in datum planum EO.OD, vel (§. 357.) ipſi æquale planum $eo.od$, id eſt, $ab.ac.a\alpha = eo.od.\omega o$; ſeu deletis (ſecundùm hypotheſin) æqualibus *ab* & *od*, rec-lum $ac.a\alpha =$ rec-lo $oe.\omega o$, & cum deſcendendo verſus CB & ED hoc ubique eveniat, ut ſingula elementa arearum AC*ca* & OE*eo* æqualia ſint, æquabuntur etiam univerſa, id eſt omnia $ac.a\alpha$ ſeu area AC*ca*, quam illa exhauriunt, erunt æqualia omnibus $oe.\omega o$, ſeu areæ OE*eo*. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

360. Si nunc ſcala elaſticitatum aëris A1D2D ponatur eſſe parabola indefiniti gradus, cujus quælibet ordinata 1O1D ſit ut $\mathrm{A1O}^m$, ſeu ut dignitas abſciſſæ A1O ab exponente *m* denominata, erit propter rec-lum D1O1E, æquale dato rectangulo DOE, atque adeo propter 1E1O alteri 1D1O reciproce proportionalem, 1E1O reciproce ut $\mathrm{A1O}^m$. atque adeo curva E1E2E hyperbola indefiniti gradus m. Sit inſuper curva C1C2C alia hyperbola indefiniti gradus *n*, adeo ut quælibet ejus ordinata 1C1A ſit reciproce ut abſciſſæ dignitas *n*, id eſt, reciproce ut $\mathrm{O1A}^n$. Jam ſi æquales ordinatæ 1A1B vel 1O1D exponunt denſitatem aëris in 1A, (§. 359.) quadrilinea A1A1CC & O1O1EE æqualia erunt, atqui juxta methodum ſupra (§. 92.) expoſitam invenitur Quadrilineum A1A1CC = (OA. AC − O1A.1A1C) : n − 1, & quadrilineum hyperbolicum OE1E1O = (A1O.

$= (A1O.\ 1O1E - AO.\ OE) : m - 1 = (AO.\ OE - A1O.\ 1O1E) : 1 - m$. Ergo $(OA.\ AC - O1A.\ 1A1C) : n - 1 = (AO.\ OE - A1O.\ 1O1E) : 1 - m$. Jam, quia ipſæ AC & OE nullius ſunt determinatæ magnitudinis, fiat $AC : EO = n - 1 : 1 - m$, eritque rec-lum OA. AC ad rec-lum AO. OE in hac eadem ratione ac conſequenter etiam rec-lum O1A. 1A1C ad rec-lum A1O. 1O1E in eadem erit ratione $n - 1$ ad $1 - m$ ſeu AC ad OE. At vero in hyperbola C1C2C eſt rec-lum $OA.\ AC : O1A.\ 1A1C = O1A^{n-1} : OA^{n-1}$; ergo ex æquo & per compoſitionem rationum erit $OA.\ AC : A1O.\ 1O1E = AC.\ O1A^{n-1} : OE.\ OA^{n-1}$, item in hyperbola E1E2E, eſt $A1O.\ 1O1E : AO.\ OE = AO^{m-1} : A1O^{m-1}$ (hoc eſt propter parabolam A2D1D) $= OD^{m-1:m} : 1O1D^{m-1:m}$, ergo denuo ex æquo habetur $OA.\ AC : AO.\ OE = AC.\ O1A^{n-1}.\ OD^{m-1:m} : OE.\ OA^{n-1}.\ 1O1D^{m-1:m}$. Ex hac vero deducitur $O1A^{n-1}.\ OD^{m-1:m} = OA^{n-1}.\ 1O1D^{m-1:m}$, & rejectis quantitatibus datis, ſeu conſtantibus, quæ proportiones non alterant, ſcilicet $OD^{m-1:m}$, & OA^{n-1}, erit $O1A^{n-1}$ ut $1O1D^{m-1:m}$, vel dividendo exponentes per $m - 1 : m$, reſultabit ſequens 1O1D ut $O1A^{mn-m:m-1}$. Hinc

1°. Si cubus vis comprimentis proportionetur quadrato-quadrato denſitatis, & gravitas ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ à centro gravium, erunt $m = \frac{3}{4}$, & $n = 2$, adeoque $mn - m : m - 1 = -3$, ergo 1O1D erit hoc caſu, ut $O1A^{-3}$, hoc eſt, denſitas erit reciproce ut cubus diſtantiæ.

2°. Si cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & gravitas reciproce ut quadratum diſtantiæ, fient $m = \frac{3}{5}$ & $n = 2$, ergo $mn - m : m - 1 = -\frac{2}{3}$, id eſt, denſitas 1O1D erit in reciproca ſeſquiplicata ratione diſtantiæ O1A.

3°. Si vis comprimens ſit ut quadratum denſitatis, & gravitas in reciproca duplicata ratione diſtantiæ, fient $m = \frac{1}{2}$ & $n = 2$, ergo $mn - m : m - 1 = -1$, quod indicat denſitatem hoc caſu eſſe in reciproca ratione diſtantiæ.

Ex hiſce ergo liquet veritas aſſertionum nonnullarum ſine ulla demonſtratione prolatarum ab Illuſtr. Newtono in Scholio poſt Prop. 22. Lib. II. *Pr. Phil. Nat. Math.* Et, quanquam hoc corollarium tantum caſus ſit particularis propoſitionis noſtræ generaliſſimæ, idem tamen infinities infinitos caſus diverſos in ſe continet.

Co-

Corollarium II.

361. Nam ſi ſcala elaſticitatum aëris A2D1D fuerit linea recta, hoc eſt, ſi elaſticitas aëris, aut vis comprimens, eſt ut denſitas, curva E1E2E erit hyperbola conica intra aſymptotas CA & AO deſcripta; eſt enim 1E1O : EO = OD : 1O1D (propter rectam A2D1D) = AO : A1O. Hinc, ſi hyperbolæ quadrilineæ EO1O1E, 1O2O2E1E, &c. ſint æquales inter ſe, & hisce æqualibus quadrilineis æquentur totidem in ſcala gravitatis variabilis AC1C1A, 1A1C2C2A, &c. homolgæ ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. in ſcala denſitatum B1B2B erunt continue proportionales. Nam propter æqualitatem trapeziorum hyperbolicorum O1E, 1O2E, &c. abſciſſæ AO, A1O, A2O, &c. vel abſciſſis hisce reſpectivæ ordinatæ in ſcala elaſticitatis OD, 1O1D, 2O2D, &c. hoc eſt AB, 1A1B, 2A2B, &c. ipſis eodem ordine ſumtis æquales erunt in continua ratione. Idcirco, ſi vires comprimentes, vel æquivalentes vires elaſticæ aëris denſitatibus ejus proportionales, in ſcala vero gravitatis quadrilinea AC1C1A, 1A1C2C2A, &c. æqualia fuerint, denſitates aëris in locis A, 1A, 2A, &c. erunt ſemper in continua ratione.

Corollarium III.

362. Propterea ſi gravitas in loco quolibet 1A, ſeu ordinata 1A1C fuerit reciproce ut $O1A^n$, exiſtente curva C1C2C hyperbola indefiniti gradus exponentis n, & magnitudines OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. ſumantur in progreſſione arithmetica aſcendente, ordinatæ ſcalæ denſitatum AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt continue proportionales. Nam quia OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. proportionales ſunt hisce ſequentibus eodem ordine ſumtis $O2A^{n-1}$, $O1A^{n-1}$; OA^{n-1}, &c. hisce jam proportionantur rectangula OA. AC, O1A. 1A1C, O2A. 2A2C, &c. ergo hæc rectangula ſunt etiam in progreſſione arithmetica, atque adeo (O1A. 1A1C − OA. AC) : n − 1 id eſt, juxta ea quæ §. 360. dicta ſunt, quadrilineum AC1C1A æquatur (O2A. 2A2C − O1A. 1A1C) : n − 1, ſeu quadrilineo 1A1C2C2A, adeoque (§. 361.) ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt continue proportionales.

Corollarium IV.

363. Si nunc *n* ſit 1, adeoque curva C1C2C hyperbola conica centrum habens in O, quadrilinea æqualia A1C, 1A2C, &c. habebunt abſciſſas OA, O1A, O2A, &c. continue proportionales, & vice verſa, ſi hæ abſciſſæ fuerint in progreſſione geometrica, quadrilinea prædicta erunt æqualia, ac conſequenter denſitates AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt continue proportionales, plane ut habet Prop. 21. Lib. II. *Princ. Ph. Nat. Math.* Cel. Newtoni, quam ſeorſim demonſtravit.

Corollarium V.

364. Si *n* ſit 2, atque adeo curva C1C2C hyperbola quadratica; id eſt, ſi gravitates corporum ſint in reciproca duplicata ratione diſtantiarum à centro, & OA^{-1}, $O1A^{-1}$, $O2A^{-1}$, &c. in progreſſione arithmetica, atque adeò ſeriei hujus reciproca OA, O1A, O2A, in progreſſione harmonica, (§. 361. 362.) ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. erunt in progreſſione Geometrica. Hoc ipſum demonſtratum dedit alia ratione Cel. Newtonus Prop. 22. Lib. II.

Corollarium VI.

365. Si $n = -1$, hoc eſt, ſi gravitas eſt ut diſtantia corporis à centro O, curva C1C2C mutabitur in lineam rectam transeuntem per centrum O, ſeriesque, quæ juxta §. 362. debet eſſe in arithmetica progreſſione OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. nunc fiet OA^2, $O1A^2$, $O2A^2$, &c. adeoque, ſi quadrata diſtantiarum OA, O1A, O2A, &c. fuerint in progreſſione arithmetica, trapezia rectilinea, A1C, 1A2C, &c. erunt æqualia, atque adeo (§. 361.) ordinatæ ſcalæ denſitatum AB, 1A1B, 2A2B, erunt continue proportionales. Ut aſſeruit, ſed absque ulla demonſtratione, laudatiſſimus Newtonus in Scholio poſt Prop. XXII. Lib. II. *Princ. Phil. Nat. Math.*

Corollarium VII.

366. Sin verò *n* fuerit *o*, id eſt, ſi gravitas corporum uniformis ſeu conſtans fuerit, qualis communiter conſiderari ſolet, tunc ſcala gra-

gravitatis C1C2C erit linea recta axi AT parallela, ut in fig. 88. & ſeries OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. quæ conſtituere debet progreſſionem arithmeticam ad id, ut ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. ſint in continua proportione, nunc erit ſimpliciter OA, O1A, O2A, &c. in progreſſione arithmetica, atque adeò ipſæ diſtantiæ A1A, 1A2A ordinatarum ſcalæ denſitatum atmoſphæræ erunt æquales, ſcalaque ipſa B1B2B proinde erit logarithmica. Huic corollario ſimile quid jam olim primus, quod ſciam, obſervavit acutiſſimus Edmundus Hallejus.

Corollarium VIII.

367. Iisdem, quæ in corollario præcedenti, poſitis, ſi ſcala gravitatis uniformis tC producatur usque ad occurſum E hyperbolæ E1E2E, & per hoc punctum E agatur EOD ſcalæ elaſticitatis aëris A2D1D occurrens in D, erit ſubtangens *ah* log-micæ B1B2B æqualis abſciſſæ AO ſcalæ elaſticitatis, ordinatæ OD correſpondenti. Nam (§. 359.) eſt $ac.a\alpha = eo.o\omega$ atque adeò $o\omega : a\alpha = ac : eo =$ EO : $eo = od$: OD = Ao : AO. atqui $g\delta$ vel $\gamma\beta$ eſt ad dg vel $o\omega = od$ vel ab : Ao, ergo ex æquo $\gamma\beta : a\alpha = ab$: AO. & propter triangula ſimilia $\beta\gamma b$ & bah, eſt $\gamma\beta : a\alpha$ vel $b\gamma = ab : ah$, ergo etiam ab : AO $= ab : ah$, atque adeò AO æquatur ſubtangenti *ah* logarithmicæ B1B2B.

Corollarium IX.

368. Præterea erit, iisdem poſitis, quodlibet quadrilineum hyperbolicum OE1E1O ad datum rec-lum AOE, ut A1A diſtantia ordinatarum AB & 1A1B æqualium ordinatis OD, 1O1D ſcalæ elaſticitatis applicatis hyperbolæ OE, 1O1E, in directum poſitis, ad ſubtangentem *ah* log-micæ B1B2B. Nam, quia (ſecundùm hypotheſin) OE1E1O = rec-lo AC1C1A, erit quadrilineum OE1E1O : AO. OE = A1A. AC : AO. AC = A1A : AO = A1A : *ah*.

Corollarium X.

369. Quia altitudines Mercurii in barometro ſunt, ut preſſiones atmoſphæræ in diverſis ab horizonte diſtantiis, & preſſiones atmoſphæræ & elaſticitates aëris preſſiones illas ſuſtinentis, ſi elaſticitates denſitatibus aëris proportionales fuerint, ut quidem in corol-

 lariis

lariis 2, 3, 4, 5, & 6. hujus Propoſitionis ſuppoſuimus, altitudines Mercurii in barometro in locis A, 1A, 2A, &c. poſiti, erunt ut ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. in ſcalâ denſitatum B1B2B, ſi ſcilicet gravitas corporum uniformis, ſeu in omni à centro terræ O diſtantia eadem fuerit, ut tuto id aſſumere licet. Propterea datis quantitatibus Mercurii in barometro in locis A, 1A, & 2A exiſtente, & altitudine A1A; invenietur logarithmorum ope altera diſtantia ſeu altitudo A2A. Nam, quia A1A eſt ad A2A ut log-us rationis AB ad 1A1B, ad log-um rationis AB ad 2A2B; ſi log-us rationis AB: 2A2B ducatur in datam altitudinem A1A, & productum dividatur per log-um rationis AB: 1A1B; quotiens manifeſtabit altitudinem quæſitam A2A. Sin verò ex datis altitudinibus A1A, A2A & ratione AB: 1A1B quæratur ratio AB: 2A2B, ſeu ratio Mercurii in barometro collocato in A ad quantitatem Mercurii barometro exiſtente in 2A; log-us rationis AB: 1A1B tantum multiplicandus eſt per A2A & productum dividendum per A1A, & manifeſtabit quotiens log-um rationis quæſitæ AB: 2A2B, invento verò log-mo ipſa ratio ex tabulis uſualibus logarithmorum illicò innoteſcet.

Scholion.

370. Ut regula noni corollarii exemplo aliquo illuſtretur, ponatur altitudinem Mercurii in A ſeu AB eſſe 28. digitorum, & in altitudine loci 1A ſupra A, id eſt A1A, 63. pedum Mercurium una linea deficere, ita ut 1A1B tantum ſit 335. linearum, cum AB, ſeu 28. pollices, contineant 336. lineas. In altitudine vero A2A ſeu in loco 2A quantitas argenti vivi $16\frac{1}{3}$ lineis deficiat à quantitate in A ſeu AB, adeo ut 2A2B tantum ſit $319\frac{2}{3}$ lin. Quæritur in hisce datis altitudo A2A. Juxta canonem (§. 369.) log-us rationis AB: 2A2B ſeu nunc log-us $336:319\frac{2}{3}$ multiplicari debet per A1A ſeu 63. & productum dividi per log-um AB: 1A1B ſeu log. 336: 335, & quotiens indicabit quæſitum; atqui productum ex log. 336 — log. $319\frac{2}{3}$ in 63. diviſum per log. 336 — log. 335, præbet $1053\frac{1}{4}$, ergo hic numerus exprimit, quot pedum ſit altitudo quæſita. Hoc exemplum ſumſimus ex Mariotti *Tentamine De Natura aëris*, qui pag. 194. & 195. refert, Celeberrimum Caſſinum obſervaſſe olim in ſummitate alicujus Montis in Provincia Galliæ, cujus altitudinem diligenti dimenſione 1070. pedum invenerat, Mercurium barometri $16\frac{1}{3}$ lineis depreſſiorem fuiſſe, quam ad radicem montis ubi ad 28. digit.

digit. ſubſiſtebat, idcirco altitudo montis calculo noſtro elicita 17. circiter pedibus deficit ab obſervata 1070. pedum, ſed hæc differentia forte inde venit, quod cum Mariotto poſuimus in altitudine 63. pedum argentum vivum una linea deficere à Mercurio barometri in horizonte ad 28. digitos ſublato. Verùm ſi altitudinem in qua Mercurius una linea in barometro decreſcit, vel uno tantum pede major fiat, ſcilicet 64. pedum, calculus, juxta Canonem ſuperiorem ſubductus, præbebit altitudinem Montis $1069\frac{44}{95}$, adeò ut unica 95ma pedis ab obſervata altitudine deficiat.

371. Cl. Mariottus, etſi hypotheſin quod denſitates aëris viribus comprimentibus proportionales ſint, ſuam fecit, atque logarithmico calculo altitudines locorum ex argenti vivi differentiis eliciendas cenſuit, in calculo ſuo, eidem exemplo paragraphi præcedentis aptato, logarithmis tamen non eſt uſus, ſed faciliori quidem, minus exacto verò computo altitudinem montis elicuit 1080. pedum, idque ſequenti ratione. Quoniam atmoſphæræ preſſio in loco infimo æquivalet 28. digitis Mercurii ſeu 336. lineis, totam atmoſphæram in 336. partes æquiponderantes dirimit, quarum unaquæque unius lineæ Mercurii gravitationi æquipollet; ſed harum aëris partium altitudines inæquales erunt, adeo quidem, ut ea, quæ diviſioni 168. ſemiſſi ipſius 336. reſpondet, duplo altior ſeu major futura ſit quam infima altitudo 63. ped. primæ Mercurii lineæ verſus horizontem conveniens, atque adeo ſit 126. pedum; altitudinum ſeu partium atmoſphæræ differentias, ſingulis Mercurii lineis homologas, ſurſum creſcere fingit in arithmetica progreſſione, quam à geometrica, juxta quam incrementa partium fieri recte judicat, perparum abludere arbitratur; idcirco dividendo 63. per 168, ſecundæ atmoſphæræ diviſionis incrementum ſupra primam horizonti proximam reperit $\frac{63}{168}$, & ducendo 63. in $16\frac{1}{3}$, invenit 1029. ped. pro altitudine totali, ſeu montis altitudine, ſi modò ſingulæ atmoſphæræ diviſiones $16\frac{1}{3}$ lineis Mercurii reſpondentes æquales extitiſſent, verum quia creſcunt in proportione arithmetica, ideò omnia incrementa repertæ altitudini 1029. pedum adjicit; hunc in finem numerum 136. qui eſt aggregatum omnium numerorum naturalis progreſſionis 1, 2, 3. uſque ad 16. incluſive, ducit in $\frac{63}{168}$, & productum 51. ipſi exhibet ſummam omnium incrementorum, atque adeo hic numerus 51. alteri 1029. additus dedit ſummam 1080. exprimentem altitudinem montis quæſitam.

372. Cl. Maraldus atmoſphæram itidem in 336. partes æquiponderan-

derantes diſtinguit perinde ac Mariottus, & harum partium altitudines in progreſſione arithmetica creſcere fingit, agnoſcens tamen extenſiones aëris non eſſe præciſe in reciproca ratione ponderum incumbentium, ut Mariotti hypotheſis requirit, deinde etiam à Mariotti numeris diſceſſit, ſtatuens primam eamque horizonti contiguam atmoſphæræ partem gravitati unius lineæ Mercurii convenientem eſſe 61. pedum, & poſt hanc ſequentes creſcere juxta numeros 1, 2, 3, 4, &c. ita ut partes ſecunda, tertia, quarta, &c. futuræ ſint 62, 63, 64, &c. pedum. Hanc progreſſionem omnibus obſervationibus barometro factis ſuper diverſis Galliæ montibus, ſatis prope quadrare ſe deprehendiſſe indicat laudatus vir, cum protrahendæ inde ab Obſervatorio Regio per Meridionalem Galliæ partem Meridianæ Cel. Caſſino opus dirigenti operam ſuam juxta alios commodaret; atque adeo intra limites ſemiſſis Milliaris Gallici, quibus obſervationes ſuas terminari dicit, hujus progreſſionis beneficio locorum altitudines ſatis accurate haberi poſſe errore vix unam alteramque hexapodam excedente; ac juxta eandem progreſſionem altitudo atmoſphæræ foret 12796. hexapodarum, ſeu, quod idem fere eſt, 6. Milliarium Gallicorum cum ſemiſſe. Hæc Cel. Maraldi progreſſio calculo aptiſſima eſt, ſed cum obſervatione Caſſiniana, ex Mariotto ſupra §. 370. relata, non ſatis convenire videtur, nam altitudo ex omnibus $16\frac{1}{2}$ diviſionibus ſeu partibus compoſita invenietur eſſe 1122. pedum; & tamen altitudo montis inventa erat 1070, exceſſus eſt 52. pedum, ſeu plus quam 8. hexapodarum.

Ut autem certò conſtet, quantum hypotheſis partium atmoſphæræ uni Mercurii lineæ æquiponderantium, & juxta arithmeticam progreſſionem ſurſum creſcentium, conſpiret aut diſcrepet à Mariotti & Boylii Hypotheſi, quâ denſitates atmoſphæræ in diverſis locis ſunt, ut vires comprimentes ſeu elaſticitates aëris; quærenda prius eſt curva, cujus axis in partes arithmeticam progreſſionem conſtituentes diviſus ſit, ordinatæ verò per ſingulas axis diviſiones ductæ efficiant progreſſionem itidem arithmeticam, ſed deſcendentem; dehinc inventa hac curva, definienda eſt ſcala elaſticitatis aëris, & ex hac elicienda ſcala denſitatum atmoſphæræ. Huc faciunt ſequentia Problemata.

PROPOSITIO XXVII. Problema.

Fig. 89. 373. *Si axis, ſeu linea* AH, *diviſus ſit in partes* AC, C1C, 1C2C, &c. *arithme-*

arithmeticam progreſſionem aſcendentem conſtituentes, & per ſingularum terminos transeant ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, *&c. juxta progreſſionem arithmeticam decreſcentes, definire curvam* BD1D2D *per ſingularum ordinatarum terminos* B, D, 1D, 2D, *transeuntem.*

Per puncta D agantur parallelæ ipſi AH, & in prima DE producta ſumatur EF = DE, ac per F ducta FP parallela AB, in linea 1E1O à linea FP deorſum ponatur 1O1F æqualis exceſſui, quo ſecunda diviſio C1C primam AC, vel tertia ſecundam, ſeu quarta tertiam, atque ita deinceps, excedunt, ducaturque per puncta F & 1F, recta FG; eruntque AC = DE = EF, item C1C = 1E1F, & 1C2C = 2E2F, atque ſic porrò. Adeoque A2C = 2E2F + 1E1F + EF. Verùm 2E2F = rec-lo 2E2F. 2E1E : 2E1E, & 1E1F = rec-lo 1E1F. 1EE : 1EE; ergo quia 2E1E = 1EE = EB ex hypotheſi quandoquidem AB, CD, 1C1D, 2C2D (ſecundùm hypotheſin) ſunt in progreſſione arithmetica, erit 2E2F + 1E1F = (rec-lum K2E + rec-lo I1E) : BE; hæc vero rectangula ſimul ſumpta quotcunque eorum fuerint, æquantur trapezio EF2F2E ſimul cum triangulis IF1F, K1F2F, quæ ſunt extra trapezium EF2F2E, & dicta triangula ſimul æquantur rec-lo ſub dimidia 2O2F & 2E1E vel BE: ergo 2E2F + 1E1F = (EF2F2E + $\frac{1}{2}$. 2O2F. BE) : BE = EF2F2E : BE, + $\frac{1}{2}$. 2O2F; ac proinde A2C = EF2F2E : BE, + $\frac{1}{2}$. 2O2F + EF = 2E2F + 1E1F + EF; eodem argumento probatur eſſe indefinite A*c* vel *ed* = EF*fe* : BE, + $\frac{1}{2}$. *pf* + EF vel *ep*, vel biſecta *pf* in *q* ductaque per *q* rectâ F*q*Q, erit *ed* = EF*fe* : BE, + *pq* + *ep* = EF*fe* : BE, + *eq*; adeoque *ed*. BE = EF*fe* + *eq*. BE; atqui trapezium EF*fe* = rec-lo *eq*. *e*E; ergo *ed*. BE = *eq*. E*e* + *eq*. BE = B*e*. *eq*; hinc curvæ quæſitæ hæc eſt proprietas, ut *de* vel *c*A ubique ſit ad homologam *eq* ut B*e* ad BE, quæ proprietas parabolæ communi competit.

II. Nam ſi quædam T fiat ad EB, ſicut EM (quæ reſultat à concurſu M rectæ QF productæ cum recta AB itidem protenſa) ad EF; hinc erit etiam *eq* : *e*M (= EF : EM) = BE : T, curvæ vero modo recenſitæ proprietas exhibet *de* : *eq* = B*e* : BE, ergo ex æquo *de* : *e*M = B*e* : T, & *de*. T = M*e*. B*e* = $Ne^2 - NB^2$, biſecta ſcilicet BM in N; hinc *de*. T + $NB^2 = Ne^2 = rd^2$; & ſi V ſit tertia proportionalis ad T & BN erit T. V = BN^2, atque adeò *de*. T + T. V (= *de*. T + NB^2) = rd^2, idcirco, ſi in *r*N perpendiculari ad AB producta verſus S, ſumatur NR = V, erit T. R*r* = rd^2, atque adeò curva quæſita RBD1D eſt parabola, cujus parameter eſt T, & vertex in R; in quâ T eſt quarta proportionalis ad datas EF, EM

&

& EB, & V tertia proportionalis ad T & datam BN. Propterea parabola eſt ſpecie & magnitudine data, ejusque portio BD2DH quæſito ſatisfacit. Quod erat inveniendum.

Corollarium I.

374. Quoniam partes AC, C1C, 1C2C, &c. ſunt arithmetice proportionales, adeò ut earum differentiæ æquales ſint, ordinatæque AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. etiam juxta proportionem arithmeticam, id eſt, per æqualia decrementa imminuuntur, partes illæ AC, C1C, 1C2C, &c. repræſentabunt atmoſphæræ diviſiones, quarum unaquæque æquivalet ponderi columnulæ liquoris homogenei altitudinis BE, vel E1E, &c. in methodo Mariotti & Cl. Maraldi, ipſæque BE, E1E, &c. denotabunt æqualia decrementa liquoris in barometro adhibiti, ac denique ordinatæ AB, CD, 1C1D, 2C2D, &c. exponent quantitates Mercurii ſeu liquoris in barometro in locis, A, C, 1C, 2C, &c. verſante.

Corollarium II.

375. Quoniam in hypotheſi Mariotti denſitates aëris ponderibus incumbentibus proportionales ſunt, & quantitates argenti vivi in barometro æquivalent ponderibus aëri compreſſo in diverſis locis incumbentibus, & quoniam (§. 374.) ordinatæ *cd* exponunt quantitates argenti vivi in locis *c*, ſequitur (§. 355.) portionem parabolæ B2DH eſſe ſcalam denſitatum atmoſphæræ in ſuppoſitionibus Mariotti; & tamen ſupra (§. 366.) eſt oſtenſum, hanc ſcalam denſitatum in hypotheſi Mariottiana logarithmicam eſſe; ex quo liquet progreſſionem arithmeticam, quam Vir alioqui perſpicaciſſimus loco progreſſionis geometricæ facilioris calculi ergo aſſumſit, atque à geometrica parum abludere exiſtimavit, curvam ſuppeditare toto cœlo diverſam à log-mica, quam progreſſio geometrica in hypotheſi ejus, ipſo etiam conſentiente, adhibenda produxiſſet. Quoniam igitur, ſtantibus progreſſionibus à Celeb. viris Mariotto & Maraldo adhibitis, denſitates aëris viribus comprimentibus aut elaſticitatibus ejus nequeunt proportionales eſſe, diſquirendum ſupereſt, juxta quam denſitatum progreſſionem elaſticitates creſcant, vel, quod idem eſt, quæri debet ſcala elaſticitatum atmoſphæræ, quæ ubi data fuerit, ſcala denſitatum ultrò determinabitur.

PROPOSITIO XXVIII. Problema.

376. *Si in arabola* BDH *propoſitione præcedenti reperta* AC, A1C, A2C, &c. *deſignent altitudines locorum, & ordinatæ* CD, 1C1D, 2C2D *repræſentent quantitatem Mercurii barometro verſante in locis* C, 1C, 2C, &c. *invenire ſcalas elaſticitatis aëris & denſitatum.* Fig. 89.

In figura 90. ſint linea recta $am = AM$, $an = AN$, $ab = AB$, & $ad = Ae$, eritque $db = eB$, & ipſæ *bn*, *mn* reſpectivis BN & MN æquabuntur. Per punctum *b* agatur rectæ *ab* normalis *ib*, quæ ſit ad *mb* ut data recta A, quæ gravitatem uniformem exponit ad T parametrum parabolæ B2DH, linea recta *nih* jungens puncta *n* & *i* erit reciproca ſcalæ elaſticitatis, idcirco producendo *ib* in β & per hoc punctum ducendo hyperbolam *l*δβ intra aſymptotas *an* & *nk*, hyperbola iſta erit ſcala elaſticitatis aëris in ſuppoſitionibus Mariotti atque Maraldi, & applicando trapezium *bigd* ad datam rectam A, reſultabit altitudo *ed*, in cujus termino *d* denſitas aëris atmoſphæræ eſt ſicut αδ.

Demonſtr. I. Ducatur linea *mix* per puncta *m* & *i*, & hæc ſingulas *hu*, *gz*, &c. ipſi *ib* parallelas bifariam dividet in *x*, *y*, &c. ſi ſcilicet recta *iu* alteri *am* æquidiſtans ducta fuerit; hinc quælibet *yd* erit media arithmetica inter *gd* & *zd*, vel inter *gd* & *ib*, atque adeò rec-lum *bdy* æquabitur ubique trapezio homologo *bdgi*: quibus poſitis triangula ſimilia *mdy* & *mbi* ſuppeditant analogiam $md : dy$ ($= mb : bi$, conſtr.) $= T : A$, atque adeo $md.bd : dy.bd = de.T : de.A$. atqui cum *md* & *bd* in fig. 90. æquales ſint homologis M*e* & B*e* in fig. 89. & (§. 373, n. 11.) rec-lum $Me.Be = T.ed$, erit etiam $md.bd = de.T$; ergo æquabitur quoque rec-lum *dy.bd*, id eſt, ut paulo ante, dictum trapezium *bdgi*, cui rec-lum *bdy* æquale eſt, rec-lo A.*de* ex gravitate uniformi A in altitudinem alicujus loci *de*, & cum hoc ita ſit de reliquis, (§. 359.) linea *nih*, vel ejus portio *ih*, erit reciproca ſcalæ elaſticitatis aëris.

II. Propter hyperbolam *l*δβ habetur $b\beta : d\delta = nd : nb = gd : ib$, atque adeo ſingula rec-la, *gd*δ, *ib*β, *hal*, &c. ſunt æqualia, ac proinde (§. 357.) curva *l*δβ eſt ſcala elaſticitatis, cum lineam *ih* ejus reciprocam eſſe oſtenſum ſit.

III. Quia (num. 1. hujus) $ibdg = A.de$, erit $de = ibdg : A = bd.yd : A$, eritque adeò altitudo loci *d*, in quo denſitas eſt *d*δ, quarta proportionalis ad A, *bd* ſeu B*e*, & *yd*. eaque ſemper haberi poteſt, ac

 proin-

proinde ſcala denſitatis atmoſphæræ in hac hypotheſi ſemper per puncta deſcribi geometrice poterit. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

377. Patet iterum multum abeſſe, ut vires comprimentes aëris ejusve elaſticitates denſitatibus proportionales ſint, ſtante progreſſione arithmetica altitudinum AC, C1C, 1C2C æquivalentium æqualibus cylindris Mercurii aliusve liquoris homogenei, quorum altitudines exponuntur per BE, E1E, 1E2E, &c.

Corollarium II.

378. Denſitas aëris ad horizontem erit ad denſitatem ejus in extremitate atmoſphæræ ſicut $b\beta$ ad al, vel ſicut an ad bn, hoc eſt in altera figura (89.) ſicut AN ad BN vel MN.

Corollarium III.

379. Hinc ſi dicantur AC vel AP aut 1E1O, a; exceſſus ipſius 1E1F ſupra EF, hoc eſt 1O1F, e; tum $AB = b$, & $BE = E1E = l$, invenietur $BN = NM = 2al - el : 2e$, & $AN = b, + (2al - el) : 2e, = (2be + 2al - el) : 2e$; eritque proinde AN ad BN, hoc eſt, denſitas atmoſphæræ in horizonte ad denſitatem ejusdem in confinio atmoſphæræ totius ejusve termino, ut $2be + 2al - el$ ad $2al - el$. Igitur ſi in hac ratione generali cum Cel. Maraldo loco a, e, b & l ponatur 61, 1, 336 & 1, fiet AN ad BN ut 793 ad 121. Sin verò cum Mariotto ſint $a = 63$ ped., $e = \frac{63}{168}$, $b = 28$ poll. $= 336$ lineis & $l = 1$ lin. erit $2be + 2al - el$ ad $2al - el$, ut 1007 ad 335 ſeu quam proxime in ratione tripla.

Scholion.

380. Liquet igitur, in ſuppoſitionibus D. Maraldi, aërem prope horizontem non ſeptuplo denſiorem eſſe aëre in termino atmoſphæræ, nec Mariotti ſuppoſitiones eundem quadruplo denſiorem facere ad horizontem, quam ſit in ſummitate atmoſphæræ, & tamen omni illic elaſtica virtute deſtitui oportere; quandoquidem nihil ipſi incumbit, quod ejus expanſionem, ſi quam haberet, impedire valeat; quod procul omni dubio paradoxum eſt. Nam ſi experimentis

mentis Academiæ Florentinæ *Del Cimento*, Roberti Boylii, aliorumque conſtat, aërem vi elaterii 60^{es}, 152^{es} imo & millies rariorem fieri poſſe, quam in ſtatu naturali, quî fit, ut in ſuppoſitionibus Maraldi non ſepties, in Mariotti verò non quidem quater rarior in ſummitate atmoſphæræ quam in ſtatu naturali, omni vi elaſtica deſtituatur? Verum quidem eſt, Clariſſ. Maraldum non ultra extenſionem ſemiſſis Milliaris Gallici progreſſionis ſuæ periculum feciſſe, nec adeò ulterius eam extendi debere, expreſſe monuiſſe.

PROPOSITIO XXIX. Problema.

381. *Si ſcala elaſticitatis aëris* A1DD *fuerit hyperbola communis inter aſymptotas* FPQ *angulum rectum continentes, atque ſingula rectangula* EOD, 1E1O1D *dato rectangulo* PFA *æqualia fuerint, quæritur reciproca linea* E1E *ſcalæ elaſticitatum, & ſcala denſitatum atmoſphæræ* B1B *in ſuppoſitione gravitatis uniformis ſeu conſtantis, cujus ſcala ſit* C1C *axi* A1A *parallela.* Fig. 91.

In recta indefinita AM ſumatur AI æqualis datæ AF, ductaque per punctum I recta IT parallela AO, intra lineas MI & IT tanquam aſymptotas deſcripta intelligatur hyperbola E1E, ita ut quodlibet in ea rec-lum ILE æquetur quadrato datæ AI; eritque hæc hyperbola E1E reciproca ſcalæ elaſticitatis A1DD; adeò ut facto rec-lo AC1C æquali quadrilineo OE1E1O, denſitas aëris in loco 1A futura ſit per §. 359, 1O1D vel 1A1B.

Demonſtr. Quia (ſecundùm hypotheſin) EO. OD = FP. FA, erit EO : FA ſeu LO = FP : OD ſeu FG, ergo convertendo EO : EL = FP : GP (id eſt propter hyperbolam A1DD) = GD ſeu FO : FA, ac dividendo LO : EL = AO vel IL : AF ſeu AI vel LO : ergo rec-la extremorum & mediorum æquabuntur, id eſt $LO^2 = AI^2 = IL. LE$, atque adeò punctum E eſt in hyperbola E1E inter aſymptotas MI & IT; ac propterea reciproca ſcalæ elaſticitatis in præſenti hypotheſi eſt hyperbola communis. Hinc, ſi rectangulum quoddam A1C cuilibet in hac hyperbola quadrilineo O1O1EE æquale factum, atque linea 1C1A protenſa ad alteram axis partem 1A1B æqualis facta fuerit ordinatæ 1O1D, punctum 1B (§. 359.) erit in ſcala denſitatis atmoſphæræ B1B. Quæ erant demonſtranda.

 Scho-

Scholion.

382. Hoc problema eſt tantum applicatio theorematis noſtri generalis, ſupra (§. 359.) exhibiti, hypotheſi particulari, quam Propoſitione 23. hujus excuſſimus; quoniam in ſuperioribus jam vidimus, denſitates aëris viribus comprimentibus non ſemper proportionales exiſtere; ſed præſentem hypotheſin cum obſervationibus propius conſpirare. Cæterum liquet etiam, quod, quia ſcalæ denſitatum reciproca E1E etiam eſt hyperbola, perinde ac in hypotheſi denſitatum viribus comprimentibus proportionalium, hoc ſolo cum diſcrimine, quod in hac hypotheſi ejus aſymptota una ſit ipſa AO, in præſenti verò recta IT, modo nominatæ AO æquidiſtans, linea ſeu ſcala denſitatum B1B ope log-micæ cujusdam per puncta deſcribi poſſit. Nam ad aſymptotam AM ducta per punctum L logarithmica L1SS, cujus ſubtangens ſit æqualis AI, perinde ac AC, quæ gravitatem uniformem exponit, fiat recta LR angulum ſemirectum ILR continens cum IL, atque ipſam 1L1D ſecans in 1R; ſi C1C conſtanter æqualis fiat ipſi 1R1S interceptæ inter log-micam L1SS & rectam L1RR, atque per punctum 1C ducta indefinita 1C1B in ea ultra axem abſcindatur, ut prius 1A1B æqualis ordinatæ 1O1D in ſcala denſitatum atmoſphæræ B1B. Hisce diu nonnihil inſtitimus, quia cognitio denſitatum atmoſphæræ utilitate ſua non caret; nam præterquam quod accuratiſſimus haberetur modus menſurandarum altitudinum montium aliorumque in ſuperficie terræ altiorum objectorum ope barometrorum, cognita lege, juxta quam denſitates atmoſphæræ ſurſum decreſcunt, accuratius innoteſceret linea in quam radii ſolares ſiderumve atmoſphæram trajicientes incurvantur, quod utique utilitatem haberet eximiam in aſtronomicis. Cæterum difficillimum, ſi non impoſſibile, eſt à priori noſcere quamnam denſitates atmoſphæræ cum ponderibus incumbentibus collatæ, legem ſequi debeant propter mille anomolias, quæ in atmoſphæra contingunt, idcirco res ex obſervationibus bene multis & diligenter inſtitutis derivari debet modo ſequenti.

383. In recta quadam indefinita abſcindantur lineæ eandem inter ſe proportionem habentes, quam altitudines locorum diligentiſſime obſervatæ, & per ſingula diviſionum puncta agantur perpendiculares eandem inter ſe proportionem habentes, quam quantitates Mercurii in barometro in prædictis locis verſante, & ſic tot habebuntur

tur puncta, quot ſunt obſervatæ locorum altitudines, per quæ puncta proinde duci poteſt linea quædam regularis eo prorſus modo, quem Celeb. Newtonus Lemm. V. Lib. III. *Pr. Ph. Math.* absque ulla demonſtratione exponit; & talis curva apta nata eſſet ad exprimendam relationem, quæ eſt inter altitudines locorum & argenti vivi quantitatem barometro ſucceſſive in his locis verſante. Ex hac curva elici poteſt linea reciproca ſcalæ elaſticitatum, & ex figura hujus ſcalæ reciproca deduci poteſt ipſa ſcala elaſticæ virtutis in aëre; dehinc, ope theorematis noſtri §. 359. ipſa etiam ſcala denſitatum atmoſphæræ per puncta deſcribi poteſt. Verum multis obſervationibus opus eſt, quia, quo plura ſunt puncta poſitione data; eo accuratius definietur ipſa curva, de qua ante dixi; quomodo verò calculus ſubducendus ſit pro hac curva aliàs commodius aliquando dicetur, quando demonſtrationem præfati V. Lemmatis Newtoniani demonſtratum dabimus cum aliis nonnullis affinibus materiis.

SECTIO II.

De Motibus Aquarum.

IN Sectione præcedenti preſſiones tantum fluidorum ex gravitate, quas tum in ſubjecta plana tum etiam in vaſorum latera exercent, contemplati ſumus. In hac vero ſecunda Sectione, quæ ad motus liquorum per foramina, utlibet vaſis inſculpta, erumpentium pertinent, breviter excutiemus. Hoc argumentum utilitate ſuâ celeberrimis Geometris Caſtello, Baliano, Torricellio, Borellio, Mariotto aliiſque ſe probavit, atque ab ipſis diligenter nec ſine fructu examinatum eſt quidem, non verò exhauſtum, quandoquidem Cel. Gulielminus ipſorum repertis nonnulla adjecit; ipſorumque, maxime verò Torricellii, doctrinam motui fluminum ingenioſe applicuit. Nemo tamen hanc materiam adeò generaliter pertractavit ac Celeb. Varignonius, qui præclara atque univerſalia exhibuit theoremata, quibusvis liquoribus applicabilia, & quæ hac in re aſſequutus eſt, velut Iliada nuci, ſimplicibus formulis incluſit.

CAPUT IX.

De motibus Liquorum per minora foramina erumpentium.

PROPOSITIO XXX. Theorema.

Fig. 92. 384. *Quantitates, ſeu filamenta liquorum, æquali tempore per quælibet orificia æquabili motu effluentia, ſunt in compoſita ratione ex rationibus orificiorum & velocitatum, quibus liquores, quisque per ſuum foramen, erumpunt.*

Sint DEF, GH vaſa quælibet foraminibus quibuslibet K & I pertuſa, exeantque dato quodam tempusculo motu uniformi filamentum KN ex vaſe DEF & filamentum IO ex vaſe GH, ita tamen, ut ſuperne tantum liquoris reſtituatur, quantum effluit, atque adeo in utroque vaſe liquor in eadem altitudine conſtanter conſervetur; & hisce poſitis ultro liquet longitudines filamentorum KN & IO utpote æquali tempore uniformi motu deſcriptas, velocitatibus aquæ ex foraminibus K & I erumpentis proportionari, vel potius has velocitates repræſentare. Ex Geometriæ vero elementis conſtat, ipſa filamenta eſſe in compoſita ratione foraminum K & I tanquam baſium prismatum, & longitudinum KN & IO, id eſt, velocitatum, quibus hæ longitudines deſcribuntur, quare conſtat Propoſitum.

PROPOSITIO XXXI. Theorema.

Fig. 92. 385. *Quantitates motus, ſeu impetus liquorum quorumcunque & per quævis foramina erumpentium, ſunt in ratione compoſita ex rationibus duplicata celeritatum, ſimpla denſitatum ſeu gravitatum ſpecificarum liquorum, & denique ſimpla foraminum.*

Ex vaſis ABC & DEF erumpant eodem vel æquali tempore, per foramina B & K filamenta BM & KN, quorum longitudines celeritates exponent, quibus hæc filamenta e vaſis egrediuntur. Gravitas ſpecifica, ſeu denſitas liquoris in vaſe ABC exponatur per magnitudinem R, denſitasque liquoris DEF per S. In KN ſumatur tertia proportionalis ad BM & KN & ſit ea KV, & probari debet, quantitatem motus filamenti BM ſe habere ad quantitatem motus filamenti KN ut $B.BM^2.R$ ad $K.KN^2.S$, aut propter rectas BM, KN, KV continue proportionales, ſicut B.BM.R ad K.KV.S.

De-

Demonſtr. Quoniam per quantitatem motus alicujus corporis intelligitur factum ex maſſa hujus corporis in celeritatem, qua id fertur, erunt quantitates motus filamentorum BM & KN in compoſita ratione ex rationibus maſſæ ad maſſam, & celeritatis unius ad celeritatem alterius, ſunt verò maſſæ BM & KN inter ſe (§. 18.) ut volumina BM & KN, id eſt, ut facta B.BM & K.KN ducta in denſitates liquorum, ſeu (§. 33.) in gravitatem eorundem ſpecificam R & S; velocitates verò ſunt ut longitudines BM & KN, eſt ergo quantitas motus filamenti BM, quam ſimpliciter ejus motum deinceps dicemus, ad motum filamenti KN, ut $R.B.BM^2$ ad $S.K.KN^2$, hoc eſt, ſicut R.B.BM ad S.K.KV. Quod erat demonſtrandum.

Literæ B & K denotant orificia Vaſis ABC & DEF quomodocunque inſculpta.

PROPOSITIO XXXII. Theorema.

386. *Velocitates liquorum quorumlibet ſunt in ſubduplicata ratione altitudinis liquorum ſuper orificiis, per quæ erumpunt, ſi liquorum ſuperficies eandem ſemper, durante effluxu, poſitionem ſervarint.* Fig. 92.

Iisdem poſitis, quæ in præcedenti, ſint BQ & KD liquorum altitudines, & ſumatur Kβ media proportionalis inter QB & DK, probari debet fore $BM : KN = BQ : K\beta = \surd BQ : \surd KD$.

Demonſtr. Motus ſunt ut eorundem cauſæ genitrices, & hæ cauſæ ſunt preſſiones liquorum foraminibus incumbentium, atqui gravitatio liquoris QB (§. 255.) æquivalet ponderi columnæ BQ.B, & (§. 33.) ejus pondus eſt ut factum ex volumine in gravitatem ſpecificam R, adeoque B.BQ.R eſt ut gravitatio filamenti QB, & K.KD.S propter eandem rationem erit ut gravitatio filamenti DK, adeoque gravitatio QB: gravit. DK = B.BQ.R : K.KD.S, unde, cum gravitatio QB ſit ad gravitationem ſeu preſſionem DK, ut motus BM ad motum KN, erit B.BQ.R : K.KD.S = motus BM : mot. KN (§. 385.) = B.BM.R : K.KV.S, adeoque BQ : KD = BM : KV, atqui eſt ratio BQ ad KD duplicata rationis BQ ad Kβ, & BM : KV duplicata rationis BM : KN, ergo $BQ^2 : K\beta^2 = BM^2 : KN^2$, & $BQ : K\beta = BM : KN = \surd BQ : \surd KD$. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio generaliter obtinet, ubicunque foramina B, K vaſis inſculpta fuerint in fundo vel ad latera vaſis, abſtrahendo tamen à frictionibus, quas liquores in foraminibus exeundo ſubeunt, aliisque motus impedimentis, ut reſiſtentiâ aëris, &c.

Co-

Corollarium.

387. Quoniam quantitates liquorum ſimul effluentes BM & KN (§. 384.) ſunt in compoſita ratione ex rationibus foraminum B & K & velocitatum, hæ quantitates erunt in compoſita ratione ex ratione foraminum, & ſupduclicata ratione altitudinis liquorum in vaſis, abſtrahendo à denſitatibus liquorum exeuntium; nam quantitates abſolutæ filamentorum BM & KN ſeu maſſæ eorundem, ſunt in compoſita ratione ex ſubduplicata altitudinum BQ & KD, ex ſimpla denſitatum R & S, & denique ex ſimpla itidem foraminum B, K.

Scholion.

388. Celeberrimus Varignon in Comment. Acad. Reg. Scient. 1703, 14 Nov. velocitates liquorum erumpentium in circumſtantiis hujus propoſitionis demonſtrat eſſe, ut radices ex factis altitudinum in ſpecificas gravitates liquorum, diviſis per denſitates homologas, quod cum præſenti proportione probe conſpirat, cum (§. 33.) denſitates gravitatibus ſpecificis liquorum directe proportionales ſint.

PROPOSITIO XXXIII. Problema.

389. *Definire quantum liquoris effluere debeat ex dato vaſe per datum foramen tempore dato, ſi liquor vaſis conſtanter in eadem altitudine data conſervetur.*

Sint data altitudo liquoris a, foramen vaſis f, tempus datum t, m ſpatium quod grave accelerato motu, alio dato tempore d, perlabitur. Jam, quia tempora deſcenſuum gravium (§. 151.) ſunt in ſubduplicata ratione ſpatiorum confectorum, erit $\sqrt{m}:\sqrt{a}=d:n$, ubi n denotat tempus, quo grave altitudinem a accelerato motu cadendo abſolveret, adeoque $n=d\sqrt{a}:\sqrt{m}$. Jam quia liquor ea velocitate effluit, quam grave caſu ex altitudine a acquirere poteſt, &, hac velocitate ſemel acquiſita, duplum ſpatium deſcribit æquabili motu eo tempore n, quo accelerato motu ſimplex a percurrebatur; filamentum liquoris hoc tempore n, æquabiliter effluens celeritate æquali, quam grave acquirit ex caſu accelerato ex altitudine a erit $2af$. Unde ſi tempore n effluit filamentum liquoris $2af$, tempore t effluet

effluet filamentum $2aft:n$ vel ſubſtituendo $d\sqrt{a}:\sqrt{m}$ pro n, quantitas $2aft\sqrt{m}:d\sqrt{a}=2ft\sqrt{(am)}:d$. Quod erat inveniendum.

Scholion.

390. Dicatur quantitas liquoris dato tempore t per foramen f effluens x, ſitque foramen circulus diametri e; eritque $f=\pi ee:4\delta$, qui valor ſubſtitutus in $x=2ft\sqrt{(am)}:d$ exhibet $x=\pi ftee\sqrt{(am)}:2\delta d$, ponendo $\delta:\pi$ pro ratione diametri ad circumferentiam circuli.

Exempl. Quæritur quantum aquæ effluere debeat ex vaſe cylindrico indeſinenter pleno 15 ped. 5 poll. 7 lin. alto, per foramen circulare in fundo pollicis unius in diametro, tempore 6 ſecundorum. Erunt ergo $a=15$ ped. 5 poll. 7 lin. $t=6''$ $e=1$ poll. $=12$. lin. $\delta=113$ & $\pi=355$. Jam, cum Hugenius obſervarit grave aliquod altitudinem 15 ped. & 1 poll. tempore minuti ſecundi perlabi, d ſignificare poteſt $1''$, & m, 15 ped. 1 poll. ſeu 2172 lin. Loco literarum adhibendo numeros hactenus indicatos & operationem logarithmis perficiendo invenietur log-mus x, ſeu quantitatis $\pi ftee\sqrt{(am)}:2\delta d=6.4811958$ log-us numeri quæſiti in lineis cubicis; idcirco ſi ex hoc log-mo log-us ipſius 12 triplicatus, ſeu log-us cubi ex 12, auferetur, remanebit log. $x=3.2436522$ log-us numeri quæſiti in pollicibus cubicis expreſſi, cui log-mo convenit proxime numerus 1752 ergo tot pollicum cubicorum erit aqua effluens ex vaſe 6 ſecundis temporis, vel unius pedis cubici, & 24 pollicum.

391. Viciſſim ex aquæ quantitate tempore dato effluente & obſervatione data elicietur altitudo vaſis, ad id requiſita, ut quocunque alio tempore determinata quædam aquæ copia effluat, nam ex formula ſuperiore $x=\pi feet\sqrt{(am:)}2\delta d$ elicietur $a=4\delta\delta ddxx:\pi\pi ffe^4ttm$, in qua excepta a omnes reliquæ ſunt quantitates datæ.

PROPOSITIO XXXIV. Theorema.

392. *Si ex vaſe quocunque liquore pleno* BAD *liquor per foramen* F *effluat, & circa lineam* AC *liquoris ſuperficiei* BD *normalem deſcripta ſit parabola* EGS, *verticem ſuum habens in puncto* E *tantum diſtanti à liquoris ſuperficie quantum foramen vaſis* F, *& curvæ* AID *ac* OMN *ejus indolis, ut ſingula rectangula ſub data recta* V *& ordinata* HI *curvæ* AID, *tum etiam ſub ordinatis* GH *parabolæ &* HM

 curvæ

curvæ OMN *æqualia ubique ſint ſectioni vaſis reſpectivæ* KL, *dico fore* I°. *ut tempus deſcenſus ſuperficiei* BD *in* XX *per ſpatium* CY *ad*
Fig. 93. *tempus deſcenſus in* KL *per ſpatium* CH *ſit, ut area* COZY *ad aream* COMH. II°. *Ut velocitas ſuperficiei* KL *ſit in compoſita ratione ex directa ordinatæ parabolæ* GH, *& reciproca ordinatæ* HI *curvæ* AID, *id eſt*, *ut* GH : HI.

Demonſtr. Quia in parabola eſt PC : GH = $\surd$EC : $\surd$EH (§. 386.) = velocitas liquoris effluentis ſub altitudine EC ad celeritatem effluentis ſub altitudine HE; ideò, ſi PC exponat celeritatem illius liquoris, qui habet altitudinem EC ſuper foramen F, ordinata GH exponet celeritatem, qua filamentum liquoris indefinite parvum FH tempuſculo itidem indefinite exiguo erumpit, exiſtente liquoris altitudine ſuper foramen F linea EH. Sed eo tempuſculo, quo effluit filamentum FT, ſuperficies KL deſcendens ſpatiolo infiniteſimo Hh ſe demittet in kL, ita quidem ut duo priſmata ſub ſectione KL & altitudine Hh, & FT neceſſario æqualia ſint, unde quia (conſtr.) ſectio KL = GH. HM, erit GH. HM. Hh = F. FT, vel HM. Hh : F = FT : GH. Atqui FT, ſeu longitudo filamenti, applicata ad celeritatem, qua id effluit æquabili motu, exponit tempus effluxus hujus filamenti, ſeu ſynchroni deſcenſus ſuperficiei KL ex hoc ſitu in kl per ſpatiolum Hh, ergo etiam HM. Hh : F exponit hoc idem tempuſculum deſcenſus, & omnia rectangula HM. Hh, quæ in area CHMO continentur: ſeu hæc ipſa area, diviſa per F, exponet tempus deſcenſus ſuperficiei KL ex BD in KL per ſpatium CH; eodemque argumento colligitur tempus deſcenſus BD in XX per ſpatium CY exponi area CYZO, diviſa per F; ergo tempus per CH : tCY = CHMO : CYZO. Quod eſt primum.

II°. Quia velocitas ſuperficiei KL eſt ad velocitatem GH filamenti FT, ut Hh ad FT, hoc eſt, ob æqualitatem priſmatis ex KL in Hh & priſmatis ex F in FT, ſicut F ad planum KL, quod (conſtr.) æquatur rectangulo V. HI, erit velocitas ſuperficiei KL ad GH = F : V. HI, atque adeo cel. ſuperficiei KL = F. GH : V. HI, id eſt, omiſſa ratione conſtanti F : V, quæ proportiones indeterminatarum magnitudinum non alterat, velocitas ſuperficiei KL eſt ut GH : HI. Quod erat ſecundum.

Corollarium I.

393. Si itaque area tota COMNNE dividatur in quadrilinea æqua-

æqualia CYZO, YHMZ, HMNNE, aut quamcunque aliam inter ſe rationem habentia, tempora deſcenſus ſuperficiei liquoris BD per ſpatia CY, YH, HE aut æqualia, vel aliam inter ſe datam rationem, quam habent homologæ areæ. Atque hinc liquet, quodlibet vas adhiberi poſſe loco clepſydræ, dummodo figura ECOMN figuræ vaſis conveniens in ſuas partes æquales diviſa fuerit per lineas ſuperficiei horizontali aquæ BD parallelas, atque diviſionum puncta in latere vaſis rite notata fuerint. Sed hisce diutius non immorabor, quandoquidem Celeb. Varignon hoc argumentum pene exhauſiſſe videtur in Comment. Reg. Scient. Pariſ. Academ. 1699, 29 Apr.

Corollarium II.

394. Pariter datis curvis EGP, OMN dabitur tertia AID, atque adeo curva BKALD genitrix vaſis, idque ex ſectione KL = V. HI = GH. HM. Adeoque, ſi vas ſit ſolidum rotundum ex converſione figuræ BAD circa axem CA, vel etiam ſi ſingulæ vaſis ſectiones BD, KL, &c. figuræ ſimiles & ſimiliter poſitæ fuerint, ordinatæ HI erunt, ut quadrata ordinatarum homologarum KL.

Corollarium III.

395. Idcirco, ſi quæratur vas BAD tale, ut deſcenſus CY ſuperficiei liquoris BD ſint ut tempora deſcenſus, erit curva OMN hoc caſu linea recta axi AR parallela, unde cum planum KL, ſeu circulus ex diametro KL æquatur rec-lo GHM, erit quadratum ex KL ut rec-lum ex HG in datam HM, vel ſimpliciter ut GH, vel quadrato-quadratum rectæ KL ut quadratum HG, unde cum hoc quadratum ſit ut abſciſſa HE, erit quadrato-quadratum ut HE, atque adeo curva quæſita BAD erit parabola biquadratica. Ut ab aliis ſæpius jam demonſtratum eſt.

In hisce areæ CYZO, CHMO tantum proportionem temporum indicant, quibus ſuperficies liquoris BD ſpatia CY, CH deſcendendo deſcribit. Sed ſi tempus abſolutum ſit definiendum, quo quilibet deſcenſus contingit, conſuli debet ſequens

PROPOSITIO XXXV. Theorema.

396. *Si parabolæ* EGS *parameter æqualis fuerit altitudini* RE, *quam grave, caſum à quiete in* R *incipiens, motu naturaliter accelerato perlabi*

poteſt

poteſt uno minuto ſecundo temporis, poſitisque omnibus, quæ in Propoſitione præcedenti, numerus minutorum ſecundorum, quibus ſuperficies BD *ſpatium* CH *cadendo conficit, æquabitur numero, qui oritur ex diviſione areæ* CHMO *per duplum foraminis* F.

Si liquor conſtanter maneret in altitudine ER, ejus prima gutta, prope foramen F, ea celeritate erumperet, qua motum in altum convertens tempore eodem minuti ſecundi per altitudinem ER aſcendere poteſt, quo cadendo eandem celeritatem acquirit, atque gutta erumpens motum ſuum uniformem proſequens hoc tempore deſcribet ſpatium duplum ipſius ER, unde cum effluentis liquoris particulæ contiguæ ſint, tempore unius minuti ſecundi effluet per foramen F filamentum 2F.RE, & ſi liquor maneret in altitudine HE per idem foramen effluet tempore, quod ſe habet ad unum minutum ſecundum in ſubduplicata ratione HE ad RE, id eſt, in ratione GH ad SR, filamentum 2F. HE; unde ſi maſſa liquoris 2F. HE effluit tempore (GH : SR) quanto tempore effluet maſſa KL. H*h* (conſtr.) $=$ GH. HM. H*h*? Id per regulam auream invenietur fieri tempore GH^2. HM. H*h* : 2F. HE. SR; jam quia RS vel RE eſt parameter parabolæ, atque adeò GH^2 æquale rec-lo HE. SR, erit tH*h* $=$ HM. H*h* : 2F. ergo tCH $=$ areæ CHMO : 2F, id eſt numerus ſecundorum temporis, quo liquoris quantitas BKLD per foramen F effluit, præſcindendo à frictionibus aliisque motus impedimentis, reperietur, applicando aream homologam CHMO ad duplum foraminis F. Quod erat inveniendum & demonſtrandum.

Aliter & brevius.

397. Supra (§. 392. n. 1.) incidimus in hanc analogiam HM. H*h* : F $=$ FT : GH, unde duplicatis conſequentibus provenit HM. H*h* : 2F $=$ FT : 2GH. Atqui FT : 2GH indicat particulam minuti ſecundi temporis, qua filamentum FT vel ei æqualis maſſa KL. H*h* vel K*kl*L effluit. Nam 2RE vel 2RS exponere debet velocitatem acquiſitam tempore unius minuti ſecundi ex lapſu gravis per altitudinem RE, quia hæc altitudo duplicata 2RE diviſa per celeritatem 2RE, dat I, ſeu unum minutum ſecundum, & quia velocitates & deſcenſu per RE & HE acquiſitæ & hiſce æquales celeritates, quibus aqua per foramen F erumpit, exiſtente ea in vaſe in altitudinibus RE & HE manentibus, ſunt in ſubduplicata ratione RE

ad

ad HE ſeu SR ad GH, id eſt, 2SR vel 2RE ad 2GH; hæ enim SR & ER æquales ſunt, cum RE (ſecundùm hypotheſin) parameter ſit parabolæ, unde cum 2SR exponat celeritatem aquæ erumpentis ſub altitudine RE, altera 2GH exponet celeritatem aquæ erumpentis ſub altitudine HE, hinc filamentum FT æquabili motu effluens, applicatum ad ſuam celeritatem 2GH, exponit tempus effluxus hujus filamenti, ſeu tempus effluxus maſſæ liquidæ HklL, id eſt, $tHh = FT : 2GH$, & cum ſupra inventum ſit $HM . Hh : 2F = FT : 2GH$, erit $tHh = HM . Hh : 2F$; atque adeò $tCH = CHMO : 2F$, ut ſupra. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

398. Ergo præſens propoſitio ex antecedenti facile elicitur parametro parabolæ EGS tantum eum valorem aſſignando, quem Propoſitio indicat, & ſemper continget, ut areæ CYZo, &c. applicatæ ad duplum foraminis præbituræ ſint tempora minutis ſecundis expreſſa, quibus homologæ liquoris quantitates effluere debent.

Propositio XXXVI. Theorema.

399. *Si liquor ex vaſe amplo & conſtanter pleno* ADC *effluat per lumen* EGHF *plano* BDIC *horizonti utcunque obliquo inſculptum, deſcripta circa axem* BD *parabola* BLO, *cujus parameter* P *ſit ad lineam* A, *quam grave quoddam dato tempore* t *motu a quiete incipiente, ſed naturaliter accelerato, perlabi poteſt, ut ſinus anguli* ABD *inclinationis planorum* ABC, *&* BDI *ad ſinum totum, hoc eſt, ſicut* RG *ad* BG; *quantitas* Q *liquoris tempore quolibet dato* T *per lumen illud* EGHF *effluentis exponetur fruſto* EIKMLGHFE *priſmatis parabolici* BDOPMNV *ducto in duplum exponentis rationis temporum, hoc eſt in* $2T : t$. Fig. 94.

Quia manente vaſe liquoris pleno, per quodlibet punctum phyſicum G ſectionis ſeu luminis EGHF filamentum liquoris 2RG effluere debet æquabili motu, tempore eo, quo grave quoddam altitudinem RG accelerato motu deſcendens conficere poteſt, & quia tempora deſcenſus gravium ſunt in ſubduplicata proportione ſpatiorum, juxta ea quæ articulo 151. oſtenſa ſunt, erit tempus deſcenſus gravis in altitudine A, quod tempus nominatum eſt t, ad tempus per altitudinem RG, ſicut $\sqrt{A}$ ad $\sqrt{RG}$; vel ſicut A ad $\sqrt{(A . RG)}$ $= \sqrt{(P . BG)}$

$=\surd(P.BG)$ quandoquidem *A : P = BG : RG, vel ſicut A ad GL ob parabolam BLO, in qua eſt $GL=\surd(P.BG)$; adeoque tempus deſcenſus per altitudinem RG alicujus gravis reperitur eſſe GL. t : A. Jam, quia hoc tempore punctum G effundit filamentum liquoris 2RG, idem punctum effundet tempore T, filamentum 2A. T. RG : GL. t = 2T. GL²: GL. t = 2T. GL. t. Similiter punctum phyſicum F effundet, eodem tempore T, filamentum 2T. FK : t, atque ſic reſpective reliqua luminis puncta. Igitur quantitas Q liquoris per univerſum lumen GEFH dato tempore T effluentis eſt factum ex omnibus GI, FK, &c. quæ in ſolido EILMKFHGE continentur in 2T : t; id eſt, factum ex hoc ſolido in 2T : t. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

400. Si planum BDI lumine EGH pertuſum, rectum fuerit horizonti, rectæ BG & RG, atque adeo P ac A æquales fient; adeo ut magnitudo ipſa, ſeu ſpatium A, quod grave tempore *t* accelerato motu à quiete incepto percurrere poteſt, parameter ſit parabolæ BLO.

Corollarium II.

401. Dicantur porrò ſinus anguli RBG, *i*; ſinus totus *r*, parabolæ BLO parameter *p*, qui antea P nominabatur, ſimiliterque longitudinem A litera *a* inſigniat, fiantque inſuper $GE=b$, $GH=c$, $BG=z$, $BE=x$, eruntque $EI=\surd px$ & $GL=\surd pz$, adeoque quadrilineum parabolicum EGLI, ſeu trilineum BLG − trilineum BIE $=\frac{2}{3}z\surd pz-\frac{2}{3}x\surd px$ (id eſt, ſi ad contrahendam formulam pro $\frac{2}{3}z\surd z-\frac{2}{3}x\surd x$ ponatur *u*) $=u\surd p$, adeoque ſolidum $EKLGF=cu\surd p$, adeò ut ſit $Q=2Tcu\surd p:t$.

Corollarium III.

402. Sed, ſi ipſæ BG, BE datæ non ſint, ſed earum tantum proportio, quæ ſit eadem cum *m* ad 1, ſolidum parabolicum præcedente paragrapho inventum habebitur in ſolis quantitatibus *b*, *c*, & *m*. Nam quia (ſecundùm hypotheſin) $z:x=m:1$ erit $z=mx$ & $z\surd z-x\surd x=mx\surd mx-x\surd x=(m\surd m,-1)$ in $x\surd x$. Sed $z-x=mx-x=b$, ſeu $x=b:m-1$, & $x\surd x=b\surd b:m-1\surd(m-1)=b\surd b:n\surd n$ ſi

ſci-

ſcilicet loco $m-1$ ponatur n. ergo $z\sqrt{z}-x\sqrt{x}=(m\sqrt{m},-1).b\sqrt{b}:n\sqrt{n}$. Hinc u ſeu $\frac{2}{3}z\sqrt{z}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}=(\frac{2}{3}m\sqrt{m}-\frac{2}{3}).b\sqrt{b}:n\sqrt{n}=(2m\sqrt{m},-2).b\sqrt{b}:3n\sqrt{n}$.

Scholion.

403. Sed, quia A vel a denotat altitudinem, quam grave quoddam accelerato motu à quiete incepto cadendo deſcribere poteſt tempore dato t, & quia propter frictiones aliaque impedimenta fieri nequit, ut filamenta fluidi eodem tempore effluentia per puncta phyſica G, E, F, &c. præciſe dupla ſint altitudinum GR, EQ, EQ, &c. ideo propoſitio Mathematica eſt potius quam Phyſica. Etſi enim ſcitur quantam oporteat eſſe altitudinem A tempore unius minuti ſecundi, vel quolibet alio à gravi decidenti in vacuo deſcribendam, non tamen in praxi talem altitudinem adhibere licet, quandoquidem ab omnis generis reſiſtentiis abſtrahere non ſemper convenit, ſed dicta altitudo A ex phænomenis eſt elicienda ſequenti modo:

PROPOSITIO XXXVII. Problema.

404. *Iisdem poſitis, quæ in præcedenti Propoſitione, invenire magnitudinem* A, *atque adeò parametrum* P *parabolæ* BIO *ex obſervationibus ſeu phænomenis.* Fig. 94.

Quia (§.§. 384. & 386.) quantitates fluidi per puncta quælibet phyſica G, E, F, &c. fluentia ſunt in ſubduplicata ratione homologarum GR, EQ, &c. ſeu ipſarum GB, EB, &c. quantitates illæ per ordinatas parabolæ GL, EI, &c. recte exponi poſſunt, adeo ut quantitas fluidi, per univerſum lumen EGHF effluentis, debeat exponi ſolido ELKFG. Atqui retentis ſymbolis ſuperioribus, erit ſolidum iſtud $=cu\sqrt{p}$, ut ſupra inventum, ergo $Q=cu\sqrt{p}$, & $QQ=ccuup$, id eſt $p=QQ:ccuu$, atqui (§. 399.) eſt $p=ai:r$, ergo $a=rQQ:iccuu$. Jam, quia (ſecundùm hypotheſin) Q ex obſervatione, & reliquæ r, i, c, u, etiam datæ ſunt, ipſa altitudo quæſita a ex hiſce datis ope repertæ æquationis facili negotio haberi poteſt. Quod erat inveniendum.

SCHOLION I.

405. Ad illuſtrationem hujus canonis, & inventionem altitudinis *a*, nullam præſtantiorem novi obſervationem, quam quæ relata eſt circa finem Tractatus *De Menſura aquarum fluentium* Celeberrimi Gulielmini, qui merito ſuo primum locum in Miſcellaneis Italicis Phyſico-Mathematicis à P. Gaudentio Roberti editis, occupat. Adhibuerat ſagaciſſimus Gulielminus vas cylindricum bipedalis diametri alicubi ad latus horizonti rectum lumine quadrato pertuſum, cujus ſingula latera erant 3 linearum pedis Bononienſis, & ejusdem luminis baſis horizonti parallela 3 pedibus cum 11 unciis (pollicibus) ab aquæ ſuperficie diſtabat in vaſe. Experimento octies repetito ſine ulla variatione invenerat Doctiſſimus Vir, 32 libr. & 10 uncias per lumen illud tempore unius minuti horarii effluxiſſe; & pollicem cubicum continere unciam unam aquæ cum granis 146, id eſt, in univerſum grana 786. Diviſit poſtea 32 libr. 10 uncias, id eſt, 252160 grana per 786 grana unius pollicis cubici, invenitque $320\frac{320}{393}$ pollices ejusdem generis prædicto illo tempore effluxiſſe. Jam, ſi formulam ſuperiorem obſervationi iſti velimus applicare, ſciendum *i* & *r* hoc caſu æquari, quia lumen plano aut ſuperficiei cylindri horizonti rectæ inſculptum eſt; ac proinde erit hoc caſu $p = a$. Ut altitudinem quæſitam *a* in numeris inveniamus totam operationem logarithmis perficiemus, ponentes $Q = 320\frac{320}{393}$ poll. cub. $c = 3$ lin. $z = 3\frac{11}{12}$ ped. $= 564$ lineis & $x = 561$ lineis. Quibus poſitis, erunt

Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z})$ - - - -	3.9508274	Subtr.
Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ - - - -	3.9473531	

Log. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} : \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ = log. numeri 1.008033...0.0034743

Ergo $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}) = 1008033 : 1000000$, adeoque $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ ſeu $u : \frac{2}{3}x\sqrt{x} = 8033 : 1000000$, & $\log. u = \log. (\frac{2}{3}x\sqrt{x}) + \log. 8033 - \log. 1000000$. Jam

Log. $(\frac{2}{3}x\sqrt{x})$ - - - - -	3.9473531	Add.
Log. 8033 - - - - -	3.9048778	
	7.8522309	Subtr.
Log. 1000000 - - - - -	6.0000000	
Log. *u* - - - - -	1.8522309	

Log. *u*

Log. u - - - - -	1.8522309	Add.
Log. $c=3$ lin. - - - -	0.4771212	
Log. cu - - - - -	2.3293521	
Log. Q lineis cubicis expreſſæ - -	5.7437973	Subtr.
Log. cu, - - - - -	2.3293521	
Log. $(Q:cu)$ - - - -	3.4144452	Dupl.
Log. $(QQ:ccuu)=$ log. a in lineis -	6.8288904	Subtr.
Log. 144, - - - - -	2.1583625	
Log. a ſeu $(QQ:ccuu)$ in pedibus, -	4.6705279	

Hic inventus log-us ipſius a eſt fundamentalis numerus in calculo quantitatis aquæ per datum foramen effluentis deinceps adhibendus, loco Tabulæ, eundem in finem, à ſupra laudato Guilielmino improbo laboris tædio confectæ. Nos enim, qui logarithmis ſemper calculum abſolvi poſſe jam oſtendimus, & uno adhuc exemplo clarius id probabimus, Tabula Guilielminea plane non indigemus; nec eadem Clariſſ. ejusdem Autor opus habuiſſet, ſibique ipſi multo tædio peperciſſet, ſi animum advertiſſet, calculum eo modo eaque methodo ſubduci poſſe, quam hoc loco expoſuimus.

Scholion II.

406. Videamus nunc præcedentium uſum in aliquo exemplo. Ponamus igitur cum Guilielmino ſectionem FG, ſeu luminis planum angulo 88 grad. inclinatum eſſe ad horizontale planum, atque luminis rectanguli baſin GH eſſe 50 ped. altitudinem vero GE, 10 ped. ac denique proportio celeritatum in G & E ſit eadem quæ 4 ad 1. Jam quia (§. 386.) velocitates in G & E ſunt in ſubduplicata proportione ipſarum GR & EQ ſeu ipſarum GB & EB, hæ lineæ ipſæ erunt ut quadrata velocitatum in G & E, id eſt, GB : EB = 16 : 1, atqui ſupra (§. 402.) erat poſita $z:x$ ſeu GB : EB $=m:r$, ergo $m=16$, adeoque $n=m-1=15$. Item $b=10$ ped. & $c=50$ ped. Ergo $u=(2m\sqrt{m},-2).b\sqrt{b}:3n\sqrt{n}=28\sqrt{10}:\sqrt{15}$ ergo $cu=1400\sqrt{10}:\sqrt{15}$. Hisce poſitis Fig. 94.

Quia Log. a - - -	4.6705279	Add.
Log. i ſin. 88 grad. - -	9.9997354	
	14.6702633	

 Log.

Log. $(ai:r) = \log. p$ - -	4.6702633
Log. $\surd p$, - - - -	2.3351316 } Add.
Log. $(cu) = 1400\surd 10 : \surd 15$ -	3.0580824 }
Log. $(cu\surd p) = Q$ - - -	5.3932140.

Huic log-mo numerus 247285 quam proxime convenit. Gulielminus ſuo calculo invenit 247321, differentia 36 eſt inſenſibilis præ numero 247285, denotante quot pedes cubici tempore unius minuti horarii effluere debeant per lumen illud ſeu ſectionem horizonti inclinatam. Atque ſic in aliis procedendum.

CAPUT X.

De Curſu Fluminum.

DEFINITIONES.

I.

GEnerali *Fluminis* vocabulo indigitatur hoc loco aqua in ſuperficie terræ itinere plerunque varie inflexo è locis altioribus intra alveum ſuum ad depreſſiora indeſinenter fluens.

II.

Alveus fluminis eſt cavitas in ſuperficie telluris, intra quam aquæ decurrunt.

III.

Sectio Fluminis eſt communis ſectio alvei & plani ſecantis alvei fundo perpendicularis. Ejusmodi ſectio ordinarie eſt figura aliqua irregularis ac propterea vocari ſolet *Sectio naturalis* ad diſtinguendam eam ab *artificiali:* nam

IV.

Sectio artificialis eſt ſemper parallelogrammum rectangulum, quia intelligitur eſſe ſectio alvei artificialis, ſeu parallelepipedi formam habentis.

V.

Altitudo viva fluminis eſt diſtantia cujusque puncti in ſuperficie fluminis à fundo ejusdem. Et *latitudo viva* eſt baſis alicujus ſectionis artificialis.

VI.

VI.

407. Flumen in eodem dicitur ſtatu manere, vel in ſtatu manenti eſſe, cum inter fluendum nusquam attollitur ejus ſuperficies & intumeſcit, nec alibi deprimitur vel decreſcit, ſed eodem ſemper tenore, durante fluxu, ſe habet; abſtrahendo tamen ab inæqualitatibus accidentalibus, ſcilicet à vorticibus &c. quæ à fundi & ſpondarum aſperitatibus provenire ſolent.

PROPOSITIO XXXVIII. Theorema.

408. *Exiſtente flumine in ſtatu manenti, temporibus æqualibus æquales aquæ copiæ per omnes fluminis ſectiones transfluent.* Fig. 95.

Si negas, transeat ergo plus aquæ per ſectionem AB quam per vicinam ſectionem CD, & intumeſcet aqua inter has ſectiones in *bm*D exempl. gratia; ſin verò plus aquæ transiret per ſectionem CD quam per AB, aqua inter has ſectiones decreſceret in β*n*D; atque adeo flumen non maneret in eodem ſtatu, contra hypotheſin.

Corollarium.

409. Et converſim etiam, ſuperficies fluminis manens erit, ſi per ſingulas fluminis ſectiones AB, CD, EF, &c. eadem aquæ quantitas temporibus æqualibus perfluit.

PROPOSITIO XXXIX. Theorema.

410. *Si caſtellum aquæ plenum* ABCD *communicet cum lacu* ζωα Fig. 96.
indefinite amplo per canalem inclinatum IFθ *ſuperne opertum ſuperficie curva* IHFζ, *atque exitu aquæ ex caſtello per lumen* CI, *in canali aqua ita fluat, ut in punctis quibusvis* F, E *ſectionis* EF *celeritates pendeant à preſſionibus aquæ incumbentis juxta altitudines* SL, *r*O, *quibus puncta illa à ſuprema aquæ in caſtello ſuperficie manente* AD *diſtant, faciantque preſſiones illæ, ut per ſingulas canalis ſectiones* GH, EF, &c. *eadem temporibus æqualibus aquæ copia fluat. Dico fore, ut eodem tenore aqua in canali inclinato fluat remoto operimento* IHFζ *curvilineo, quo faceret operta canalis aqua indicata iſta ſuperficie operiente, modò tantum aquæ caſtello influat, quantum per ſingulas canalis ſectiones jugiter transit.*

 Si

Si negas, attollatur ergo aqua, amoto operimento curvo IFξ, quam inter ſectiones GH & EF, ergo minus aquæ fluit per ſectionem EF quam per præcedentes verſus CI vi preſſionis naturalis aquæ incumbentis, contra hypotheſin.

Scholion.

411. *Preſſionum naturalium* nomine intelligimus eas, quarum ope velocitates aquæ, ut in E & F, ſunt in ſubduplicata proportione altitudinum O*r*, L*s*, vel ipſarum OD, & LD. Nam quæcunque ſit ſuperficies IHFξ, eadem aquæ copia per ſingulas ſectiones GH, EF, &c. fluet propter contiguitatem partium aquæ, quandiu canalis ſuperficie illa curva opertus manet, nec tamen ideo celeritates aquæ reguntur à partibus incumbentibus, juxta tenorem & legem preſſionum naturalium; hoc eſt, velocitates, ex. gr. in E & F, non ſunt hoc caſu generali ex neceſſitate in ratione ſubduplicata O*r*, ad L*s*. Ac propterea contingeret ut remoto operimento canalis ſuperficies tamdiu mutetur, usque dum aqua defluens in canali eam nacta ſit, quæ à preſſionibus aquæ naturalibus unice dirigatur, ac manens fiat; & hæc proinde ea ipſa eſt, quam operimento IFξ attribuimus, adeò ut aqua continue in canali fluere queat, ſi ejus ſuperficies figuram habeat iſtius operimenti, ſive aqua tecta ſit iſto operimento ſive non.

Corollarium I.

412. In hac preſſionum naturalium hypotheſi innoteſcere poteſt, quantum aquæ per ſingulas ſectiones canalis dato tempore fluere debeat. Nam producta prima ſectione IC in D usque ad occurſum cum ſuperficie aquæ in caſtello AD, & indefinite deorſum in O, & juxta conditiones paragraphi 404, vertice D circa axem DO deſcripta
Fig. 96. parabola DTV, ordinatæ ejus LT & OV, quæ transeunt per puncta L & O, in quibus lineæ FL & EO ſuperficiei aquæ in caſtello AD parallelæ, & per terminos cujuscunque ſectionis FE ductæ, axi parabolæ DO occurrunt, exhibebunt quadrilineum parabolicum LTVO, quod in latitudinem ſectionis artificialis ductum manifeſtabit quantitatem aquæ per ſectionem FE unius minuti horarii tempore fluentis, quia calculus propoſitionis 37. ad hoc tempus eſt aptatum. Ipſius regulæ ratio patet ex hac ipſa propoſitione recenſitâ.

Co-

Corollarium II.

413. Et data prima canalis ſectione IC dabitur quælibet alia EF. Etenim ductis per I, C ordinatis parabolæ IZ, CG, & per punctum E recta EO parallela AD, ac ordinata OV, fiat quadrilineum VOLT æquale quadrilineo IZGC, determinabitque OL, intercepta ab ordinatis OV, LT, altitudinem vivam ſectionis EF. Nam, quia hæc nominata quadrilinea parabolica (conſtr.) æquantur, hæc quadrilinea ducta in canalis latitudinem producunt ſolida æqualia, quæ (§. 404.) quantitatem aquæ fluentis per quamlibet ſectionem canalis IC vel EF, &c. exponunt; unde cum hac ratione per ſingulas ſectiones eadem aquæ copia fluit, patet (§. 409.) ſuperficiem aquæ manentem eſſe. Viciſſim data qualibet ſectione EF, ſemper invenire licet primam IC.

PROPOSITIO XL. Problema.

414. *Datis ſuperficie aquæ in caſtello* AD, *& uno puncto* I *in ſuperficie manente aquæ in canali defluentis* IHξ, *invenire quotlibet alia.* Fig. 96.

Hoc problema jam ſolutum eſt in corollario ultimo præcedentis propoſitionis; ſed, quia conſtructio per quadrilinea parabolica procedens nonnihil incommoda eſt, ope parabolæ cubicæ ſecundæ res paulò elegantius confici poteſt.

Deſcribatur itaque per puncta D & G parabola cubica DPG, in qua cubus abſciſſæ cujuscunque DL æquetur parallelepipedo ex quadrato ordinatæ reſpondentis LR in parametrum Q, ita ut ſit ubique $DL^3 = Q.LR^2$: Sitque P parameter parabolæ conicæ DZT, & $R = \frac{4}{9}DC$. Et hisce poſitis, data prima ſectione IC, reliquæ omnes inveniri poſſunt ope parabolæ cubicæ, atque adeò curva IHF per puncta deſcribi. Nam ductis ordinatis IP, CG parabolæ cubicæ per ſuperioris IP terminum P, agatur PQ parallela DC, & ſi ſectio canalis in E expetatur, acta EO parallela AD per punctum O, & ducta ordinata paraboloidis OS, in quâ, ſumtâ SY æquali GQ, agatur per Y recta YR parallela DO, hæc YR exhibebit altitudinem vivam ſectionis EF per punctum E transeuntis, ita ut EF ſit = YR; ergo puncta omnia F geometrice inveniri poſſunt.

Demonſtr. I. Parabola cubica, quam paraboloidem dicam, præbet $DC^3 = Q.CG^2$; parabola verò conica $CG^2 = P.DC$, & $Q.CG^2 =$

 P.Q.DC,

P. Q. DC; ergo $DC^3 = P.Q.DC$, vel etiam $P.Q = DC^2$. Eſt ergo DC media geometrica inter parametros parabolæ & paraboloidis.

II. In paraboloide eſt $Q.LR^2 = DL^3$, vel $P.Q.LR^2$, id eſt (num. 1. hujus) $DC^2.LR^2 = P.DL^3$, vel quia parabola efficit P. DL æquale LT^2, $= LT^2.DL^2$; hinc $DL^2 : LR^2 = DC^2 : LT^2$, atque adeò $DL : LR = DC : LT$, hinc $DL.LT = DC.LR$, & per conſequens $\frac{2}{3}DL.LT$ ſeu parabola $DZTL = \frac{2}{3}DC.LR$ (ſecundùm hypotheſin) $= R.LR$. Similiter reperietur parabola, ſeu area parabolica, $DGVO = R.OS$; ergo quadrilineum $LTVO = R.YS$. Sic etiam quadrilineum $IZGC = R.QG$; unde quia (conſtr.) $YS = QG$, adeoque quadrilineum LTVO æquale quadrilineo IZGC, (§. 413.) eadem aquæ copia per ſectiones IC & EF fluet, atque adeo ſuperficies aquæ IHF manens erit. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

415. Ope præſentis, ejusque quæ eam præcedit, ex datis inclinatione canalis ſeu angulo CAD, ſectione qualibet EF ejusque diſtantia AE à ſuperficie aquæ in caſtello AD, vel ab origine canalis, innoteſcent proportio velocitatum E & F, & reliquæ ſectiones omnes. Nam ex dato angulo DAC & diſtantia AE, innoteſcet ipſa Or, & ex hac & angulo ABC, complemento anguli CAD, elicietur OD; unde, cum ſectio EF eique æqualis OL data ſit ex hypotheſi, ea ex OD ſubtracta relinquet LD cognitam. Jam deſcripta circa axem DO & vertice D parabola DGV, ordinatæ LT & OV exponent proportionem celeritatum aquæ in E & F. Sed, quia multi ſunt caſus, quibus diſtantia EA actuali dimenſione haberi nequit, ſæpiſſime hic modus determinandi præmemoratas celeritates in praxi minime ſuccedit, & mechanice eas velocitates inveſtigare convenit.

PROPOSITIO XLI. Problema.

Fig. 97. 416. *Invenire per obſervationes artificio mechanico proportionem velocitatum in* E *&* F *cujusque ſectionis fluminis canalisve* EF.

Habeatur filum GP cum pondere P, aquâ aliquantum ſpecifice graviore, altero ejus capiti annexo, demiſſoque pondere P usque ad fundum canalis Cθ, id pondus ab aqua per punctum E ſectionis

FE

FE fluente nonnihil abripietur, & aquæ impreſſiones in hoc pondus efficient ut filum GP à ſitu verticali GE angulo quodam EGP declinet. Dehinc extracto pondere ex fundo, & aquæ eum in modum immiſſo, ut prope ſuperficiem ad punctum F ut in *p* conſiſtat, declinatio fili *gp* à ſitu verticali *ge*, in quem pondus cum filo ſe alioqui compoſuiſſet, niſi aquæ prope F currentis impreſſionibus à ſitu perpendiculari abductum fuiſſet, ſit angulus *egp*, quem ſimplici litera *g* indicabimus, & angulum priorem EGP litera ſimili G. Horum angulorum complementa ad rectum dicantur C & *c*, inclinatio canalis, ſeu angulus GEF, autem I; dehinc aſſumatur quædam N, quæ ſit ad tangentem anguli G, ut ſinus complementi C eſt ad ſinum anguli C — I; item *n* ad tangentem anguli *g* in ratione ſinus anguli *c* ad ſinum anguli *c* — I, eritque velocitas aquæ in E ad velocitatem in F in ſubduplicata ratione magnitudinis N ad *n*.

Demonſtr. I. In altera figura 98. repræſentent MN vel MP, aut M*p* longitudinem fili GP vel *gp*, & MN horizonti verticalis contineat cum recta NQ angulum MNQ æqualem angulo GEθ in fig. 97, ſintque anguli NMQ, NMq æquales angulis EGP, *egp*, ſeu G & *g* reſpective, ductaque NR perpendiculari ad MN, erunt NR tangens anguli G, & N*r* tangens anguli *g*: Et NRM erit C ſeu complementum anguli G, ac N*r*M complementum alterius *g*, id eſt *c*. Quin etiam angulus RNQ æquabitur angulo GEF, ſeu angulo I, nam ſi ex æqualibus GEθ & MNQ auferentur recti FEθ & MNR remanebunt æquales GEF, RNQ. Eritque adeò angulus RQN = C — I, & r*q*N = *c* — I. Fig. 98.

II. Quia gravia in ſitum horizonti rectum ſe componere affectant, atque in talem ſe reapſe reducunt, quoties filo annexa à perpendiculari ſitu abducta, atque ſui iterum juris facta ſunt. Idcirco filum GP non poteſt in hoc ſitu conſiſtere, niſi impreſſionibus aquæ fluentis per E juxta directionem ſectioni EF normalem, vel fundo Eθ parallelam, in eo detineatur; neceſſe igitur eſt, ut præter gravitatis actionem in corpus P, quæ ſe in hoc exſerit juxta directionem ipſi GE parallelam, alius cujuſdam potentiæ actio accedat, quam hoc caſu concipimus fieri, ut dictum, juxta directionem ipſi Cθ parallelam. Jam ſi in figura 98. MN exponit gravitatem ponderis P, quam in aqua habet, altera potentia, quæ fundo canalis parallela eſt, exponetur linea NQ, quandoquidem (ſecundùm hypotheſin) angulus MNQ æqualis eſt angulo GEθ, atque actione duarum potentiarum collateralium MN & NQ (§. 39, 40.) detinetur pondus P filo annexum

nexum in ſitu MP, cum MN angulum NMQ ſeu angulum G continente; ſimiliter repræſentat Nq vim abducentem aquæ filumque angulo g ſeu egp à verticali ge declinare facientis: adeo ut vires abducentes ſint ad ſe invicem ut NQ ad Nq. Atqui in triangulo NRQ, eſt NR ad NQ ut ſinus anguli NQR ſeu C − I ad ſinum anguli NRQ ſeu NRM, id eſt C, & ex hypotheſi eſt tangens anguli G ſeu NR ad magnitudinem N, ſicut ſinus C − I ad ſinum C, ergo N = NQ. Eodem probabitur argumento eſſe n = Nq. Itaque vis abducens filum GP à ſitu perpendiculari GE, eſt ad vim abducentem fili ge ut N ad n.

III. Sunt vero vires abducentes ut impreſſiones aquæ in globum P, exſertæ juxta directiones fundo Cθ parallelas: impreſſiones vero ſunt in duplicata ratione velocitatum in E & in F, ut in ſequentibus demonſtrabitur, ergo quadratum velocitatis in E eſt ad quadratum velocitatis in F, ut N ad n, ac per conſequens velocitas in E eſt ad velocitatem aquæ in F, in ſubduplicata ratione magnitudinis N ad magnitudinem n. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

417. Si angulus GEF, ſeu inclinatio canalis ad horizontem, nullus eſt, erit N ad n eo caſu, ut tangens anguli G ad tangentem anguli g; atque adeo velocitates aquæ in ſummo & imo ſectionis FE erunt in ſubduplicata ratione tangentium angulorum g & G.

Scholion.

Fig. 96. 418. Hæc omnia, quæ de canali Iθ oſtenſa ſunt, fluminibus quoque applicari poſſent, ſi hæc per totam ſuam longitudinem eandem latitudinem ſectionesque artificiales admitterent, & aquæ fluentes à ſpondis & fundi inæqualitatibus nullam reſiſtentiam paterentur. Verum quia tales fluvii mathematici in rerum natura non exiſtunt, diſpiciendum eſt, num præcedentia nullum præbere queant adminiculum, quo fluminum aquæ fluentes ad menſuram revocari, eorumque affectiones generaliores explicari queant. Hac in re non inelegantem rationem pro fluviis mediocris altitudinis & latitudinis excogitavit Caſtellus quam Celeb. Gulielminus deinceps magis perfecit. Hæc methodus ita habet.

Fig. 99. 419. Intelligatur *Cataracta* ſeu *Regulator* ABDA conſtans duobus

tignis

tignis parallelis & verticalibus AB, AD horizontali BD conjunctis, & crenis ſuis inſtructis, adeò ut his crenis tabula EH inſeri, quæ pro re nata attolli & demitti queat ope funis VS unco V alligati, atque adeo lumen FBDH modo arctari modo etiam ampliari queat. Hæc Cataracta ſeu Regulator in loco commodo fluvii mediocris transverſim debet aptari, ita ut tignum BD ripis perpendiculare ſit fundoque contiguum, ac denique tigna AB & AD fundo normalia, adeo ut totum planum ABDA fundo ripisque perpendiculare ſit.

Si jam quæratur, quantum aquæ per ſectionem BM fluminis PQ dato tempore fluere debeat? In hac ſectione vel alio commodiore loco collocandus eſt Regulator eo modo, ut dictum, & tabula EF mobilis demittenda eſt, ut ſectio MB reducatur ad minorem FB, quo fiet, ut minore aquæ copia fluente per lumen arctum FB quam antea per MB, aqua ſupra ſectionem MB intumeſcat ſenſim, atque ſenſim attollatur, usque dum aqua ſuperficiem manentem PN adepta ſit, quo caſu tantum aquæ fluet per lumen FB, quantum ante fluxerat per MB & quantum per quamlibet aliam ſectionem PR fluit, alioqui ſuperficies PN manens non eſſet. Sed eam ponimus eſſe manentem, ut ſane ad talem ſtatum de neceſſitate ſe aliquando componet; quo caſu corpus aquæ PRNB tanquam amplo caſtello ſeu receptaculo incluſa conſiderari poteſt, cui tantum aquæ influit ſuperne per PR, quantum effluit per lumen FB. Atque hisce jam poſitis calculus facili negotio abſolvetur pro obtinenda quantitate aquæ effluentis, dato quodam tempore, per lumen FB. Nam ſi vertice N & circa axem NB parabola deſcripta intelligatur NSQ, cujus parameter p ſit $= ai : r$ retentis ſymbolis, quæ ſupra (§. 401.) ſignificante i ſinum anguli obſervatione dati PNB, r ſinum totum & a eam magnitudinem, cujus log-us jam antea (§. 405.) repertus eſt. Unde, quia etiam BN & FN ſeu z & x ex obſervatione datæ ſunt, quantitas Q aquæ per lumen FB effluentis juxta normam paragraphi 406. facile calculo ſubducetur. Fig. 100.

In Propoſitionibus præcedentibus conſideravimus ut plurimum motus aquarum tanquam liberrime factos abſque ulla reſiſtentia ex frictionibus. Verum, quia aquæ in fluviorum alveis decurrentes varias reſiſtentias à fundo & ſpondis ſubeunt, ejusmodi reſiſtentiarum omnino ratio habenda, atque in certis reſiſtentiarum hypotheſibus velocitates ſingulorum alicujus ſectionis punctorum determinandæ ſunt.

PROPOSITIO XLI. Problema.

Fig. 101. 420. *Reſiſtentiis aquæ fluentis exiſtentibus proportionalibus aquæ velocitatibus in ſingulis ſectionis punctis, invenire ipſas velocitates.*

Sit flumen BHK, atque EG ſectio ejus, AB ſuperficies manens horizontalis, ſeu initium canalis aut fluminis. Producatur EG in Q usque ad occurſum ejus cum plano AB itidem producto; & denique ex quibuslibet punctis E, F, G ſectionis EG ad AQ demiſſæ ſint perpendiculares EL, FM, & GN, &c. atque ordinatæ EH, FI, GK &c. alicujus curvæ KIH ipſi GE perpendiculares exponant velocitates aquæ per puncta E, F, G fluentis. Sint jam LE, a, QE, b; ordinata EH, quæ aquæ per punctum E fluentis quantitatem deſignat $= c$; reſiſtentia fundi ex contactu $= m$, reſiſtentia ſpondæ $= n$; QF, x & FI, y atque hæc ordinata pariter quantitatem aquæ per punctum F fluentis indicat ejusque celeritas eſt $y : c$, ac motus $= yy : c$. Et, quia (ſecundùm hypotheſin) reſiſtentia in E, hoc eſt m, ad reſiſtentiam in F ſe habet ut EH ad FI, erit reſiſtentia in F, quatenus hæc participat reſiſtentiam in fundo, $= my : c$, & reſiſtentia in eodem loco proveniens à reſiſtentia ſpondæ $= ny : c$. Detractis nunc reſiſtentiis à quantitate preſſionis aquæ puncto cuilibet F incumbentis, quæ quantitas per MF, ſeu $ax : b$ exponitur, & reliquum $(ax : b) - (my - ny) : c$, exponet vim extrudentem aquam per punctum phyſicum F, & cùm hæc vis extrudens conſtanter proportionalis ſit motui aquæ genito, erit $(ax : b) - (my - ny) : c = yy : c$, id eſt $acx - bmy - bny = byy$, quæ eſt æquatio ad parabolam, cujus axis principalis ab EQ diſtat, propius accedens ad B, intervallo $\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$, & vertex in hoc axe à fundo DH diſtat intervallo $b + \frac{bpp}{4ac}$, facta ſcilicet $p = m + n$; ac denique parabolæ hujus parameter erit $\frac{ac}{b}$. Quod erat inveniendum.

Fortaſſe aliæ poſſunt excogitari reſiſtentiæ hypotheſes, quæ præſente veriores ſint, hanc enim à nobis aſſumptam non pro certiſſima vendito, ſed duntaxat uno exemplo facili oſtendere placuit, quo pacto velocitates aquarum fluentium aſſignari debeant, non neglectis reſiſtentiis, quæ à frictionibus proveniunt.

SE-

SECTIO III.

De Effectis Fluidorum ex percuſſione.

EXpendimus hactenus motus fluidorum, qui reſultant ex preſſione gravitatis, modo etiam excutiendi ſunt effectus eorundem ex percuſſione, quoties ad alia fluida, aut ad dura corpora, alliduntur; vel etiam, quoties ſolida fluidis impinguntur. Ad hujus generis effectus referri debent motus imminutiones, quas corpora ſolida in fluidis protruſa tum ratione figuræ, tum etiam ratione motus ipſius ſubeunt, id eſt, reſiſtentiæ corporum in fluidis delatorum. Quæ omnia, & nonnulla alia huc ſpectantia, ſigillatim in hac tertia Sectione ad examen revocabuntur.

DEFINITIO.

421. Cum fluidum in aliud fluidum aut ſolidum corpus impingitur, fluidi actio in alterum corpus dicitur *Percuſſio*, & effectus, qui in corpore excipiente percuſſionem editur, dicitur *Impreſſio*.

In ſuperioribus ſubinde impreſſionis vocabulum latiori paulò ſenſu ſumſimus, etiam pro deſignando effectu, qui à *preſſione* fluidorum provenit.

AXIOMA.

422. Eandem à fluido impreſſionem excipiet corpus quodcunque ſolidum, ſive id data cum celeritate dataque in directione in fluido feratur, ſive fluidum eadem celeritate & directione in idem corpus ſolidum, ſed quieſcens, impingat.

CAPUT XI.

De generalibus Affectionibus percuſſionis fluidorum.

PROPOSITIO XLII. Theorema.

423. *Fluidorum* ABb, CDd *plano* MN *æquabili motu ad angulos rectos occurrentium, ita tamen, ut partes eorum à plano repercuſſæ libere recedere queant, abſque eo quod advenientes impediant, quantitates, æqua-* Fig. 102.

libus temporibus ad planum MN *accedentes, erunt in compoſita ratione celeritatum* AB, CD, *latitudinum* Bb, Dd *&* *denſitatum* M, N.

Sint AB*b*, & CD*d* quantitates fluidorum æqualibus temporibus ad planum MN æquabili motu accedentes, eruntque celeritates acceſſus ut AB ad CD. Quantitates verò fluidorum ad planum MN ſimul appellentium ſint in compoſitâ ratione voluminum & denſitatum, & volumina in compoſita ratione celeritatum AB, CD & latitudinum, ergo maſſa ABb eſt ad maſſam CDd, ſicut AB. Bb. M ad CD. Dd. N. ſeu in compoſita ratione ex rationibus celeritatis AB ad celeritatem CD, latitudinis Bb ad latitudinem D*d*, & denique denſitatis M ad denſitatem N. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

424. Hinc impreſſiones, quas maſſæ fluidæ AB*b*, CD*d* in planum MN exerent, erunt in compoſita ratione ex duplicatâ velocitatum AB, CD, & ex ſimplici tum latitudinum B*b*, D*d*, tum denſitatum M, N, id eſt, impreſſio maſſæ AB*b* erit ad impreſſionem alterius CD*d*, ſicut AB^2. B*b*. M ad CD^2. D*d*. N, vel ſumta ED tertia proportionali ad AB & CD, ſicut AB. B*b*. M ad ED. D*d*. N. Nam impreſſiones ſunt ut motus fluidorum & motus in compoſita ratione maſſarum & velocitatum.

Corollarium II.

425. Hinc etiam, ſi fuerint tubi AB, DE liquoribus quibuslibet pleni, quorum liquorum denſitates ſint M & N, effluantque liquores per foramina æqualia B, E, impingantque in extremitates vectis EB circa O convertibilis, erit momentum liquoris CB ad momentum alterius FE, ut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Fig. 103. Nam percuſſiones in B & E ſunt ut motus fluidorum, adeoque (§. 424.) in compoſita ratione ex duplicata velocitatum & ſimpla denſitatum, exiſtentibus tuborum foraminibus æqualibus; velocitates vero fluidorum ex tubis erumpentium (§. 386.) ſunt in ſubduplicata ratione altitudinum CB & FE, ſeu duplicata velocitatum eadem, quæ altitudinum CB & FE; ac propterea percuſſio in B erit ad percuſſionem in E ſicut CB. M ad FE in N. Verum hæ percuſſiones, quatenus in vectem BE circa O convertibilem agunt, habent rationem potentiarum motricium vecti applicatarum, ergo cum poten-

tentiæ vectis habeant momenta proportionalia factis ex potentiis ipſis in diſtantias earum ab hypomochlio O, habetur momentum percuſſionis in B ad momentum percuſſionis in E, ſicut M. CB. BO ad N. FE. EO.

Corollarium III.

426. Propterea torrentes DG, HL, celeritatibus *aA*, *bB* ad planum EL accedentes, in æquilibrio conſiſtent cum tertio ON celeritate C*c* in idem planum EL impingente, ſi poſitis torrentum denſitatibus R, S, T, & latitudinibus EG, KL, MN, fuerint $R. Aa^2. EG. AC = S. Bb^2. KL. BC$, & $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL = T. Cc^2. MN$. Nam ſi planum EL conſideretur inſtar vectis, erunt (§. 425.) $R. Aa^2. EG. AC$ & $S. Bb^2. KL. BC$, momenta percuſſionis æqualia, atque adeò in æquilibrio conſiſtent cum tertio OMN quandoquidem (ſecundùm hypotheſin) ejus media directio *c*C tranſit per C, & ejus percuſſio, ſeu $T. Cc^2. MN$, æquatur duabus oppoſitis potentiis ſimul ſumtis, ſcilicet $R. Aa^2. EG + S. Bb^2. KL$. Fig. 104.

In hoc corollario præcipua continentur quæ circa colliſiones & percuſſiones fluidorum inter ſe notatu digna occurrere poſſunt.

Corollarium IV.

427. Reſiſtentiæ, quas corpora ſolida in fluidis delata patientur, erunt in compoſita ratione denſitatum & duplicatæ velocitatum: adeoque hæ reſiſtentiæ in uno eodemque fluido erunt in duplicata ratione celeritatum. Nam, quia (§. 422.) corpora in fluidis incedentia eaſdem à fluido impreſſiones ſubeunt, quas ſubirent, ſi fluidum ea celeritate, qua corpora in eo feruntur, in hæc corpora quieſcentia impingeret, & quia hæ impreſſiones ſunt ut percuſſiones fluidi, id eſt in compoſita ratione ex duplicata celeritatum & ſimplici denſitatum, reſiſtentiæ vero ut impreſſiones, quas corpora, quibus reſiſtitur, in fluido ſubeunt; liquet omnino reſiſtentias, quas corpora in medio fluido mota patientur, eſſe in compoſita ratione denſitatum & duplicatâ velocitatum, aut ſi corpora in eodem medio ferantur, in duplicata ratione celeritatum.

PROPOSITIO XLIII. Theorema.

Fig. 105. 428. *Si fluidum, ſeu torrens* CABD, *data quadam celeritate impingat perpendiculariter in planum* AB, *deinde etiam eadem celeritate, ſed ſub angulis obliquis* KOF, KOE *alteri plano* EF *primo* AB *æquali, erit impreſſio, quam ſubibit planum* AB, *ad impreſſionem alterius plani* EF *juxta directiones* OP, OQ *planis normales, in duplicata proportione ſinus totius ad ſinum anguli incidentiæ* KOE; *vel, ductis per* E, O *&* F *perpendicularibus* HL, KOP, IMF *ad planum* AB, *&* MN *normali plano* EF, *ſicut* OF *ad* ON.

Quod fluida CABD, HEFI impreſſiones in plana AB & EF exerant juxta directiones OP, OQ planis normales, conſtat ex §. 249. Ex puncto R agantur RS, RT perpendiculares & parallelæ plano EF. Jam, quia filamentum fluidi KO ad angulos rectos in planum LM incidit, ſub obliquis verò KOE, KOF in planum EF; & ſi RO celeritatem filamenti exponat, per ſe claret fore, ut filamentum totam ſuam vim in planum obliquum EF exerere nequeat, quia directio RO plano iſti directe oppoſita non eſt, ſed reſoluta celeritate RO in laterales æquipollentes RS & RT, duntaxat aget in planum EF celeritate RS plano iſti directe oppoſita atque contraria, cum altera RT utpote cujus directio plano EF parallela eſt, nullam prorſus impreſſionem in idem planum exerere poſſit. Eſt igitur impreſſio filamenti KO in plano LM ad impreſſionem ejusdem in plano EF ut RO ad RS, ſeu ut OF ad OM; unde quia idem eſt filamentorum numerus binis planis LM & EF allabentium, erit impreſſio torrentis HLMI in plano LM ad impreſſionem ejusdem in plano EF, ſicut OF ad OM; impreſſio vero torrentis CABD in plano AB eſt ad impreſſionem torrentis HLMI in plano LM, ſicut AB ad LM, id eſt, ſicut OF ad OM, aut OM ad ON; ergo ex æquo impreſſio torrentis CABD in plano AB eſt ad impreſſionem torrentis HEFI in plano EF, ſicut OF ad ON, id eſt, in duplicata ratione ſinus totius OF ad ſinum anguli incidentiæ IFO vel KOE. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Fig. 106. 429. Hinc ſi fluidum MABN plano AB allabatur celeritate data V, erit impreſſio, quam planum iſtud à fluido in id impingente exci-

excipiet, factum ex quadrato velocitatis in rectam AD; ducta ſcilicet AC perpendiculari ipſis AM, BN & demiſſa ex C ſuper AB perpendiculari CD. Nam (§. 424.) impreſſio, quam ſubiret planum AB à fluido perpendiculariter impingente, eſt ut V^2. AB, per propoſitionem verò præſentem eſt impreſſio perpendicularis fluidi in plano AB ad impreſſionem ejusdem, ſed oblique impingentis plano AB, ut AB ad AD, ſeu V^2. AB ad V^2. AD; ergo V^2. AD exponit impreſſionem fluidi oblique incidentis MABN in planum AB celeritate V, hæcque impreſſio exſeritur juxta directionem EF plano perpendicularem & per ejus centrum gravitatis transeuntem, per §. 249. & §. 54.

Scholion I.

430. Ex præſenti propoſitione facile deducitur vis clavi ſeu gubernaculi, cujus ope naves, in quem volueris ſitum, converti poſſunt; quod paucis eſt indicandum. Sint itaque AB navis, B puppis cujus cardini inſeritur clavus BH convertibilis circa B, cui per centrum gravitatis X normalis ducta ſit Xy. Ponamus jam navem progredi juxta BA ex B verſus A quacunque data velocitate, clavumque BH firmatum eſſe, ut cum AB producta in T quemcunque angulum acutum HBT conſtituat. Progrediente igitur navi verſus E, aqua ABHG, juxta directiones rectæ AB parallelas, ea ipſa celeritate in clavum BH impinget, qua navis contrario ſenſu verſus E fertur; & quia (§. 422.) idem effectus reſultat, ſi aqua ABHG data celeritate in clavum navis quieſcentis impingat, quam ſi navi progrediente clavus eadem illa celeritate aquæ allidatur, & aquæ clavo impingentis impreſſio eſt BS, poſita unitate pro velocitate, ductisque BR normali ipſi GH, & RS normali BH, quæ impreſſio exponenda per BS exeritur in clavum juxta directionem XY per centrum gravitatis clavi BH ductam. Idcirco progrediente navi juxta BA, aqua reſiſtens eundem effectum præſtabit, ac ſi clavus impelleretur juxta XY potentia quadam BS; atque adeò hinc liquet, hac potentia BS navim in ſeipſam converſum iri. Sed quia directio XY alteri HG, juxta quam navis progreditur, non conſpirans nec directe contraria, nec etiam perpendicularis eſt, potentia BS quatenus directioni XY applicatur, non eſt abſoluta potentia, quæ navis converſionem cauſetur; ſed ductis BN perpendiculari BH, æqualique facta ipſi BS, & NO parallela BV, hæc NO exponet vim ple- Fig. 107.

nam

nam converſionis navis; quoniam ON normalis eſt directioni navis OA, & potentia $BN = BS$ reſolvitur in æquipollentes BO & ON, quarum BO, in directum poſita ipſi OA, nihil ad gyrationem navis conferre, ſed tantummodo ejus motum progreſſivum aliquantum morari poteſt, adeo ut ſola potentia ON reſtet, quæ converſionis effectum præſtet. Similiter ſi clavus habeat ſitum BF, denotabit KI vim rotationis navis, ſi ſcilicet ductis QL & BI normalibus clavo BF, factaque $BI = BL$, etiam IK rectæ AT perpendicularis ducta fuerit.

431. Ex contemplatione figuræ ſtatim apparet, ipſas KI & ON æquales eſſe poſſe, etſi anguli IBK & NBO diverſi ſint. Ex quo ſequitur, duas diverſas clavi poſitiones æqualiter aptas eſſe poſſe ad navis converſionem circa ſe ipſam. Agantur enim SP & LM parallelæ TB, quæ ipſis ON & KI reſpective æquales erunt, quandoquidem triangula PSB & ONB, nec non MLB & KIB ſimilia & æqualia exiſtunt. Jam $HR : PS (= HB : SB) = HB^2 : RB^2$, & $ML : QF = QB^2 : FB^2$; ergo ſi PS & ML vel KI & ON æquales ſint, erit ex æquo $HR : FQ = QB^2 : RB^2$, atque adeò $HR . RB^2 = FQ . QB^2$. Hinc, ſi BH vel BF dicatur a; RH, t; QF, u, erunt $RB^2 = aa - tt$, & $QB^2 = aa - uu$, adeòque $HR . RB^2 = FQ . QB^2$ fiet $aat - t^3 = aau - u^3$; ſeu $u^3 - t^3 = aau - aat$, adeòque dividendo per $u - t$, erit $uu + ut + tt = aa$, quæ eſt æquatio indeterminata infinitas ſuppeditans diverſas clavi poſitiones, quarum binæ & binæ æqualiter aptæ ſunt ad navis converſionem.

432. Idcirco, ſi $u = t$, habebitur $3tt = aa$, atque adeò $t = \sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$; & hic valor ſinus anguli VBH dabit poſitionem gubernaculi BH, in qua vis rotationis navis *maxima* exiſtet. Unde ſi angulus VBH fuerit graduum 35, 16′ circiter, vel angulus HBT graduum 54, min. 44, poſitio clavi BH ad converſionem navis aptiſſima erit.

Scholion II.

433. Quæ in præcedenti ſcholio oſtenſa ſunt, etiam molis alatis facili negotio poſſunt applicari. Sit enim DE ala verticalis vento circumagenda, cum axicula molæ AB quemlibet angulum acutum ECB continens; ventusque celeritate ut 1, & in directione nN parallela CB, alæ DE allabatur, ſintque Ee, Ff parallelæ AB, & $FC = CE$, ductiſque EM, ML normalibus ad Ff & FE, & LV parallela rectæ Ff. Per alæ centrum N ducta intelligatur N1 æqualis

Fig. 108, 109.

LE

LE plano alæ DE perpendicularis, & exponet hæc N1 venti impreſſionem ejusque directionem, quam quælibet linea 2F2E alteri FE parallela ſubibit, adeò ut totalis impreſſio, quam ala à vento excipiet, juxta directionem alæ normalem, futura ſit PC.N1. Porrò ſi per punctum 1 transeat recta 13 parallela N*n* vel AB, & per punctum N recta N3 eidem N*n* normalis, impreſſioni N1 æquipollebunt laterales 31 & N3, quarum prima 31, utpote AB ſeu axiculo parallela, ad alæ converſionem nihil confert; ſed tantum N3 eidem axiculo molæ AB perpendicularis: adeoque vis rotationis alæ ex impreſſione juxta N1 derivata erit PC.N3. Verum, quia rectæ N1, 13 & N3 totidem aliis LM, LV & MV parallelæ ſunt in plano EFM, & triangula LEV & MLV ſimilia, erunt etiam MLV & 1N3 æquiangula & æqualia, quoniam inſuper eſt LE = N1. Hinc etiam LV = N3 = vi rotationis alæ DE. Hinc itidem PC.N3 = PC.LV.

Igitur ſi dicantur FE, *a;* PC, *b;* FM, *t;* reperietur LV = $(aa - t^3) : aa$, & PC.LV = $(aabt - bt^3) : aa$. Intelligatur inſuper alam DE aliam habere poſitionem ac modo habuit, cui reſpectiva FM ſit *u*, reliquis iisdem manentibus, quæ antea, erit hoc caſu homologa PC.LV = $(aabu - bu^3) : aa$. Unde, ſi in binis hisce diverſis poſitionibus ala debeat eadem vi circumagi, ponendum $(aabt - bt^3) : aa = (aabu - bu^3) : aa$. Hinc $u^3 - t^3 = aau - aat$, quæ diviſa per $u - t$, præbet $uu + tu + tt = aa$, quæ eſt eadem æquatio ac antea (§. 431). Adeòque facta $t = u$, reperitur iterum $t = \sqrt{\tfrac{1}{3}aa}$, atque adeò angulus FEM graduum 35 min. 16; alaque DE in hac poſitione à vento efficaciſſime circumagetur. Unde, ſi alæ DE & GI verticales ſubcontrario ſitu eodem angulo ſeu æquali ECB & HCB ſcilicet 54$^{gr.}$ 44′ ad AB inclinentur, idemque de horizontalibus, in ſchemate non expreſſis, intelligatur; mola alata efficaciſſime verſabitur & circumducetur à vento juxta directiones AB parallelas in alas impingente. Alas autem oppoſitas ſitum ſubcontrarium habere oportet, alioqui, ſi in eodem plano exiſterent, prorſus circumagi non poſſent, quandoquidem venti impreſſio in una ala deſtrueretur æquali impreſſione in ala oppoſita. Fig. 108.

CAPUT XII.

De Reſiſtentiis figurarum in fluidis motarum.

DEFINITIO.

Fig. 110. 434. Si fuerit figura quæcunque CBABC, linea CBABC ex curvis vel rectis compoſita, & recta CC terminata, & hæc figura in directione axis MA in fluido feratur ex A verſus S; à poſtica parte verò ſuper baſi CC appoſita ſit alia figura CYC, cujus area curva CYC & recta CC comprehenſa, ſit ad rec-lum ex baſi eadem CC in CL vel MO, quæ quadratum celeritatis exponit, qua figura in fluido incedit, ſicut reſiſtentia quam patitur figura CAC in fluido, præeunte ejus vertice A in recta MA, ad reſiſtentiam, quam eadem figura ſubiret præeunte ejus baſi: vel, quod eodem recidit, ſicut reſiſtentia figuræ aut potius lineæ curvæ CBABC ad reſiſtentiam rectæ FF baſi CC parallelæ & æqualis fluidi impreſſiones ad angulos rectos excipientis. Linea CBABC dicetur *patiens*, lineaque CIYIC *ſcala reſiſtentiæ figuræ patientis.*

PROPOSITIO XLIV. Theorema.

Fig. 110. 435. *Si, ductâ per terminum* R *recta*, AR *axi* AM *curvæ patientis* CBABC *perpendicularis lineâ* RS, *parallelâ tangenti* B*α curvæ patientis in* B, *deinde ex* A *normali* AT *ſuper* RS, *& per* T *recta* TV *æquediſtanti axi* AM, *in* BH *eidem axi parallela, ſumatur ubique* HI *æqualis reſpectivæ* RV, *puncta* I *erunt in ſcala* CIYIC *reſiſtentiarum figuræ patientis* CBABC; *erit reſiſtentia curvæ* CBABC *in directione* MA *verſus* S *promotæ, ad reſiſtentiam lineæ rectæ* FF *axi normalis, ſicut bilineum* CIYIC *ad rectangulum* CCLL. *Et reſiſtentia ſuperficiei rotundæ ex converſione curvæ* CBA *circa* AM *ad reſiſtentiam circuli ex converſione rectæ* AT *circa eandem* AM, *ut ſolidum ex revolutione figuræ* CIYM *circa* MY *ad cylindrum ex converſione rec-li* CMOL *circa eandem* MY *ſeu* MO.

I. Curva ABC in ſua elementa diviſa intelligatur, quorum B*b* unum, per cujus terminos agantur ZK, *zk* axi AM æquidiſtantes, rectæ AF in punctis *G*, *g*; ipſi *zb* ordinata BN occurrat in puncto β, ex quo ad elementum curvæ B*b* perpendicularis βe demiſſa ſit.

Po-

Ponantur inſuper BD curvæ normalis, & ED axi AM parallela, ac ductis per puncta R & S lineis QR, QS parallelis AS & AR, & ex Q cadat Qθ perpendicularis ſuper RS, & θω perpendicularis ſuper AS. Adeo ut, ſi inſuper lineola *ef* ordinatæ BN parallela ducta fuerit, figuræ *b*βB*fe* & RQSωθ ſimiles futuræ ſint, quandoquidem ſingula latera unius ſingulis alterius parallela ſunt & ſimiliter poſita.

II. Adeoque in figuris ſimilibus *b*βB*fe* & RQSωθ erit RA : θω = Bβ : *fe*, atque RA. *fe* = θω. Bβ. Verum, quia triangula QSθ & RAT ſimilia & QS ac RA æquales ſunt, erit etiam Sθ = RT, & per conſequens θω = RV; ergo etiam θω. Bβ = RV. Bβ, id eſt, per conſtructionem = HI. H*h*; ac proinde RA. *fe* = rec-lo IH*h* areæ CIYIC inſcripto.

III. Igitur, quia filamentum fluidi ZB*bz* in curvæ elementum B*b* impingentis impreſſio in hoc elementum juxta directionem BD eſt (§. 429.) AR. B*e*, quia AR exponit (ſecundùm hypotheſin) quadratum celeritatis fluidi curvæ allabentis. Impreſſio verò, juxta BD, virtualiter continet impreſſiones ipſi æquipollentes laterales, juxta BE & ED directiones axi AM perpendicularem & parallelam, quarum perpendiculares axi BE, utpote quæ contrariæ & directe oppoſitæ ſunt, quatenus ex duobus elementis circa axem AM ſimiliter, ſed ad oppoſitas partes ſitis Bb, Bb derivantur, ſe mutuo elidunt, ut adeò nulla earum ratio habenda ſit, ſed ſolæ impreſſiones, juxta directiones ED axi parallelas, conſiderandæ veniant. Eſt verò (§. 39.) impreſſio juxta BD ad impresſionem juxta ED ut BD ad ED, ſeu, propter triangula ſimilia, EBD & *f*B*e*, ſicut B*e* ad *ef*, id eſt, ut RA. B*e* ad RA. *fe* ſeu (num. 11 hujus) rec-lum IH*h*. Atqui, ut initio hujus numeri dictum, impreſſio fluidi, juxta BD eſt RA. B*e*; ergo impresſio fluidi in elementum B*b*, juxta directionem axi AM parallelam, eſt rec-lum IH*h*. Atque adeò impresſio, quam omnia B*b*, ſeu tota curva CBABC à fluido ſubibit, id eſt, reſiſtentia hujus curvæ exponetur omnibus rectangulis IH*h*, quæ in bilineo CIYIC continentur, & in bilineum iſtud evaneſcunt; hoc eſt, reſiſtentia curvæ CBABC, juxta directionem MA, motæ in fluido exponenda eſt bilineo CIYIC. Impresſio vero, quam linea FF à fluido ad angulos rectos excipit, exponitur rectangulo ex FF in RA, ſeu (quia conſtr. CL = RA) rec-lo CLLC. Ergo reſiſtentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad reſiſtentiam lineæ FF, ut area CIYIC ad rectangulum CLLC. Quod erat primum.

 Quoad

Quoad ſecundam partem Propoſitionis, cum impreſſio, quam elementum curvæ B*b* à fluido ſubit juxta directionem ED axi parallelam, (num. 111 hujus) exponatur rec-lo IH*h*, atque revolutione plani CACY circa axem AY, elementum curvæ Bb deſcribat zonulam conicam, quæ pariter elementum exiſtet ſuperficiei ex converſione curvæ CBA circa AM ortæ, rec-lum vero IH*h* eadem converſione deſcribat tubum cylindricum ſolido ex figura CIYM circa MY converſa inſcriptum; liquet omninò impresſionem fluidi, quam zona conica ex B*b* circa AM ſubibit, in directione axi AM parallela, exponi debere tubo ex rec-lo IH*h* circa MY. Ergo reſiſtentia, quam univerſa ſuperficies ex curva CBA circa AM excipiet, juxta AM à fluido impingente, exponitur omnibus tubis cylindricis ex rec-lis IH*h* circa MY, id eſt, ſolido ex figura CIYM circa MY revolvente, in quod omnes evaneſcunt. Impresſio verò quam circulus ex converſione lineæ AF circa AM ortus ſubibit, exponetur cylindro, cujus baſis ſit ipſe circulus, impresſionem fluidi ad angulos rectos excipiens, altitudo verò AR vel CL, ſeu MO, quæ quadratum celeritatis fluidi allabentis exponunt; vel etiam cylindro ex converſione rectanguli CMO circa MO. Adeoque eſt reſiſtentia ſolidi rotundi in fluido CBABC ad reſiſtentiam circuli FF, ut ſolidum rotundum CIYIC ad cylindrum CLLC. Quod erat ſecundum.

COROLLARIUM.

436. Cum (conſtr.) ſint RA = HK & RV = HI, & AR : RV = RS : RT = $RS^2 : RA^2$, erit etiam HK : HI = $RS^2 : RA^2$; & dividendo IK : HI = $AS^2 : AR^2$, propterea erit RA : AS = $\sqrt{HI} : \sqrt{KI}$. Adeoque, data alterutra ex duabus curvis patiente, vel ſcala reſiſtentiarum ejus, innoteſcet ſemper altera, ſi non algebraice ſaltem tranſcendenter; & quidem ſcala reſiſtentiarum ſemper algebraica erit, ſi patiens curva fuerit.

SCHOLION.

437. Ergo, ſi vocentur AN, x; BN ſeu HM, y; HI, t; HK vel RM, a; AS, m analogia præcedentis corollarii RA : AS = $\sqrt{HI} : \sqrt{KI}$, præbebit $a : m = \sqrt{t} : \sqrt{a-t}$ & $t = a^3 : aa + mm$. I°. Tum etiam $m = a\sqrt{(a-t:t)}$.. II°. Et quia triangula $b\beta$B & ASR ſimilia ſunt, erit etiam $dx = dy\sqrt{(a-t:t)}$.. III°. Ac denique etiam $dy = dx\sqrt{(t:a-t)}$.. IV°.

IV°. Hæ poſtremæ nullo negotio ex ſecunda eliciuntur, ſubſtituendo duntaxat loco a & m elementa proportionalia dy & dx. Jam ope harum quatuor æquationum generalium varia problemata ſolvi poſſunt, quorum nonnulla proponere libet.

PROPOSITIO XLV. Problema.

438. *Aſſignare proportionem inter reſiſtentias, quas triangulum iſoſceles* BER *in fluido patietur, ſi, ut in præcedente, modo baſi* BR, *modo vertice* E *directione* AE *in id feratur.* Fig. 113.

Exſtructo ſuper dimidia baſi AB quadrato, AM demittatur ex A perpendicularis AF ad latus trianguli EB, & per punctum F agatur FG parallela axi EA, & facta AI vel BH æquali BG, erit recta HI ſcala reſiſtentiarum lineæ EB, eritque adeo reſiſtentia lineæ EB ad reſiſtentiam lineæ BA ut rec-lum BI ad rec-lum BP, ſeu ut AI ad AP; atque adeò in duplicata ratione lineæ EB ad BA, vel aggregati laterum BE & ER ad baſin BR trianguli iſoſcelis BER; atqui, ut reſiſtentia lineæ EB ad reſiſtentiam lineæ BA, ita reſiſtentia linearum BE, RE ſimul, ſeu totius trianguli, præcedente ejus vertice E, ad reſiſtentiam baſis BR, ergo harum reſiſtentiarum ratio æquivalet duplicatæ rationi laterum BE, RE ad baſin BR. Nam, ſi BA repræſentet quadratum celeritatis trianguli, BG vel AI (§. 435.) exponet ordinatam conſtantem ſcalæ reſiſtentiarum HI trianguli, vel potius lineæ rectæ patientis BE. Quod erat inveniendum & demonſtrandum.

Corollarium I.

439. Adeoque reſiſtentia quadrati, juxta directionem lateris in fluido delati, erit ad reſiſtentiam ejusdem, ſed in directione diagonalis pari celeritate incedentis, ut diameter quadrati eſt ad latus ejusdem. Nam ſi triangulum iſoſceles BER cogitetur rectangulum eſſe in E, erit (§. 438.) reſiſtentia laterum BE, ER juxta AE ad reſiſtentiam baſis BR, quæ diameter eſt quadrati cujus triangulum BER eſt ſemisſis, ut AI ad AP, ſeu BF ad BE; reſiſtentia verò diametri quadrati BR perpendiculariter incedentis ſuper AE, eſt ad reſiſtentiam lateris quadrati BE itidem normaliter ſuper AE delati, ſicut BR ad BE ſeu 2BA ad BE, ſeu 2BE ad BR, id eſt BE ad BA; ergo ex æquo reſiſtentia laterum BER, ſeu quadrati, juxta directionem

 dia-

diagonalis AE promoti in fluido, præcedente quadrati vertice E, ad reſiſtentiam lateris BE fluidi, impreſſionem ad angulos rectos excipientis, eſt ut BF ad BA, ſeu ut latus BE ad diagonalem BR, adeoque invertendo, reſiſtentia lateris BE ſuper AE perpendiculariter in fluido delati, ad reſiſtentiam quadrati juxta diagonalem incedentis, eſt ut diameter ad latus.

COROLLARIUM II.

440. Reſiſtentia coni recti BER juxta directionem axis AE in fluido delati, præcedente tamen ejus vertice E, erit ad reſiſtentiam ejusdem, præeunte ejus baſi BR, iterum ut AI ad AP, ſeu ut BF ad BE. Nam (§. 435.) reſiſtentia primi caſus eſt ad alteram, ut cylindrus ex rectangulo AH circa AP ad cylindrum ex quadrato AM circa eandem AP, ſed prior cylindrus eſt ad alterum ut AI ad AP, cum utriusque cylindri baſis ſit eadem. Ergo &c.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA.

Fig. 110. 441. *Aſſignare reſiſtentias Sectionum Conicarum juxta directionem axis in fluido motarum.*

Si ABC ſit *ellipſis* vel *hyperbola*, cujus centrum ſit in M; dicanturque ſemilatus transverſum AM, b; parameter c; abſciſſæ AN, x; ſemiordinatæ NB, y; æquatio ellipſeos & hyperbolæ erit $byy = 2bcx \mp cxx$, in differentiata æquatione $bydy = bcdx \mp cxdx$, loco differentialium dy, dx earum proportionales a & m ſubſtituantur, quæ ſunt nomina linearum RA & AS, fietque $aby = bcm \mp cmx$, atque adeò $m = aby : bc \mp cx$, & $mm = aabbyy : bbcc \mp 2bccx + ccxx$ (vel ſubſtituto ex æquatione curvæ valore ipſius $\mp 2bccx + ccxx$, in y) $= aabbyy : bbcc \mp bcyy$; hinc $aa + mm = (aabyy + aabcc \mp aacyy) : bcc \mp cyy$; hinc, quia (§. 437.) $t = a^3 : aa + mm$, erit $t = abcc \mp acyy : bcc + byy \mp cyy$ (ſeu ponendo e pro $b \mp c$) $= abcc \mp acyy : bcc + eyy$, & hæc foret æquatio ſcalæ reſiſtentiarum CIY; ponatur inſuper $bcc = eff$, & æquatio curvæ CIY erit $t = aeff \mp acyy : eff + eyy = \mp ac : e; \pm acff + aeff : eff + eyy$ (& ſubſtituendo in numeratore poſtremæ fractionis, loco $\pm c + e$ ſuum valorem b) $= \mp ac : e; + abff : eff + eyy$.

Igitur elementum areæ MHIY, ſeu rec-lum IH$h = \mp acdy : e; + abffdy : eff + eyy = \mp acdy : e; + abd\alpha : e$; nominando arcum circularem α, cujus tangens eſt y & radius f; quandoquidem (§. 166.) hujus arcus

cus elementum, ſeu du, eſt $=ffdy:ff+yy$. Ergo area ipſa erit MHIY $=(abu\mp acy):e$. Adeoque, ſi baſis CM dicatur g; & arcus radio f deſcriptus, cujus tangens eſt g, nominetur A, erit univerſa area MCIY $=(ab\mathrm{A}\mp acg:e$. Rectangulum verò CO $=ag$. Ergo reſiſtentia, quam curva CBABC in fluido patietur, erit ad reſiſtentiam lineæ FF, ſicut quantitas $ab\mathrm{A}:e$; $\mp acg:e$ ad ag; id eſt, ſicut $b\mathrm{A}\mp cg$ ad eg. Quod erat inveniendum.

Hæc ipſiſſima eſt reſiſtentiarum ratio, quam Celeb. Jac. Bernoullius pluribus verbis, aſt ſine demonſtratione & analyſi, declarat Act. Erudit. Lipſ. 1693. pag. 253, art. 5. Hæc proportio tantum obtinet, cum ſectio conica juxta directionem axis majoris movetur, ſignumque ſuperius ellipſin, hyperbolam verò inferius reſpicit.

Corollarium I.

442. Si b fit infinita præ parametro c, fiet $e=b\mp c=b$, atque adeò ratio $b\mathrm{A}\mp cg$ ad eg, erit eadem, quæ $b\mathrm{A}$ ad bg vel A ad g. Unde cum ellipſis cujus latus transverſum eſt infinitum, abeat in *parabolam*, manifeſtum eſt, parabolæ in fluido latæ juxta directionem axis, præeunte modo vertice mox baſi, reſiſti in ratione arcus circuli radio ſemiparametro parabolæ deſcripti, cujus arcus tangens æquetur dimidiæ baſi parabolæ, ad dimidiam hanc baſin.

Corollarium II.

443. Sin vero ABC fuerit *circulus*, ratio $b\mathrm{A}\mp cg$ ad eg abit in rationem cujus termini algebraice dati ſunt, quod omnino meretur, ut hoc loco oſtendatur. Quia circulus eſt ellipſis, cujus latus rectum æquatur parametro, fit hoc caſu $b=c$, atque adeò $b-c=e=0$; & hoc caſu adhibenda eſt ratio $b\mathrm{A}-cg$ ad eg, ſeu $\frac{b\mathrm{A}}{e}-\frac{cg}{e}$ ad g, verùm $-\frac{cg}{e}=-cg:b-c=g-\frac{bg}{b-c}=g-\frac{bg}{e}$, ratio $\frac{b\mathrm{A}}{e}-\frac{cg}{e}$ ad g æquabitur rationi $\frac{b\mathrm{A}}{e}+g-\frac{bg}{e}$ ad g. Atqui, juxta paragraphum 166, eſt $\mathrm{A}=g-\frac{g^3}{3ff}+\frac{g^5}{5f4}-$&c.; ergo $\frac{b\mathrm{A}}{e}+g-\frac{bg}{e}=g-\frac{bg^3}{3eff}+\frac{bg^5}{5f4e}$ vel (quia $bcc=eff$) fiet etiam $=g-\frac{bg^3}{3bcc}+\frac{bg^5}{5bccff}-$&c. $=g-\frac{g^3}{3cc}+\frac{g^5}{5ccff}-$&c. ſeu, (quia ff reſpectu cc aut gg infinita, atque adeò fractio $g^5:5ccff$ inde-

definite parva ſeu evaneſcens eſt) $= g - \frac{g^3}{3cc}$. Erit ergo reſiſtentia ſegmenti circularis CBABC ad reſiſtentiam ejus baſis, ſeu ei æqualis rectæ FF, ſicut $g; - g^3 : 3cc$, ad g, id eſt, ut $cc - \frac{1}{3}gg$ ad cc, vel $bb - \frac{1}{3}gg$ ad bb; aut, quod eodem recidit, velut quadratum diametri, demta una triente quadrati baſeos ſegmenti, ad quadratum diametri; prorſus ut invenit Cl. Bernoullius in loco ſupra (§. 141.) citato.

SCHOLION.

444. Solidum rotundum CIYIC eſt ad cylindrum CLLC ſicut omnia MH. HI. Hh ad $\frac{1}{2}$MC^2. CL, vel ſicut $\int tydy$ ad $\frac{1}{2}ayy$. Atqui cum t ſit (§. 441.) $= \mp ac : e; + abff : eff + eyy = a - \frac{ab}{e} + abff : eff + eyy$, erit $tydy = aydy; - abydy : e; + abffydy : eff + eyy$; ergo $\int tydy = \frac{1}{2}ayy; - abyy : 2e; + \frac{abff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$. Nam integrale ipſius $ydy : ff + yy$ eſt $\log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$. Ergo ſolidum rotundum, ex MHIY circa MY, ad cylindrum HKKH, vel ratio reſiſtentiæ ſolidi BAB ad reſiſtentiam baſeos BB, præeunte modo vertice A, modo baſi BB in directione MA, eſt ſicut $\frac{1}{2}ayy; - \frac{1}{2}abyy : e; + \frac{abff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad $\frac{1}{2}ayy$, vel ſicut $yy; - byy : e; + \frac{2bff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad yy; aut denique etiam, ut $\frac{2bff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)} \mp \frac{cyy}{e}$ ad yy. Ubi iterum ſignum ſuperius reſpicit ellipſin, hyperbolam verò inferius.

Idcirco conöidi parabolico in directione axis ſuæ lato reſiſtitur, præeunte modo vertice modo baſi, in ratione $2ff. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad yy, vel $2cc. \log. \sqrt{(cc + yy : cc)}$ ad yy.

445. Sphæræ ſegmento reſiſtitur, in iisdem ac in præcedentibus circumſtantiis, in ratione $cc - \frac{1}{2}yy$ ad cc; atque adeò reſiſtentia hemiſphærii, juxta directionem axis MA lati, erit tantum ſemiſſis reſiſtentiæ lineæ FF.

Nam in ſphæra ſit $b = c$ & $e = 0$, at $\log. \sqrt{(ff + yy : ff)} = \frac{yy}{2ff} - \frac{y^4}{4f^4} +$ &c. hinc ratio $yy; - byy : e; + \frac{2bff}{e}. \log. \sqrt{(ff + yy : ff)}$ ad yy abibit in rationem

tionem $yy - \frac{by^4}{2eff}$ ad yy; vel $2eff - byy$ ad $2eff$ (aut quia $eff = bcc$), in $2bcc - byy$ ad $2bcc = 2cc - yy$ ad $2cc = cc - \frac{1}{2}yy$ ad cc.

*PROPOSITIO XLVII. Problema.

446. *Invenire curvam patientem* ABC, *quæ ſui ipſius ſit ſcala reſiſtentiarum.* Fig. 110.

Oportet ergo curvas CAC & CYC ſimiles & æquales eſſe, adeò ut BH = HI, & AM = MY, ut & AN = PY. Poſitaque, ut in præcedentibus, RS parallela elemento curvæ quæſito Bb, erit RV = HI = BH, & Ru = hi = bh, adeoque βb = Vu, ductisque per u recta $u\sigma$ ipſi RS occurrente in puncto σ, & per hoc rectula $\sigma\pi$ parallela RA; & ſuper diametro RA deſcriptus circulus tranſibit per punctum T, cum angulus RTA (conſtr.) rectus ſit; quibus poſitis, & cum jam dictum ſit Vu = $\sigma\pi$ æquari $b\beta$, erit Tπ = Bβ = Hh; atqui producta $u\sigma$ uſque ad occurſum cum ſemicirculo Φ ex hoc puncto agatur $\Phi\rho$ parallela RA; Tπ = Tρ + $\rho\pi$ = Tρ + $\Phi\sigma$, ſeu, ut alibi (§. 463, num. 111.) oſtendetur = Tρ + TΦ, unde omnes Tπ ſeu Bβ id eſt ordinata BN = omn. Tρ, ſeu ordinatæ TV + omnibus arculis TΦ, ſeu arcui AT, eſt ergo ordinata curvæ quæſitæ BN aggregatum arcus AT ejusque ſinus, atque adeò curva ABC eſt cyclois ordinaria. Quod erat inveniendum.

Hinc reſiſtentia cycloidis CBABC erit ad reſiſtentiam baſis ejusdem, ut area cycloidis ad rec-lum circumſcriptum, atque adeò ut 3. ad 4.

PROPOSITIO XLVIII. Problema.

447. *Ex omnibus fruſtis conicis* BCSR *ſuper eadem data baſi* BR *ejusdemque altitudinis* AD *invenire verticem* E *illius, cui minime reſiſtatur, ſi in directione axis* AD *in fluido incedat data quadam celeritate.* Fig. 111.

Super AB, facto quadrato AM ex A ſuper EB, demittatur perpendicularis AF, & ducatur FG parallela axi coni EA, factaque BH = BG agatur HI parallela BA, & (§. 435.) HI erit ſcala reſiſtentiarum trianguli BER, cylindrusque ex converſione rec-li AH circa AI exponit reſiſtentiam coni BER in fluido, & cylindrus ex AL reſiſtentiam coni CES, atque adeo annulus ex converſione rectanguli KH circa AP exponet reſiſtentiam curticoni BCSR, ex-

 cepta

cepta reſiſtentia, quam circulus CS ſubibit in fluido, cujus impreſſiones ad angulos rectos excipit, quæ circuli CS reſiſtentia exponitur cylindro ex AN circa AP. Ergo reſiſtentia univerſi fruſti conici BCSR exponi debet duobus ſolidis, ſcilicet annulo ex KH circa AP, & cylindro ex AN circa eandem, & (ſecundùm hypotheſin) hæc duo ſolida *minimum* quoddam efficere debent. Sit V punctum medium ipſius BK, eritque VA diſtantia centri gravitatis rectanguli BL ab axe AP, adeoque $p.$ AV exprimet circumferentiam, quam centrum gravitatis una rec-li converſione deſcribet circa DA, ubi p ſignificat exponentem rationis peripheriæ circuli ad radium. Unde cum ſolida rotunda (§. 47.) inveniantur ex ductu figuræ rotantis circa aliquem axem in viam centri ejus gravitatis, factum ex rec-lo BL in $p.$ AV, id eſt $p.$ AV. CK. BH æquabitur annulo ex rec-lo BL circa AP, peripheria vero, quam centrum gravitatis rectanguli AN deſcribit, erit $\frac{1}{2}p.$ AK, adeoque $\frac{1}{2}p.$ AK². KN erit valor cylindri ex AN circa AP. Atque adeò $p.$ AV. BK. BH $+ \frac{1}{2}p.$ AK². NK exponit reſiſtentiam quam curticonus BCSR in fluido ſubibit, ac propterea efficere debet aliquod *minimum*. Aut etiam annulus ex rectangulo LM circa AP rotato debet eſſe in ſuo genere *maximus*, quandoquidem prædictorum ſolidorum ex KH & AN complementum eſt ad datum cylindrum ex quadrato AM circa AP rotato. Adeoque $p.$ QI. HL. HM quod ſolidum annulum illum ex LM exprimit, debet eſſe *maximum*. Jam, ſi dicantur AB, a; AD, $2b$, ſeu AO & OD, unaquæque ſeorſim b; AE, x; facili calculo reperietur ſolidum $p.$ QI. HL. HM $= (x-b).\, 2a^3bp : aa + xx$, unde omiſſa quantitate conſtante in numeratore, quacum indeterminata $x-b$ multiplicata eſt, $(x-b) : aa + xx =$ maximo. Hinc log. $(x-b)$ − log. $(aa+xx) =$ conſtructio, atque adeò $dx : x - b = 2xdx : aa + xx$, hinc $aa + xx = 2xx - 2bx$, id eſt, $xx - 2bx = aa$, vel $xx - 2bx + bb = aa + bb$, vel extrahendo radicem $x - b = \sqrt{(aa+bb)}$, ſeu $x = b + \sqrt{(aa + bb)}$. Quæ æquatio ipſiſſimam conſtructionem ſuppeditat, quam Celeb. Newtonus ſine analyſi & demonſtratione tradidit in Schol. poſt Prop. 35. Lib. Sec. *Princ. Phil. Nat. Math.* quæ ita habet: ex puncto medio O altitudinis AD fruſti conici ducatur OB, cui æqualis fiat OE, eritque E vertex coni quæſiti BER.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA.

Fig. 112. 448. *Datis poſitione recta* CI *duobusque punctis* A *&* B, *invenire in*

in hac recta poſitione data tertium punctum C, *ut lineæ ex eo ad data puncta ductæ* AC, CB *cum rectis* AD, BF *rectæ* CI *ejusque parallelæ* DF *normalibus, figuram rectilineam* DACBF *forment, quæ circa axem* DF *in gyrum acta producat ſolidum, cujus ſuperficies excluſis circulis à lineis* AD, BF *deſcriptis,* minimam *in fluido reſiſtentiam patiatur, incedente ſolido juxta directionem axis* FD.

Analyſ. Puncta data A, B à rectâ CI æqualiter diſtare ponantur, ut ſint æquales CG & BI. Ex pũncto T medio datæ lineæ LM (quadratum celeritatis exponentis, quâ fluidum ſolido patienti alliditur) tanquam centro deſcriptus ſit ſemicirculus LPM, quem linea MO alteri DF in directum poſita contingat in M, eritque adeò LM parallela ipſis AD & BF. Per L agantur LO, LN parallelæ lineis AC, BC, ſecantes ſemicirculum in P & Q, per quæ puncta transeant PR, QS parallelæ MN; rectæ MP & MQ ipſis PL & QL perpendiculares erunt. Puncto C, aliud c indefinite vicinum intelligatur, tum etiam rectæ cA, cB ductæ ſint, & hisce parallelæ Lo, Ln ſemicirculum ſecantes in punctis q & p, per quæ pariter transeant ordinatæ qs & pr, ductisque Pπ & Qρ parallelis diameter LM, $p\pi$ & $q\rho$ erunt elementa ordinatarum PR & QS. Sit iterum p exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium, biſectisque CG in α, & BI in β, denotabunt p. Eα circumferentiam radii Eα, & p. Fβ circumferentiam radii Fβ, adeoque annuli à lineis CG, Bi circa DF revolventibus geniti, erunt p. Eα. CG, & p. Fβ. BI.

II. Jam per ea, quæ in præcedentibus (§. 435.) ſunt oſtenſa, reſiſtentia, quam in fluido ſubibit annulus conicus à recta AC circa DF in orbem acta deſcriptus, exponitur per p. Eα. CG. LS & reſiſtentia annuli ex BC circa DF per p. Fβ. BI. LR, adeoque reſiſtent. annuli AC + reſiſtent. annuli BC = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LR. Similiter reſiſtent. annuli ex Ac + reſiſtent. annuli Bc = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. Lr. Jam, quia ex natura *minimi* reſiſtentia annuli AC + reſiſtent. annuli BC = reſiſtent. annuli Ac + reſiſtent. annuli Bc, erit etiam p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LR = p. Eα. CG. LS + p. Fβ. BI. LS, vel quia (ſecundùm hypotheſin) CG & BI æquales ſunt, dividendo per p. CG aut p. BI; erit Eα. LS + Fβ. LR = Eα. Ls + Fβ. Lr atque adeò Eα. Ss = Fβ. Rr, vel Ss : Rr = Fβ : Eα.

III. Ob parallelas LO, AC, & Lo, Ac; erit Oo : LM = cC : CG, vel Oo : Cc = LM : CG & Nn : Cc = LM : BI vel CG, ergo Oo = Nn. Atqui Nn : Pp ut triangulum NLn ad 2. triangula PTp, quorum ſcilicet baſis Pp, altitudo verò pT; nam trianguli hujus PTp duplum

eſt triangulum, cujus baſis etiam Pp, ſed altitudo dupla ipſius pT, ſeu diametro LM æqualis; atque adeò ejusdem altitudinis cum triangulo LNn: & angulus NLn = angulo (modo nominati trianguli) ad verticem in circumferentia alterius ſemicirculi in figura non expreſſi; ergo $Nn : Pp = NL^2 : LM^2 = NL : PL = LM : LR$. Eodem argumento eſt $Oo : Qq = LM : LS$, ſeu invertendo $Qq : Oo$ vel $Nn = LS : LM$; ergo ex æquo $Qq : Pp = LS : LR$. Sed propter triangula ſimilia $Qq\rho$ & TQS, eſt Ss vel $Q\rho : Qq = QS : QT$, ergo ex æquo $Ss : Pp = LS . QS : LR . QT$. Item propter triangula ſimilia $Pp\pi$, TPR eſt $Pp : P\pi$ vel $Rr = PT$ vel $QT : PR = LR . QT : LR . PR$, ergo denuo ex æquo fit, $Ss : Rr = LS . QS : LR . PR$; atqui ſupra (num. 11. in fine) invenimus $Ss : Rr = F\beta : E\alpha$, ergo $F\beta : E\alpha = LS . QS : LR . PR$, & $E\alpha . LS . QS = F\beta . LR . PR$.

IV. Igitur, ſi dicantur LM, a; $E\alpha$, e; $F\beta$, f & MO, m; quarta proportionalis MZ ad datas BH, HA & LM dicatur g, & hæc g vel MZ deprehendetur eſſe media arithmetica inter incognitas MO & MN; unde, cum MO ſit m, altera MN invenietur $= 2g - m$. Et ſubſtitutis his valoribus in canone paulo ante reperto $E\alpha . LS . QS = F\beta . LR . PR$, pervenietur ad æquationem quinque dimenſionum, quæ, ſalvo calculo, erit ut ſequitur:

$$\begin{array}{llllll} +em^5 & -8eg.m^4 & +24egg.m^3 & -8aage.mm & +a^4e.m & -2a^4fg = 0. \\ +f & -2fg & +2aaf & -4aafg & +a^4f & \\ & & +2aae & -32g^3e & +16g^4e & \\ & & & & -8aaegg & \end{array}$$

Cujus radices determinant valores quæſitæ MO; qua inventa ductaque OL, ſi per datum punctum A ducetur AC parallela ipſi OL, quæ AC occurrat rectæ CI, ei occurret in optato puncto C. Quod erat inveniendum.

Exiiſſet pariter æquatio 5. dimenſionum, ſi vel maxime lineas CG & BI inæquales aſſumpſiſſemus.

Corollarium I.

449. In canone ſupra invento $L\alpha . LS . QS = F\beta . LR . PR$ jam continetur ſolutio problematis de *ſolido minimæ reſiſtentiæ*. Hoc enim caſu CG & BI perinde ac AG & CI ſupponendæ ſunt indefinite parvæ, quo fiet, ut αE & AD, item βF & CE inſtar æqualium tractari debeant; & cum omnia ſolida $L\alpha . LS . QS$; $F\beta . LR . PR$, &c. ſingula ſcilicet

cur-

curvæ elementa AC, CB, &c. reſpicientia, æqualia ſint, ponatur unumquodque eorum dato cubo LM^3 æquale, eritque adeò $L\alpha . LS . QS = LM^3$, aut vocando $E\alpha$ vel DA, y; CG, dy; AG, dx; & ut prius LM, a, & denique MO, m; $a^5my : (aa+mm)^2 = a^3$, hinc $y = (aa+mm)^2 : aam = aa : m; + 2m; + m^3 : aa$, & $dy = -aadm : mm; + 2dm; + 3mmdm : aa$, & quia propter ſimilitudinem triangulorum CGA & LMO, eſt $mdy = adx$, ideo invenietur quoque $dx = -adm : m; + 2mdm : a; + 3m^3dm : a^3$; ergo $x = mm : a; + 3m^4 : 4a^3 - lm$, ubi lm ſignificat log-um indeterminatæ m in log-mica, cujus ſubtangens eſt a. Et hæc ſolutio ad amuſſim convenit cum ea, quam Celeb. Joh. Bernoullius in Act. Erud. Lipſ. 1699. p. 515. exhibuit, & in Actis anni ſequentis uberius explicuit.

Corollarium II.

450. In æquatione $y = (aa+mm)^2 : aam$, vel $y : a = (aa+mm)^2 : a^3m$, ſi loco $aa+mm$, a, & m ſubſtituantur differentialia ds^2, dy, & dx, quæ illis proportionalia ſunt, proveniet $y : a = ds^4 : dxdy^3$; adeòque $ads^4 = ydxdy^3$, quæ eſt æquatio differentialis curvæ quæſitæ in quam laudatiſſimus Bernoullius citato loco incidit, & ex ea poſtea expreſſiones coordinatarum in præcedenti corollario repertas elicuit. Hisce omnibus Illuſtris Marchionis Hoſpitalii ſolutio etiam conſona eſt, quam in Actis Lipſ. & in Commentariis Acad. Reg. Scient. anni 1699. publicari voluit.

Solas hactenus reſiſtentias illas contemplati ſumus, quas corpora in fluidis delata ſubeunt, cum juxta directionem axis moventur. Sed ſi in aliis directionibus incedant, res evadet paullò altioris indaginis, ut ex ſequenti problemate eleganti abunde patebit.

PROPOSITIO L. Problema.

451. *Si datum trilineum quodcunque* ABH, *curva* AVB *ejus axe* AH *&* *ordinata* BH *terminatum, quomodocunque in fluido feratur juxta directionem* SM *ex* S *verſus* M, *invenire mediam directionem* $X\omega$ *fluidi curvæ* AVB *allabentis, & impreſſionem, quam fluidum juxta inventam mediam directionem in trilineum exſeret.* Fig. 113.

Analyſis Geometrica. I. Per quodlibet curvæ AVB elementum Bb agantur BB, bb rectæ ipſi SM parallelæ, ductiſque BC & Ce rectæ bb & elemento curvæ Bb normalibus, exponatque MO perpendicu-

cularis ad axem curvæ AH quadratum celeritatis, quâ trilineum in fluido incedit, vel quod idem eſt, quadratum velocitatis, quâ filamentum *b*BB*b* elemento curvæ B*b* allabitur, exponetque (§. 429.) MO. B*e* impreſſionem, quam filamentum *bb*BB, juxta directionem BF in elementum B*b* exſeret, ſed impreſſioni iſti æquipollent laterales juxta BG & GF, quarum hæc axi AH parallela, illa verò perpendicularis eſt; & quia impreſſiones juxta BF, BG & GF ſunt ut hæ lineæ reſpective, vel propter triangulorum BFG & B*ef* ſimilitudinem, ſicut B*e*, B*f* & *ef*, atque impreſſio juxta BF = MO. B*e*, erit impreſſio juxta GF = MO. *ef*, & impreſſio juxta BG, = MO. B*f*. Et ſic reſpective in quolibet alio curvæ elemento.

II. Agantur porrò per M recta MN parallela elemento curvæ B*b*, vel tangenti curvæ in B, ex N perpendicularis NP ad lineam SM, quantum opus eſt productam, PQ normalis MN, & denique QR parallela MO; eritque figura NPMO ſimilis figuræ BC*b*E, cum ſingula latera unius figuræ parallela ſint ſingulis alterius. Propterea latera in hisce duabus figuris ſimiliter poſita proportionalia erunt; hoc eſt, *b*E : *ef* = MO : QR, atque adeò MO. *ef* = QR. *b*E. Vel etiam, ducta per B recta indefinita BL parallela axi AH, atque in ea ſumta KL ubique æquali reſpectivæ QR, ita ut inde nova curva δ*u*L reſultet, erit MO. *ef* (= QR. *b*E) = KL. K*k* ſeu rec-lo figuræ AδLK inſcripto.

Item EB : *f*B (= ON : RN) = MO : QR, ac conſequenter MO. Bf = QR. EB, vel etiam = rec-lo IH*h* areæ AαIH inſcripto, ſi, etiam in ſingulis ordinatis BH ultra axem AH productis, ſumta fuerint ſegmenta HI æqualia homologis QR ſeu KL.

III. Quoniam igitur ſingulæ fluidi impreſſiones in curva AVB juxta directiones curvæ perpendiculares æquipollent lateralibus axi curvæ parallelis exponendis (num. I. hujus) rec-lis MO. *ef*, vel (num. II.) rec-lis LK*k*, & perpendicularibus axi exponendis (num. I.) per rec-la MO. B*f*, ſeu (num. II.) per rec-la IH*h*, impreſſio, quam univerſa curva AVB à fluido ſubibit, æquipollebit omnibus LK*k* & omnibus IH*h*; atqui omnium potentiarum *k*KL axi AH parallelarum media directio Z*u*, axi itidem parallela, (§. 56.) transit per centrum gravitatis areæ AδLK, quæ omnia LK*k* continet; & omnium potentiarum IH*h* axi AH perpendicularium media directio VY, axi AH normalis, ſeu ordinatis HI curvæ αYI æquidiſtans, transit per centrum gravitatis figuræ AαIH, quæ omnia IH*h* continet. Ergo impreſſio, quam fluidum in curvam AVB exerit

rit, eundem effectum præſtat, quem præſtaret potentia, quam exponit rec-lum MO. XZ, æquale areæ AδLK, agens in curvam juxta directionem XZ, ſimul cum potentia MO. XY, æquali areæ AαIH, agente in curvam AVB juxta directionem XY; quandoquidem hæ potentiæ MO. XZ & MO. XY æquivalent omnibus LK*k* & omnibus IH*h*, & in harum omnium mediis directionibus XZ & XY curvæ AVB applicatæ intelliguntur. Sed (§. 49.) media directio potentiarum MO. XZ & MO. XY eſt Xω, transiens per centrum gravitatis ω punctorum Z & Y, quibus rectæ XZ & XY terminantur, & quorum punctorum gravitas exponitur per datam MO, & impreſſio, quam proinde fluidum juxta hanc mediam directionem Xω in curvam AVB exeret, exponetur rec-lo 2MO. Xω.

IV. Sin verò curva A2V2B ſit ſubter axem AH conſtituta, quæ juxta directionem eidem ac in præcedenti caſu SM, parallelam feratur, transferenda erit OS ad oppoſitam partem O2S, & ducenda M2S, tum ex puncto N demitti debet ſuper M2S perpendicularis N2P, & 2P2Q ſuper MN, ac denique 2Q2R parallela MO; poſita ſcilicet MN parallela tangenti curvæ A2V2B ad alteram axis AH partem translatæ in puncto 2B, erit 2Q2R communis ordinata curvarum δ*u*L & αYI, ſed ad curvam inferiorem A2V2B pertinentium, quas deinceps, confuſionis vitandæ gratia, per 2α2*u*2L & 2A2α2Y2I inſigniemus, quanquam in ſchemate expreſſæ non ſunt, quia mente facile ſupplentur. Erit ergo impreſſio fluidi in curva inferiore A2V2B, juxta mediam directionem ejus 2X2ω, exponenda per 2.MO. 2X2ω, eandem prorſus ob rationem, propter quam impreſſio in curva AVB juxta mediam directionem Xω oſtenſa eſt exponi rec-lo 2.MO in Xω. Quod verò loco ipſius SM in curva AVB nunc ſumenda ſit 2SM inde eſt, quia revolutione figuræ A2V2B cum lineis 2B2B ipſis BB (ſecundùm hypotheſin) parallelis circa axem AH, adeo ut ſi curva A2V2B alteri AVB ſimilis & æqualis fuerit, cum ea congruat, lineæ 2B2B veniunt in ſitum B2B ſubter rectam BL, eosdem vel æquales angulos conſtituentes cum angulis BBL, quos lineæ BB ſupra BL extantes cum hac BL continent, adeò ut anguli quilibet homologi BBL & LB2B vel anguli MSO & M2SO æquales futuri ſint.

V. Si jam bilineum BVA2V2B juxta directionem ipſis BB, 2B2B vel AT parallelas in fluido incedat, & quæratur media directio Cσ impreſſionum fluidi in curva BA2B, ſic res expediri poteſt beneficio numerorum quarti & tertii hujus propoſitionis. Per nume- Fig. 114.

rum

rum tertium etiam habentur media directio $X\beta$ & impreſſio fluidi in curva AVB, quæ illic exponebatur per 2. MO. $X\omega$. Sit igitur $X\beta = 2M\omega$ in fig. 113. eritque MO. $X\beta$ impreſſio fluidi, juxta mediam directionem in curva AVB, deſignante MO ubique velocitatis quadratum, qua celeritate videlicet fluidum curvæ prædictæ alliditur. Similiter, juxta numerum quartum hujus, invenientur media directio $2X2\beta$ & impreſſio fluidi, juxta hanc mediam directionem 2 in $2X2\omega$. MO, vel (ſi $2X2\beta$ ſit dupla ipſius $2X2\omega$) MO. $2X2\beta$. A puncto interſectionis C duarum $X\beta$ & $2X2\beta$ ſumantur in hisce æquales $C\theta$ & $C2\theta$, ſcilicet $C\theta = X\beta$ & $C2\theta = 2X2\beta$, jungaturque $\theta 2\theta$, adeoque per §. 49. media directio potentiarum MO. $C\theta$ & MO. $C2\theta$, quæ æquipollent fluidi impreſſionibus, quas ambæ curvæ AVB & A2V2B ſubeunt, tranſit per centrum gravitatis punctorum θ & 2θ, id eſt, per punctum medium σ rectæ $\theta 2\theta$, & per punctum C, atque adeo hæc media directio eſt $C\sigma$, potentiaque ſeu impreſſio fluidi in univerſa curva BVA2V2B erit 2. MO. $C\sigma$. Quæ omnia erant invenienda.

Aliter & brevius.

Numerus tertius hujus propoſitionis, ac conſequenter quæ poſt eum ſequuntur, omnia velut corollarium duntaxat deduci poſſunt ex Propoſitione VIII. Libri Primi §. 59. Nam figuræ ſimiles NPMO & BC*b*E præbent *b*B : *e*B (= MN : QN) = MO : QR atque adeò MO. B*e* = B*b*. QR. Atqui MO. B*e* (num. 1. hujus) exponit impreſſionem filamenti fluidi *bb*BB in curvæ elemento B*b*, ergo hæc impreſſio etiam exponi poteſt per B*b*. QR, atque adeo fluidum eandem vim in elementum B*b* exſerit, quam ſi ſingula elementi puncta juxta directiones eidem perpendiculares urgerentur potentia QR, adeo ut tota res reducatur ad Coroll. 1. prædictæ Prop. 8. Lib. I. Idcirco duntaxat propoſitionis ejusque corollarii conſtructiones forent relegendæ, atque loco curvarum ABB, XF & XD in figura 15. ſubſtituendæ AVB, *u*YI & δuL figuræ 113. ac denique, loco potentiarum BG in illa, ſubrogandæ potentiæ QR in hac figura, incideremusque in easdem penitus concluſiones, quas in præcedentibus numeris præſentis propoſitionis elicuimus.

Co-

Corollarium I.

452. Idcirco, ducta per punctum C recta Co parallela axi AH, invenietur ſinus totus ad tangentem anguli $oC\sigma$, quem media directio $C\sigma$ bilinei BA2B cum axe AH, ſeu linea huic axi parallela Co continet, ut aggregatum arearum $A\delta LK$ & $2A2\delta 2L2K$ ad differentiam arearum $A\alpha IH$ & $2A2\alpha 2I2H$. Nam demiſſis ex punctis θ, σ, 2θ perpendicularibus θo, $\sigma\xi$, $2\theta 2o$ ad Co, & quia σ eſt punctum medium rectæ $\theta 2\theta$, ſeu centrum gravitatis punctorum θ, 2θ, erunt (§.46.) $2.C\xi = Co + C2o$, & $2.\xi\sigma = \theta o - 2\theta 2o$; adeoque $C\xi : \xi\sigma$, vel ſinus totus ad tangentem anguli $\xi C\sigma = Co + C2o : \theta o - 2\theta 2o = MO.\, Co + MO.\, C2o : MO.\, \theta o - MO.\, 2\theta 2o = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K$ ad $A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H$. Nam (conſtr.) $MO.\, Co$; $MO.\, C2o$; $MO.\, \theta o$ & $MO.\, 2\theta 2o$ æquantur areis $A\delta LK$, $2A2\delta 2L2K$; $A\alpha IH$ & $2A2\alpha 2I2H$.

Corollarium II.

453. Sin verò bilineum fuerit ABE2BA, cujus partes, ſuperior ACB & inferior A2B, inæquales ſint, punctumque altiſſimum C arcus curvæ ſuperioris ACB non exiſtat in arcus termino B, ſinus totus erit ad tangentem anguli, quem media directio impreſſionis fluidi in bilineo B2B cum axe AE continet, ut $A\delta LK + A2\delta 2L2K - FKL$ ad $A\alpha YI - A2\alpha 2Y2I$. Ubi δL eſt ſcala impreſſionum fluidi axi bilinei AE parallelarum, quæ ex perpendicularibus curvæ arcui AC derivantur, & FL eſt ſcala impreſſionum axi etiam parallelarum, ſed derivatarum ex perpendicularibus arcui curvæ BC; & quia impreſſiones illæ axi parallelæ, quibus arcus BC afficitur, directe contrariæ ſunt parallelis axi AE, quibus AC urgetur, ideo differentia arearum $A\delta LK$ & FLK ſumenda eſt ad habendam expreſſionem impreſſionum axi AE parallelarum, quibus tota curva ACB ſupra axem extans afficitur. Curvæ verò αYI, $2\alpha 2Y2I$ ad axem IA exſtructæ ſunt ſcalæ impreſſionum axi AE normalium ex perpendicularibus curvarum ACB & A2B impreſſionibus derivatarum, ac denique $2\delta 2L2K$ eſt ſcala impreſſionum axi parallelarum pertinentium ad curvam A2B. Curvarum αYI & $2\alpha 2Y2I$ ordinatæ in punctis axis I & 2I nullæ ſunt, quia lineæ BB & 2B2B, quæ fluidi bilineo allidentis directionem denotant, bilineum in punctis B & 2B contingunt. Propter eandem rationem etiam curvæ FL ordinata Fig. 115.

 in

in puncto F, in quo ſcilicet recta BF axi parallela alteri AK occurrit, nulla eſt.

COROLLARIUM III.

Fig. 113. 454. Si jam dicantur MO, a; OS, b; MS, c; coordinatæ AH, x; BH, y, & ON, m; ac MN, n: erunt SN $=b+m$, vel N2S reſpectu curvæ inferioris $=b-m$. Hinc ſimilitudo triangulorum SMO, SNP præbebit PN vel N2P $=(ab \pm am):c$, ubi ſignum ſuperius reſpicit curvam ſuperiorem AVB, inferius verò inferiorem. Porrò habetur MO : QR ($=$ MN : QN) $=$ MN^2 : PN^2, atque adeò QR $=$ MO. PN^2 : MN^2 $=(b \pm m)^2 . a^3 : aacc+ccmm$, vel aſſumendo magnitudinem e, atque ponendo ecc æquale a^3, $=(b \pm m)^2 . e : aa+mm$ $=(bbe \pm 2bem + emm) : aa+mm = e, \pm 2bem : nn; + (bb-aa) . e : nn$, vel ponendo denique $bb-aa=ff$, invenietur tandem ſcalarum reſiſtentiæ ſeu fluidi impreſſionum communis ordinata QR $=$ KL $=$ HI $=e; \pm 2bem : nn; + eff : nn$.

Fig. 116. Jam data æquatione curvæ patientis AVB vel A2V2B, eaque differentiata, ſi loco elementorum dy & dx ordinatæ & abſciſſæ ſubſtituentur eorum proportionales a & m, ſeu MO & ON, habebitur æquatio expreſſa indeterminatis x, y & m, & quantitatibus datis ſeu conſtantibus, ex qua elicietur valor ipſius m in x & y ac conſtantibus, in quo ope æquationis curvæ patientis AVB vel A2V2B alterutra ex indeterminatis x vel y ſemper eliminari poteſt. Invento verò valore ipſius QR in y & conſtantibus, areæ AδLK, 2A2δ2L2K; & AαIH, 2A2α2I2H inveniri poterunt, ſi non algebraice ſaltem tranſcendenter per ſeries, aut etiam approximationibus. Sed horum omnium uſus uno atque altero exemplo illuſtrari debet.

455. EXEMPLUM I. Eſto rectangulum BA2B incedens juxta directionem AT in fluido reſiſtente; quæritur media directio SA impreſſionum hujus fluidi rectangulo allabentis. Angulus BA2B recta AH biſectus ſit, & hæc linea AH verſus W producta conſideretur inſtar axis linearum AB & A2B, quarum hæc repræſentat curvam patientem inferiorem, illa vero ſuperiorem; atque demiſſis ex B, 2B & ex puncto T in recta AT, pro libitu accepto, perpendicularibus BH, 2B2H ac TW ſecante AN in puncto S, erunt AH $=$ BH & A2H $=$ 2B2H, propter angulos ſemirectos BAH & 2B2A2H. Sint inſuper AH $=$ BH $=$ X & A2H $=$ 2B2H $=x$, & BH $=$ Y, 2B2H $=y$, unde X $=$ Y & $x=y$; hinc dX $=d$Y, & $dx=dy$; unde utroque caſu erit $a=m$, atque

atque adeò $nn (= aa + mm) = 2aa$. Ergo ſubſtitutis hisce valoribus in formula ipſius QR valores determinante, invenietur pro linea AB ejus valor huic caſui applicatus $QR (= e, + 2bem : nn; + eff : nn) = e; + be : a; + eff : 2aa$, (ſeu reſtituendo $a^3 : cc$, & $bb - aa$ valores quantitatum e & ff) $= (a^3 + 2aab + abb) : 2cc$. Adeoque elementum areæ AδLK ſeu rec-lum $Lk = (aa + 2ab + bb).ad$Y $: 2cc$, & area ipſa $= (aa + 2ab + bb.) a.$ AH $: 2cc$. Similiter area 2A2δ2L2K erit $= (aa - 2ab + bb). a.$ A2H $: 2cc$. Area AαIH pro linea AH $= (aa + 2ab + bb). a.$ AH $: 2cc$; & area 2A2α2I2H $= (aa - 2ab + bb). a.$ A2H $: 2cc$. Hinc (§. 452.) AW : SW ſeu ſinus totus ad tangentem anguli SAW $=$ AδLK + 2A2δ2L2K : AαIH − 2A2α2I2H, atque adeo analytice erit AW : SW $= (aa + 2ab + bb). a.$ AH, $+ (aa - 2ab + bb.) a.$ A2H ad $(aa + 2ab + bb). a.$ AH, $- (aa - 2ab + bb). a.$ A2H $= (2ab + cc).$ AH, $+ (cc + 2ab).$ A2H ad $(cc + 2ab).$ AH, $- (cc - 2ab).$ A2H. Ducatur TV parallela AL, eritque ob angulos ſemirectos MTW & WTV, MW = TW = WV, atque adeò cum AW (§. 454.) dicatur b & TW, a; erunt $a + b =$ AV, ſeu $aa + 2ab + bb = AV^2 = cc + 2ab$, & $aa - 2ab + bb = cc - 2ab = AM^2$; hinc $AW : SW = AV^2.AH + AM^2.A2H : AV^2.AH - AM^2.A2H = TL^2.AH + ML^2.A2H : TL^2.AH - ML^2.A2H = R.T^2 + R^2.t : R.T^2 - R^2.t = T^2 + Rt : T^2 - Rt$. Poſitis AL : TL = R : T & AH : A2H = R : t; ita ut T & t tangentes ſint angulorum datorum TAL & AB2B, ducta ſcilicet rectanguli diametro B2B, exiſtente ſinu toto ſeu radio R. Ducatur adhuc NX parallela TV vel AL, eruntque etiam MQ, NQ, & QX æquales; jam quia AW : SW = AQ : NQ vel QX, erit etiam = AX + AM : MX = LN + LM : LN − LM, atque adeò AW + SW : AW − SW = 2LN : 2LM = LN : AL vel LM. Verum, quia paulò ante reperiebatur $AW : SW = T^2 + Rt : T^2 - Rt$, erit etiam $AW + SW : AW - SW = T^2 : Rt$; ergo etiam $LN : AL = T^2 : Rt$: ſed eſt AL : LT = R : T = Rt : Tt; ergo ex æquo $LN : LT = T^2 : Tt = T : t$. Ducatur diagonalis rectanguli 2AA, eaque producatur in Z, & exiſtente AL radio, ſeu ſinu toto, erunt TL & ZL tangentes angulorum TAL & ZAL vel A2A2B, quæ tangentes dicebantur T, & t; atque adeò LN : LT = LT : LZ; ſunt ergo NL, TL & ZL in continua ratione, ac per conſequens NL ad TL in ſubduplicata ratione NL ad ZL, ſed hæc ratio NL ad ZL componitur rationibus NL ad AL, & AL ad ZL, id eſt, 2A2B ad A2B; ergo ratio NL ad TL eſt ſubduplicata ejus, quæ componitur ex NL ad AL & longitudinis rectanguli AB ad latitudinem A2B;

 atque

atque hæc eſt analogia, quam Celeb. Jac. Bernoullius in Actis Lipſ. 1696. pag. 336. ſine ulla analyſi & demonſtratione exhibuit, & in quam haud dubie via multo breviore incidit. Nam licet hunc caſum particularem non parum brevius, quam hoc loco à nobis factum ſit, ſolvi poſſe non ignoro, non abs re tamen fore arbitratus ſum, ſi methodum noſtram generalem talia tractandi etiam in aliquo caſu fuſius illuſtrarem, de cujus veritate aliunde conſtare poſſit.

456. Præſens exemplum particulare ſic brevius etiam expedietur: per angulos rectanguli B & 2B agantur BC, 2B2C æquidiſtantes ipſi AT, & per punctum A eidem perpendicularis C2C, ac denique ex punctis C, 2C demittantur ad latera rectanguli perpendiculares CD2C2D, ac aſſumta unitate pro deſignanda celeritate, qua rectangulum in fluido incedit, vel quod idem eſt, pro velocitate, qua fluidum lateribus rectanguli AB, A2B allabitur, & (§. 429.) A2D exponet impreſſionem fluidi, quam latus A2B in directione ipſi normali excipiet, & AD exponet impreſſionem, quam latus AB excipiet juxta directionem lateri A2B parallelam, ſeu AB perpendicularem. Unde cum media directio AN impreſſionum fluidi in lateribus AB & A2B naſcatur à potentiis lateralibus AL & LN, neceſſe eſt ut habeatur, $AL : LN = A2D : AD$; atqui $A2D : A2B = (A2B)^2 : (A2C)^2 = AL^2 : AT^2$, & $A2B : 2A2B$ vel $AB = ZL : AL = AL . ZL : AL^2$, ergo ex æquo $A2D : AB = AL . ZL : AT^2$; eſtque porrò $AB : AD = AB^2 : AC^2 = AT^2 : TL^2$, adeoque iterum ex æquo $A2D : AD = AL . ZL : TL^2$. Atqui (ſecundùm hypotheſin) $AL : LN = A2D : AD$, ergo $AL : LN = AL . ZL : TL^2$, & quia $TL : AL = TL^2 : AL . TL$, erit denique ex æquo $TL : NL = AL . ZL : AL . TL = ZL : TL$, atque adeo TL eſt media proportionalis inter tangentes angulorum datorum ZAL vel A2A2B & NAL, ut ſupra invenimus. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 113, & 114. 457. Exempl. II. Reſumatur bilineum BA2B, quod ponatur eſſe parabolicum, cujus æquatio $2ax = yy$; exiſtentibus coordinatis ad axem AH, x & HB vel 2H2B, y ac parametro $2a$. Æquatio bilinei differentiata præbet $adx = ydy$, vel ſubſtitutis loco elementorum dx & dy lineis proportionalibus m & a; $am = ay$ atque adeò $m = y$; hinc $nn = aa + yy$. Idcirco $QR = KL = HI$ $(= e; \pm 2bem : nn; + eff : nn) = e; \pm 2bey : aa + yy; + eff : aa + yy$. Hinc (§. 454.) rec-lum $Lk = edy; \pm 2beydy : aa + yy; + effdy : aa + yy$.

Atqui omnia edy ſeu ſumma $edy = ey$; ac omnia $ydy : aa + yy$ æquantur log-mo rationis $aa + yy$ ad aa qui log-us dicatur $z : a$; reſpicitque lo-

logarithmicam, cujus ſubtangens eſt unitas. Et denique omnia $dy : aa + yy$ æquantur arcui circulari ω applicato ad aa quadratum radii, cujus arcus tangens ſit y; nam ejusmodi arcus elementum ſeu $d\omega = aady : aa + yy$. Propterea invenietur area $A\delta LK(2A2\delta 2L2K) = ey; \pm 2bez : a; + ff\omega : aa$; adeoque addendo $A\delta LK + 2A2\delta 2L2K; = 2ey; + 2eff\omega : aa$ (vel loco ff reſtituendo ſuum valorem $bb - aa$) $= 2ey; + 2bbe\omega : aa; - 2e\omega = 2eg; + 2bbe\omega : aa$; poſitâ ad abbreviandum $g = y - \omega$.

Arearum $A\alpha IH(2A2\alpha 2I2H)$ elementum eſt $= edx; \pm 2beydx : aa + yy; effdx : aa + yy = eydy : a; \pm 2bey^2 dy : a^3 + ayy; + effydy : a^3 + ayy$; quia $ydy = adx$. Atqui $yydy : aa + yy = dy, - aady : aa + yy = dy - d\omega$, & ut antea, $ydy : aa + yy = dz : a$, ac propterea,

$A\alpha IH\ (2A2\alpha 2I2H) = eyy : 2a; \pm (2bey - 2be\omega) : a; + effz : aa$; adeòque $A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H = (4bey - 4be\omega) : a = 4beg : a$, poſita ſcilicet $y - \omega = g$.

Ducantur per A rectæ AT parallela BB, & AS æquidiſtans $C\sigma$, eritque $AW : WS = C\xi : \xi\sigma = A\delta LK + 2A2\delta 2L2K : A\alpha IH - 2A2\alpha 2I2H = (2eg; + 2bbe\omega : aa) : (4beg : a) = aag + bb\omega : 2abg$; & $TW : AW = a : b = 2abg : 2bbg$; ergo ex æquo fiet $TW : WS = aag + bb\omega : 2bbg$. Dicantur inſuper TW, θ & SW, t; radiusque AW, r; eritque $\theta : t = aag + bb\omega : 2bbg$, & quia $r : \theta = b : a$, ſubſtitutis loco b & a proportionalibus r & θ, proveniet $\theta : t = \theta\theta g + rr\omega : 2rrg$; ex quâ elicietur $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; adeoque ipſæ æquationis radices erunt $\theta = \frac{rr}{t} \pm \sqrt{\left(\frac{r^4}{tt} - \frac{rr\omega}{g}\right)}$. Jam quia ſingulæ r, g, ω & t datæ ſunt, etiam θ data erit, quæ eſt tangens anguli TAW, quem directio figuræ BA2B in fluido incedentis cum axe AH continet, cùm figurâ itinere permanente fertur absque converſionibus circa ſeipſam; qui angulus TAW angulus declinationis figuræ audit, ejusque tangens, TW declinatio ipſa; linea vero σC eſt directio, juxta quam figura in fluido ideo impelli debet, ut in directione ipſis BB, AT, &c. parallela itinere ſeu via manenti ea in fluido ferri queat; quæ omnia ſuo loco uberius explicabuntur. Fig. 114.

Cæterum exempla eorum caſuum, in quibus curvæ, ſuperior AB & inferior 2A2B, ſunt ſimiles & æquales, adeò ut hæ curvæ fluidi impreſſionibus expoſitæ communem abſciſſam AH, ordinatasque æquales BH & 2B2H habeant. Sed ea, ratione calculi, intricatiora evadunt, ſi curvæ AB & A2B, ut fig. 115. inæquales & tamen ſimiles ſeu totæ ACE, A2BE æquales ſunt, tunc enim

punctorum B & 2B poſitio, atque adeò abſciſſarum AH, A2H, & ordinatarum BH & 2B2H magnitudo pendet à poſitione rectæ AT, ſeu ab angulo quæſito TAW. Quomodo vero pro caſibus hiſce calculus debeat ſubduci, ex ſequenti eluceſcet corollario.

COROLLARIUM IV.

Fig. 115. 458. Sint $\int mdy : nn = A1 : a$; vel $A2 : a$; vel $A3 : a$ pro curvis AC, A2B & CB, item $\int dy : nn = B1 : aa$ vel $B2 : aa$; aut $B3 : aa$, reſpectu earundem curvarum AC, A2B, & CB. $\int mdx : nn = C1 : a$, vel $C2 : a$, vel $C3 : a$; reſpectu earundem curvarum, & denique $\int dx : nn = D1 : aa$, vel $D2 : aa$ vel $D3 : aa$. Ubi numeri, literis A, B, C, D poſtpoſiti non ſunt poteſtatum indices, ſed tantum indicant quamnam ex curvis AC, A2B & BC hoc ordine, quo recenſentur, reſpiciant in figura 115. Unde, quia in fig. 113, QR vel KL aut $HI = e; \pm 2bem : nn; + eff : nn = e; \pm 2bem : nn; + (bb - aa). e : nn$; quia $ff = bb - aa$ ut ſupra (§. 454.) invenimus. Hinc area $A\delta LK = e. CD; + 2be. A1 : a; + (bb - aa). eB1 : aa$, reſpectu curvæ AC fig. 115. Area $2A2\delta2L2K = e. 2B2H; - 2be. A2 : a; + (bb - aa). eB2 : aa$, reſpectu curvæ A2B. Area $FKL = e. KF; - 2be. A3 : a; + (bb - aa). eB3 : aa$, reſpectu curvæ CB. Area $A\alpha Yd = e. AD; + 2be. C1 : a; + (bb - aa). eD1 : aa$, reſpectu curvæ AC. Area $2A2\alpha2Y2I = e. A2H; - 2be. C2 : a; + (bb - aa). eD2 : aa$; reſpectu curvæ A2B, & Area $dYI = e. DH; - 2be. C3 : a; + (bb - aa). eD3 : aa$; reſpectu curvæ BC. Ergo $A\delta LK + 2A2\delta2L2K - FLK = e. F2K; + 2be. (A1 - A2 + A3) : a; + \overline{bb - aa}. (B1 + B2 - B3) e : aa$, & $A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha2Y2I = e. H2H; + 2be. (C1 + C2 - C3) : a; + bb - aa. (D1 - D2 - D3) e : aa$. Atqui (§. 453) eſt $AW : WS = A\delta LK + 2A2\delta2L2K - FLK : A\alpha Yd + YdI - 2A2\alpha2Y2I$, ergo etiam $AW : WS = e. F2K; + 2be. (A1 - A2 + A3) : a; + \overline{bb - aa}. (B1 + B2 - B3) e : aa$, ad $e. H2H; + 2be. (C1 + C2 - C3) : a; + bb - aa. (D1 - D2 + D3) e : aa$. Unde, cum TW ſit ad $AW = a : b$; habebitur ex æquo analogia, quæ ſuppeditabit æquationem quæſitam anguli TAW tangentem manifeſtaturam; ſed quia ipſæ A2H, 2H2B, EH, HB ac per conſequens ipſæ quoque HD & 2HD pendent à quantitatibus *a* & *b*, quarum hæc adhuc incognita eſt, ideo etiam ipſæ A2, A3, B2, B3, C2, C3 & D2 & D3 ab iisdem pendent; quod calculum perplexum reddit; præſertim ſi curvæ ACE & A2BE fuerint diſſimiles ſeu diverſæ.

459. Po-

459. Ponamus verò nominatas curvaſ ACE & A2BE ſimiles & æquales eſſe, quo fiet ut arcus EB & A2B æquales ſint, cum lineæ BB & 2B2B, ipſi AT (ſecundùm hypotheſin) parallelæ, arcus in B & 2B contingant, propterea erunt EH = A2H, item BH = 2B2H, atque adeò HD = D2H, nec non producta 2B2H usque ad occurſum ejus curvæ ECA in 3B, fiet 2H3B = 2B2H = BH, ac per conſequens linea BF, ipſi EA parallela, ſecabit curvam ECA in puncto 3B, adeo ut arcus BC & C3B ſimiles & æquales futuri ſint. Hisce poſitis reperietur A1 = A2 + A3; B1 = B2 + B3; C1 = C2 + C3 & D1 = D2 + D3; ac proinde hoc caſu habebimus

A1 − A2 + A3 = 2. A3 ſeu dupla A3.

B1 + B2 − B3 = 2. B2.

C1 + C2 − C3 = 2. C2.

D1 − D2 + D3 = 2. D3. Adeoque hi valores, in analogia præcedentis paragraphi ſubrogati, præbebunt AW : WS = *e*. F2K + 4*be*. A3 : *a*; + (2*bbe* − 2*aae*). B2 : a^2, ad *e*. H2H; + 4*be*. C2 : *a*; + (2*bbe* − 2*aae*). D3 : *aa*, vel dividendo terminos per 2*e*, ſicut FA; + 2*b*A3 : *a*; + (*bb* − *aa*). B2 : *aa*; ad DH; + 2*b*C2 : *a*, + (*bb* − *aa*). D3 : *aa*; & WT : AW = *a* : *b*; ergo ex æquo erit WT : WS = *a*. FA + 2*b*. A3; + (*bb* − *aa*). B2 : *a*, ad *b*.DH; + 2*bb*. C2 : *a*; + (b^3 − *aab*). D3 : *aa*; vel vocando tangentem anguli dati SAW, *t*; & tangentem quæſiti TAW, θ; habebimus θ : *t* = a^3. FA + 2*aab*. A3; + (*abb* − a^3). B2 : *aab*. DH, + 2*abb*. C2, + (b^3 − *aab*) D3; adeoque, multiplicando extrema & media, habebimus æquationem ſequentem generalem a^3t. FA + 2*aabt*. A3 + (*abbt* − a^3t). B2 = *aab*θ. DH, + 2*abb*θ. C2, + ($b^3\theta$ − *aab*θ). D3. In qua æquatione loco magnitudinum FA, DH, A3; B2, C2 & D3 ſubrogandi ſunt earum valores, quos præbebit natura curvæ A3BC expreſſi quantitatibus *a*, *b*; aliisque conſtantibus; poſitisque loco *b*, radii ſeu ſinus totius nomine *r*, & loco ipſius *a* nomine tangentis quæſitæ θ, habebitur æquatio in ſola θ & quantitatibus conſtantibus ſeu cognitis data, cujus æquationis radices manifeſtabunt valorem tangentis anguli quæſiti TAW.

460. Exempl. Sint curvæ ACE & A2BE arcus æquales alicujus circuli, cujus radius = *e*, ac ſinus complementi arcus AC, qui eſt ſemiſſis totius ACE vel A2BE, dicatur *h*, ſintque $h^3 : 3ee = k$, & $k - h = l$, invenienturque A3 = $a^3e : 3c^3$, B2 = *l*; + *be* : *c*; − $b^3e : 3c^3$; C2 = $b^3e : 3c^3$; − *k*, ac denique D3 = $a^3e : 3c^3$. Erunt porrò AF vel BH = *be* : *c*; − *h*, & DH vel D2H = *ae* : *c*; qui valores in æquatione generali ſubſtituti, fractionum reductionibus ad nomen $3c^3$ rite

per-

peractis, præbebunt $bblt - aalt - aaht; + 2.(aa + bb)^2.bet : 3c^3 = - 2bbk\theta; + 2.(aa + bb)^2.be\theta : 3c^3$. Atqui (ſecundùm hypotheſin) eſt $l + h = k$, & (§. 454.) $cc = aa + bb$, ergo hi valóres, in poſtrema æquatione ſuffecti, præbebunt $bblt - aakt + \frac{2}{3}bcet = - 2bbk\theta + \frac{2}{3}bce\theta$. Hinc etiam $3bblt + 6bbk\theta - 3aakt = 2bce\theta - 2bcet$, & quadrando $9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt = (4bbee\theta\theta - 8bbeet\theta + 4bbeett)$ in cc. Unde ſubſtituendo $aa + bb$ loco cc, fiet $4aabbee\theta\theta - 8aabbeet\theta + 4aabbeett + 4b^4ee\theta\theta - 8b^4eet\theta + 4b^4eett = 9b^4lltt + 36b^4lkt\theta - 18aabblktt + 36b^4kk\theta\theta - 36aabbkktt + 9a^4kktt$. Vel poſitis loco b & a proportionalibus r & θ, in hac poſtrema æquatione, proveniet $4rree\theta^4 - 8rreet\theta^3 + 4rreett\theta\theta + 4r^4ee\theta\theta - 8r^4eet\theta + 4r^4eett = 9r^4lltt + 36r^4kt\theta - 18r^4lktt\theta\theta + 36r^4kk\theta\theta - 36rrkktt\theta\theta + 9kktt\theta^4$. Ex qua liquet problema eſſe ſolidum, nam radices hujus æquationis biquadraticæ exhibent valorem tangentis quæſitæ θ, ſeu tangentis anguli TAW, ſeu anguli declinationis bilinei 2BAC.

Corollarium V.

461. Si curvæ AB & A2B ſunt æquales, adeò ut communem abſciſſam AH habeant & ordinatas æquales BH & 2B2H, ut in figura 113. erunt A1 = A2 & A3 = 0; B1 = B2, & C1 = C2; D1 = D2, ſingulæ verò B3, C3 & D3 perinde ac A3 æquales 0; evaneſcet pariter linea, quæ in figura 115. repræſentatur per DH vel D2H, alteraque, quæ erat in hac eadem figura FA, in priore ſcilicet fig. 113. erit BH. Hoc ergo caſu formula generalis paragraphi 459. mutabitur in $aat.BH + (bbt - aat).B2 = 2bb\theta.C2$. In exemplo proinde ſuperiore (§. 457.) curvæ parabolicæ, retentis ſymbolis illic poſitis, erunt $BH, = y$; $B2 = \omega$ & $C2 = y - \omega = g$, atque adeò æquatio $aat.BH + (bbt - aat).B2 = 2bb\theta.C2$, abibit in $aaty + bbt\omega - aat\omega = 2bb\theta g$, vel $aatg + bbt\omega = 2bb\theta g$; atque adeò ſubrogatis loco a & b proportionalibus θ & r, erit $tg\theta\theta + rrt\omega = 2rrg\theta$, ac proinde $\theta\theta = \frac{2rr\theta}{t} - \frac{rr\omega}{g}$; quæ eſt eadem æquatio, quam citato loco reperimus. At ſciendum hanc ſolutionem imperfectam eſſe, quoniam æquatio amplius non inſervit, ſi ratio tangentis y ad arcum ω minor fuerit duplicata ratione ſecantis anguli SAW ad radium in fig. 114. Sed eo in caſu ipſa θ, ne quidem ſuppoſita arcuum circularium rectificatione, nulla æquatione algebraïca exhiberi poteſt.

Scholion.

462. Ex allatis exemplis ſatis conſtare poteſt, quam late pateat ſolutio problematis in præſenti propoſitione exhibita. An verò & quousque ea cum ſolutione ejusdem problematis conveniat, quam ſummus geometra Joh. Bernoullius in tractatu, Gallico idiomate ſub titulo *Eſſay d'une nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux*, nuperrime edito dedit, utriusque collatio oſtendet.

Si angulus TAW datus ſit, & alter angulus SAW quæratur, problema facile eſt; tunc enim in ſuperioribus θ & r cum reliquis ſcilicet a, b, c, ſunt magnitudines cognitæ, & quæſita èſt t.

Caput XIII.

De Figuris, quas ſuperficies flexiles induere debent, cum Venti allapſus directe excipiunt, ſeu de curva Velaria.

Quamnam curvam induere debeat *velum* vento tumidum ante Celeberrimos Bernoullios nemo aſſignavit; ſed eximii hi geometræ invenerunt velum ab allabente vento in eam ipſam curvam flecti debere, quam Joh. Bernoullius & Leibnitius atque Hugenius funi laxo atque flexili, vel catenulæ ab ambobus ſui terminis pendenti convenire docuerunt, etſi eorum analyſis velariæ nusquam publici facta ſit juris. Sed quanquam *catenaria* atque *velaria* una eademque ſint curva, non tamen ideo putandum, unius inveſtigationem ſimul alterius quoque inventionem includere, adeò ut, qui catenariam geometrice invenerit, etiam velariæ problema ſolutum dediſſe cenſendus ſit, quod tamen Clariſſ. Vir David Gregorius inſinuare videtur, in ſua Catenaria Coroll. 7. poſt Prop. 2. ſic ſcribens: *Quod ſi loco gravitatis alia quælibet vis ſimiliter agens in lineam flexilem vires ſuas exerat, eadem producetur linea v. g. Si ventus æquabilis ſupponatur, & ſecundum rectas datæ poſitione rectæ parallelas ſpirans, linea vento inflata eadem erit cum catenaria.* Fateor quidem in theſi, ut ajunt, veram eſſe Egregii Viri aſſertionem, ecquis enim ambiget, quin alia quæcunque vis, loco gravitatis ſubſtituta, ſimiliter applicata, ac eodem prorſus ac gravitas modo agens, eundem

 eſſe-

effectum, eandemque adeo curvam ac gravitas, productura ſit? Sed theſeos applicatio in negotio velariæ claudicat, cum notabilis diſparitas intercedat inter actionem gravitatis in catenaria, & venti actionem in velaria. Nam æquales catenariæ particulæ æqualibus niſibus deſcendere conantur juxta directiones horizonti perpendiculares, ſecus quam in velaria, cujus particulæ etiamſi æquales à filamentis aëreis eadem etiam velocitate in eas impingentibus inæquales tamen impreſſiones ſubeunt, & quidem juxta directiones non horizonti, ſed curvæ elementis perpendiculares. Cum igitur circumſtantiæ, quibus gravitas in catenariam ventusque in velariam agunt, toto cœlo differant, nemo non videt, quod ea, quæ de catenaria demonſtrata ſunt, non magis velariæ quadrare queant, quam analyſis curvæ lintei convenire poſſit indagini curvæ elaſticæ, etſi notante Clar. Jac. Bernoullio elaſtica etiam eadem ſit cum curva lintei. Quoniam igitur problematis catenariæ ſolutio non involvit ſolutionem velariæ, & quoniam hujus problematis ſolutio, vel rectius dicendo analyſis, nusquam adhuc publice, quod ſciam, exhibita eſt præterquam §. 103. ubi ad illuſtrationem generaliſſimi noſtri theorematis problematis de velaria ſolutionem obiter elicuimus, partem phyſicam problematis alibi excutiendam illic relinquentes; nunc vero ex profeſſo problema tractabimus, analyſin ejus geometricam traditúri intelligentibus, ut opinor, non diſplicituram, præmiſſis tamen prius duobus lemmatis in aliis etiam uſui futuris.

PROPOSITIO LI. Lemma.

Fig. 117. 463. *Centro* O *& ſemilatere transverſo* OA *deſcripti ſint quadrans circuli* AGK, *& hyperbola æquilatera* ABM, *tum etiam logarithmica* AC *circa aſymptotam* LK, *cujus ſubtangens ſit* OL *æqualis radio quadrantis* OA, *quæ log-mica per punctum* A *transeat, ductisque ex quolibet hyperbolæ puncto* B *ad centrum* O *recta* BO, *tangente hyperbolam in vertice* AP, *ſecante in puncto* F, *& per hoc punctum* F *recta* FH *parallela radio* AO, *quadrantem ſecante in* G, *&* OK *in* H. *Si* KG *recta jungens puncta* K *&* G *producatur usque dum cum radio* OA *itidem protenſo concurrat in puncto* D, *atque per hoc punctum ducta fuerit recta* DC *ipſi* LK *æquidiſtans. Rectangulum ſub hac* DC *& radio* OA *æquabit ubique duplum reſpondentis ſectoris hyperbolici* ABO.

Sumto alio in hyperbola puncto b, alteri B indefinite vicino, ducantur bO ſecans AP in f, item fh, parallela FH, circulum in g, re-

rectam KG in a, & OK in puncto h interſecans; jungaturque Kg & producatur in d, per quod punctum alia de ducta ſit priori DC æquidiſtans: agantur pariter dL & OG, item C$\varkappa$ parallela Od, & γg parallela OK, hyperbolæ ordinata EB continuetur usque in β, & CD usque in δ; quibus factis per quadrantis puncta G & K ductæ ſint tangentes GI & KI, quæ æquales erunt; quibus præparatis

I. Liquet fore dL parallelam tangenti log-micæ in puncto C, quandoquidem hujus log-micæ ſubtangens (ſecundùm hypotheſin) æqualis eſt OL; atque adeò $d\delta$ parallela & æqualis erit particulæ log-micæ Cc, ac etiam $c\varkappa = D\delta$.

II. Triangula ſimilia OEB, OAF præbent $OE^2 : EB^2 = OA^2 : AF^2$. Vel, quia in hyperbola quadratum OE æquatur binis quadratis OA & EB collective ſumtis, erit etiam $OA^2 + EB^2 : EB^2 = OG^2 : OH^2$; & dividendo $OA^2 : EB^2 = GH^2 : OH^2$ vel AF^2, vel invertendo ac permutando $EB^2 : AF^2 = OG^2 : GH^2$. Atqui $EB^2 . AF^2 = OB^2 : OF^2 =$ 2. triang. BOβ ad 2. triang. FOf, id eſt, ad rec-lum FH. Hh, ergo 2. triangulum $BO\beta : FH . Hh = OG^2 : GH^2$.

III. Triangula ſimilia Gga & GIK exhibent $Gg : ga = GI : IK$, unde, quia tangentes IK & GI æquantur, etiam Gg & ga æquales erunt.

IV. Propter parallelas Od & hg, erit $Od : Dd = hg$ vel $HG : ag$ vel (num. III.) Gg, & invertendo ac permutando $Dd : Gg = Od : GH$, at $D\delta : Dd = OL$ vel $OG : Od$, ergo ex æquo $D\delta : Gg = OG : GH$, & propter triangula ſimilia OGH & G$g\gamma$, fit $Gg : \gamma g$ vel $Ff = OG : GH$ ergo ex æquo & per rationum compoſitionem, $D\delta : Ff = OA . D\delta : FH . Ff = OG^2 : GH^2$ (num. II.) $=$ 2. triangulum $BO\beta : FH . Ff$ vel $FH . Hh$. Adeoque 2. triang. $AO\beta = OA . D\delta$ (num. I.) $= OA . c\varkappa$. ergo omnia 2. BOβ id eſt duplus ſector BAO $=$ omnibus $c\varkappa$ in AO, id eſt rec-lo DC in AO. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.

464. Per hyperbolæ punctum B ducta ſit tangens BT, ac per punctum T recta TV parallela OK rectæ OB occurrens in puncto V, ac denique agatur Bθ parallela AD.

I. Oſtendam, quod TV producta tranſibit per punctum G, adeo ut TO $=$ GH. Nam in hyperbola lineæ GH, OA & OE ſunt in continua ratione, atqui propter tangentem BT, etiam OT, OA & OE ſunt in continua ratione, ergo OT $=$ GH.

II. Ele-

II. Elementum quadrantis Gg æquabitur lineolæ Bβ. Nam Gg : γg vel Ff = OG : GH = AO : TO = EO : AO, atqui etiam Bβ : Ff = EO : AO, ergo Gg : Ff = Bβ : Ff, atque adeò Gg = Bβ.

III. Figuræ ſimiles *b*θBβ & BETV, utpote quæ circa eandem rectam *b*T conſtitutæ, & è triangulis ſimilibus *b*θB, BET, & *b*Bβ, BTV compoſitæ ſunt, præbent analogiam *b*θ : Bβ vel (num. II. hujus) Gg aut (num. III. §. 463.) *ga* = EB : TV = EO : TO, atqui *ga* : D*d* = GH. (num. I. hujus) OT : O*d*, & D*d* : Dδ = O*d* : OL vel OA, ergo ex æquo habetur *b*θ : Dδ = EO : AO = AO : TO; atque adeò *b*θ. TO = AO. Dδ = AO. *cκ*.

IV. Eſt vero duplum trianguli *b*TO = *be*. TO, duplumque trianguli BTO = BE. TO, ergo duplum trianguli BO*b* = *b*θ. TO (num. III. hujus) = AO. *cκ*, & per conſequens etiam areæ BAO duplum æquabit rectangulum ſub AO. DC. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

465. Ductis ex logarithmicæ puncto C ad puncta A & O rectis CA & CO, triangulum rectilineum CAO æquabitur ubique homologo ſectori hyperbolico BAO.

Corollarium II.

466. Jungatur OI, eaque producatur in P, eruntque AP = OD, & OP = KD. Nam, quia OS ipſi KD normalis eſt, erunt anguli SOK ejusve alternus APO & ODK æquales, atque adeo triangula rectangula AOP & OKD ſimilia, ob latera verò AO & OK æqualia erunt etiam hæc triangula æqualia, ac proinde AP = OD & OP = KD. AP autem eſt tangens arcus AR compoſiti ex arcu AG, cujus ſinus OH æquatur tangenti AF anguli ſectoris AOB, & ex ſemiſſi GR complementi ejusdem. Et DC eſt log-us rationis DO ad AO, id eſt, log-us rationis tangentis AP prædicti arcus ſeu anguli compoſiti AOR ex angulis AOG & GOR ad radium ſeu ſinum totum AO. Atqui ratio AP ad AO = rationi OK ad IK, id eſt, rationi, quam habet radius OK ad tangentem IK ſemiſſis complementi anguli AOG, cujus ſinus æquatur tangenti anguli ſectoris AOB.

Scho-

Scholion.

467. Hæc propoſitio plurimum conducit reductioni elementorum ſectorum hyperbolicorum ad ſimpliciora elementa log-mica. Nam ſi AO $=a$; OD $=m$; OE $=x$; EB $=y$; AF $=z$, & AE $=u$. Atque his poſitis, erit

I. $y=\sqrt{(xx-aa)}$, AF $=a\sqrt{(xx-aa:xx)}$; adeòque F$f=a^3dx:xx\sqrt{(xx-aa)}$, & FH. H$h=a^4dx:xx\sqrt{(xx-aa)}$. Unde quia triang. BOβ : triang. FO$f=$ OE^2 : OA^2, reperietur duplum trianguli BO$\beta=aadx:\sqrt{(xx-aa)}$. Hoc idem brevius inventum fuiſſet ope num. IV. §. 466. uti oſtendimus 2.BO$b=$ OT. $b\theta$; nam $b\theta=xdx:\sqrt{(xx-aa)}$ & OT $=aa:x$, ergo OT. $b\theta=aaxdx:x\sqrt{(xx-aa)}=aadx:\sqrt{(xx-aa)}$. Jam KH $=(ax-a\sqrt{(xx-aa)}):x$, & GH vel OT $=aa:x$; atque triangula KHG & KOD ſimilia ſunt, ergo $m=aa:x-\sqrt{(xx-aa)}$ & $x=(aa+mm):2m$, qui valor ſubſtitutus in præcedenti expreſſione elementi BOβ, producet 2BO$b=aadm:m$.

II. Quia $x=a+u$ & $dx=du$, erit 2BO$b=aadx:\sqrt{(xx-aa)}=aadu:\sqrt{(2au+uu)}$, & $u+a=(aa+mm):2m$, vel $u=(m-a)^2:2m$, qui valor in formula $aadu:\sqrt{(2au+uu)}$ ſuffectus, dabit iterum 2BOb $=aadm:m$.

III. Propter triangula ſimilia OAF & OEB invenietur $ay=xz$, hyperbola verò præbet $y=\sqrt{(xx-aa)}$; unde $x=\sqrt{(aa-zz)}$, ex triangulis verò ſimilibus KHG & KOD elicitur $am-mz=a\sqrt{(aa-zz)}$ & $z=amm-a^3:mm+aa$, qui valor ipſius z ejusque elementi $a^3dz:aa-zz=$ 2BOb ſubſtitutus, dabit etiamnum 2BO$b=aadm:m$.

Similes regulas reducendorum ſectorum hyperbolicorum ad logarithmos ex ſua methodo generali reducendi quadraturas curvarum, quarum ordinatæ fractionibus rationalibus per abſciſſam varie affectam & datas, exhibitis exprimuntur, ad logarithmos, jam pridem elicuit Vir Celeb. Joh. Bernoulli in Comm. Acad. Reg. Scient. Pariſ. 1702. d. 13 Decemb. & in Act. Lipſ. 1703. pag. 30. & 31. Cæterum, etſi præcedens theorema noſtrum de hyperbola tantum æquilatera agit, paucis tamen mutatis ad quascunque hyperbolas poteſt extendi.

PROPOSITIO LII. Lemma.

468. *Si rectæ* AM *poſitione datæ alia* AB *magnitudine data perpendiculariter inſiſtat, per cujus terminum* B *rectæ quæcunque* BM, Bm *ad alteram* AM *ducantur, & per puncta* M, m, &c. *in quibus huic occurrunt, perpendiculares* MN, mn, &c. *ipſis* BM, Bm, &c. *reſpective æquales, omnia puncta* N, n, &c. *in curva* LNn *hyperbolæ æquilateræ ſita erunt, cujus centrum* A, *& ſemilatus transverſum* AL.

Fig. 118. *Poſitisque punctis* M, m *indefinite vicinis, ac deſcripto centro* B *intervallo* BM *arculo* Mμ, *junctisque* AN, An, *rectangulum ſub radio* BA *& arculo* Mμ *duplum erit trilinei* ANn *ſeu elementi ſectoris hyperbolici* ANL.

I. Ducatur NX parallela AM, & quia (ſecundùm hypotheſin) MN = BM, & AB = AL, erit $AX^2 = XN^2 + AL^2$, vel $XN^2 = AX^2 - AN^2$ = rec-lo BXL, ergo punctum N eſt in hyperbola æquilatera LN, cujus latus transverſum eſt BL & centrum A. Curva LN etiam hyperbola erit, ſi MN ad BM fuerit in quacunque data ratione.

II. Per punctum N ducta ſit tangens hyperbolæ N*q*, eruntque tres MN vel BM, AL vel BA & A*q* in continua ratione, atque adeò BM : BA = BA : A*q*, atqui propter triangula ſimilia ABM & μM*m*, eſt etiam BM : BA = M*m* vel N*o* : Mμ; ergo N*o* : Mμ = BA : A*q*, atque adeo BA. Mμ = N*o*. A*q* (num. IV. §. 464.) = 2. AN*n*. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

469. Adeoque, ſi tota AM infinitis compoſita ſit particulis infiniteſimis qualis M*m*, & per ſingularum terminos rectæ BM ductæ intelligantur, erit factum ex omnibus arculis Mμ, quos vicinæ quæque BM intercipiunt, & radio BA æquale duplo omnium triangulorum AN*n*, quæ in ſectore hyperbolico ANL continentur, id eſt, duplo ipſius ſectoris.

Corollarium II.

470. Ducendo igitur per punctum interſectionis *t* rectæ AN & tangentis hyperbolæ A*t* in vertice, lineam *tsr* parallelam AL, &

*us*L,

us L, quæ ipſam AL productam ſecet in puncto P; ac denique per punctum L logarithmicam LO, quæ ſubtangentem habeat æqualem radio AL, & per P agatur PO parallela AM log-micæ occurrens in puncto O; erunt omnes arculi $M\mu$ collective ſumpti, æquales rectæ PO. Nam quia (§. 469.) omnes $M\mu$ in AB = 2. areæ ANL & (§. 463.) 2 ſect. ANL = AB vel AL in PO, erunt omnes $M\mu$. AB = AB. PO, atque adeo omnes $M\mu$ = PO.

PROPOSITIO LIII. Problema.

471. *Si filum perfecte flexile* HA2H *ambobus ſuis terminis* H, 2H *fixum, ſpiranti vento juxta directiones* cc, CC, GG *datæ poſitione rectæ* AW *parallelas expoſitum ſit, aſſignare curvam, quam filum induere debet.* Fig. 118.

Analyſis Geometrica. I. Quia ventus impreſſiones in velariam exſerit (§. 249.) juxta directiones C*l* curvæ quæſitæ ACH normales, atque adeò (§. 96.) conſtat tenacitatem veli in ſingulis ejus punctis eandem eſſe oportere; talis tenacitas conſtans per datam rectam AB axi AW normalem exponi poteſt, ſi venti velocitas ſit 1, ſin verò velocitas exponatur linea recta V, (§. 100.) tenacitatem per hoc factum V^2. AB repræſentare oportebit, ut mox videbimus. Nam ſumtis æqualibus & contiguis curvæ elementis C*c*, & CG, per eorum terminos ordinatæ ad axem curvæ AW ductæ intelligantur *c*W, CI & GK, quæ rectas CC & GG ſecabunt in *f* & F; & demiſſa ex puncto *f* perpendiculari ad elementum curvæ *c*C, quæ ſit *fd*, per punctum *d* agatur *de* æquidiſtans axi AW, & denique eſto C*h* = GF, adeò ut *fh* differentia ſit inter *f*C & F*g*; & his poſitis impreſſio, quam filamentum aëris *cc*CC celeritate V lati & in curvam impingentis in elementum C*c* exſeret (§. 429.) exponitur per factum $V^2.cd$; ejusque directio C*l*, ut jam dictum, eſt ubique curvæ perpendicularis; propterea, & juxta ea quæ alibi (§. 100.) dicta ſunt, tenacitas fili exponi debet magnitudine V^2. AB ejusdem generis cum $V^2.cd$, ſeu impreſſione quam elementum C*c* excipit juxta C*l*, vel quodlibet aliud juxta directionem ipſi normalem. Exponat jam C*l* magnitudinem $V^2.cd$ vel potentiam curvæ in puncto C normaliter applicatam, ductisque C*k* & *lk* axi AW parallela & normali, & potentia C*k* erit $V^2.ce$; nam in triangulis ſimilibus C*lk* & *cde*, lineola *ce* alteri C*k* homologa eſt, cum ſit C*l* : C*k* = *cd* : *ce*; atqui C*l* = $V^2.cd$, ergo etiam C*k* = $V^2.ce$. Jam, cum alibi (§. 93.) oſten-

oſtenſum ſit, Ck eſſe ad fh ut tenacitas fili in elemento Cc, ad hoc elementum Cc, vel permutando Ck ad dictam tenacitatem ut fh ad Cc; erit $V^2.ce : V^2.AB = ce : AB = fh : Cc$, & permutando $ce : fh = AB : Cc$.

II. Per terminum B datæ BA ducantur BM, Bm parallelæ elementis curvæ CG, Cc, centroque B intervallo BQ = CG = Cc deſcripto arculo QR, agantur QS, Rσ parallelæ AM, item Rx æquidiſtans BA; ST perpendicularis ipſi BQ, & denique TV parallela SQ, quibus poſitis, ultrò liquet, triangulum BQS triangulo cCf, & BRσ triangulo CGF ſimilia, æqualia, & ſimiliter poſita eſſe; adeò ut ſint xQ = fh, BV = ce, & Cc = BQ vel BR; adeòque analogia præcedentis numeri $ce : fh$ = AB : Cc, eadem eſt cum BV : xQ = AB : BQ; in triangulis verò rectangulis ſimilibus yQR & BTS, baſes yQ & BS à perpendiculis Rx & TV proportionaliter dividentur, adeò ut ſit xQ : yQ = BV : BS, & permutando ac invertendo BV : xQ = BS : yQ = BA : Mm; antea verò habuimus BV : xQ = AB : BQ; ergo etiam AB : Mm = AB : BQ, atque adeò Mm = BQ = Cc; quod cum de ſingulis Mm, quæ in tota Am & de ſingulis Cc, quæ in tota curva cGA continentur, reſpective valeat, liquet omnes Mm, ſeu totam Am vel AM omnibus Cc, ſeu toti cGA vel CGA æquari. Unde, quia BM tangenti velariæ in puncto C (ſecundùm hypotheſin) parallela eſt, erit data BA ad AM ſeu ipſi æqualem curvam AGC, ſicut ordinata CI ad ſubtangentem velariæ reſpicientem ejus punctum C. Hæc proprietas etiam catenariæ convenit, ut alibi velariæ atque catenariæ identitas jam (§. 106.) oſtenſa eſt.

III. Conſtructio autem curvæ hactenus ex oſtenſis facile elicietur: nam cum Mm ſit = Cc, & Bm (ſecundùm hypotheſin) parallela Cc, deſcripto centro B arculo Mμ, triangulum M$m\mu$ triangulo cCf ſimile & æquale erit, ac proinde Cf = $m\mu$, & omnes Cf, id eſt, WA = omnibus $m\mu$ ſeu mi, deſcripto ſcilicet centro B radioque BA circulo Aω. Sic etiam abſciſſa AI æqualis exiſtet Mω poſita, ut antea, BM parallela tangenti curvæ in C.

Elementum verò ordinatæ cf = Mμ & omn. cf, ſeu cW aut CI = omnibus Mμ (§. 470.) = PO poſita conſtructione in citato hoc paragrapho 470. Eſt ergo quælibet ordinata CI æqualis homologæ PO. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

472. Quia in hyperbola æquilatera LN tres AX, AL & A*q* ſunt continue proportionales propter tangentem hyperbolæ A*q*, & ex natura hyperbolæ etiam tres AX, AL & *rs*, adeò ut N*q* & *rs* æquentur; erunt, ducta A*s*, triangula ABM & A*sr* ſimilia; nam AX = MN (conſtr.) = BM eſt ad AL vel AB, ſicut AL vel A*s* ad A*q* vel *rs*, atque adeò triangula ABM & *rs*A ſimilia ſunt, ac per conſequens A*s* ipſi BM ſeu etiam tangenti velariæ in C parallela eſt, angulusque *u*A*s* æquabitur illi, quem tangens velariæ modo nominata, & quantum opus eſt producta, cum axe AW conſtituit, cujus ſemiſſis eſt angulus *rsu*; unde cum PO ſit log-us rationis PA ad LA, ſeu PA ad A*u*, hoc eſt, rationis *rs* ad *ru*; ſequitur PO eſſe log-mum rationis, quam radius habet ad tangentem anguli *rsu* vel dimidii anguli *u*A*s*, in logarithmica, cujus ſubtangens par eſt radio AL; & in omni alia logarithmica, ſi ſumatur quarta proportionalis ad log-micæ ſubtangentem AL, & ad log-um prædictæ rationis radii ad tangentem ſemiſſis anguli *u*A*s*, manifeſtabit ea ordinatam velariæ CI in puncto C, ſi ſcilicet angulus *u*A*s* æqualis fuerit angulo, quem tangens velariæ in C producta cum axe AW continet.

Corollarium II.

473. Circulus centro B radioque BA deſcriptus rectam BM productam ſecet in Ω, eritque propter tangentem circuli AM & ſecantem MΩ, MΩ : MA = MA : Mω, ſeu 2AB + Mω : AM = AM : Mω, adeoque 2AB + Mω : Mω = AM^2 : Mω^2, & dividendo 2AB : Mω = 2.AB. Mω : Mω^2 = AM^2 − Mω^2 : Mω^2, atque adeò 2AB. Mω = AM^2 − Mω^2. Innoteſcit ergo ex datis AM vel AC & Mω vel AI parameter velariæ AB ſeu A*u*.

Porro quia (§. 472.) A*r* : *rs* = AM : AB = 2AM. Mω : 2AB. Mω = 2AM. Mω : AM^2 − Mω^2, erit A*s* vel A*u* : A*r* = AM^2 + Mω^2 : 2AM. Mω, & dividendo A*u* − A*r* vel *ru* ad A*r* = (AM − Mω)^2 : 2AM. Mω, & A*r* : *rs* = 2AM. Mω : AM^2 − Mω^2, ergo ex æquo *ru* : *rs* = (AM − Mω)^2 : AM^2 − Mω^2 = AM − Mω : AM + Mω = curva AC abſciſſa ejus AI, ad AC + AI. Unde, cum ſit PA : LA = *rs* : *ru* = AC + AI : AC − AI, & PO log-us rationis PA ad LA; erit etiam PO log-us rationis AC + AI ad AC − AI, cujus rationis termini, ſcilicet ag-

Mm gre-

gregatum & differentia curvæ AC & ejus abſciſſæ vel ſagittæ AI, dati ſint. Idcirco, ſi fiat ut 2Mω ſeu 2AI ad AC + AI ita AC − AI ad quartam magnitudinem Q, deinde ut ſubtangens log-micæ cujuſcunque ad log-mum rationis AC + AI ad AC − AI in hac logarithmica, ita magnitudo vel linea Q ad aliam R, hæc linea, juxta præcedens corollarium, dabit ordinatam CI noſtræ velariæ AC.

Corollarium III.

474. Juxta §. 110. erit media directio impreſſionis venti filum CAC inflantis in axe AW, nam hæc media directio angulum à tangentibus velariæ ductis per puncta C, C ad utramque axis partem ſimiliter ſita contentum, bifariam dividit, quod etiam axis AW præſtat; eſtque adeò (§. 110.) impreſſio venti in velaria, juxta ejus mediam directionem WA, ad tenacitatem velariæ in omnibus ejus punctis eandem, ſicut dupla *Ar* ad *As*, id eſt, ut ſupra (§. 473.) habuimus, ſicut 4AM. Mω ad $AM^2 + M\omega^2$, id eſt, ſicut 4AC. AI ad $AC^2 + AI^2$. Unde, quia tenacitas velariæ (num. 1. §. 471.) eſt $V^2. AB = (AC^2 - AI^2 : 2AI). V^2$, erit impreſſio venti in velariam juxta ejus mediam directionem $WA = V^2. 2AC. (AC^2 - AI^2) : AC^2 + AI^2$.

Corollarium IV.

475. Velariæ verò æquatio differentialis ex allata conſtructione facillime elicietur; nam ſi dicantur BA, *a*; AI, *x*; CI, *y*; C*f*, *dx*; cf, *dy*; $Cc = CG = ds$; $fh = ddx$, erit $ce = dy^3 : ds^2$, & analogia, in quam ſupra (num. 1. §. 471.) incidimus *ce* vel $dy^3 : ds$ ad fh ſeu *ddx*, ut AB vel *a*, ad C*c* ſeu *ds*; quæ, multiplicatis extremis & mediis, dabit æquationem velariæ differentio-differentialem $dy^3 = adsddx$, in quam Celeberrimi Bernoullii etiam inciderunt, ut videre licet in Act. Erudit. Lipſ. 1695. pag. 546.

Æquatio differentialis velariæ elicitur ex ſimilitudine triangulorum ABM & M$m\mu$; eſt enim $m\mu : M\mu = AM : AB$; unde quoniam $AB = a$, $M\omega = AI = x$, atque adeo $AM = \sqrt{(2ax + xx)}$, $m\mu = dx$ & $M\mu = CF = dy$; erit $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$ prima æquatio differentialis primi gradus, naturam velariæ explicans.

Sin verò BM vel uI fuerit $= x$, tunc erit $AM = \sqrt{(xx - aa)}$, & $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$, quæ eſt altera velariæ æquatio differentialis.

Et

Et hæ ſunt æquationes, in quas laudati Bernoullii jam pridem inciderunt, quiſque eorum ſua methodo propria uſus.

Scholion.

476. Ex noſtra conſtructione atque analyſi jam ſponte naſcuntur præcipuæ proprietates velariæ, & maxime notabiles. Nam

1°. Curva AC æqualis eſt ubique reſpectivæ ordinatæ XN hyperbolæ æquilateræ LN, cum hæc ordinata ſit æqualis MA, cui curva AC æqualis oſtenſa.

2°. Facta ubique AM = curvæ AC, ſi per velariæ punctum C parallela ducatur rectæ BM, ea velariam in puncto C continget.

3°. Area $uAC2f$ æquatur ubique rec-lo BAM ſeu rec-lo ſub curva AC & recta AB, quæ inſtar parametri eſt; atque adeò areæ $uAC2f$ ſuis homologis curvis AC proportionantur. Nam elementum areæ prædictæ eſt $f2f.fc = Bm.M\mu = 2.$trianguli BMm; ſunt enim $f2f$ vel $uW = Bm$, & $cf = M\mu$, ergo omnia $f2f.cf$ ſeu area $uAC2f =$ omnibus $2.MBm$, hoc eſt, duplo trianguli BAm, id eſt, rec-lo AB in Am, vel AB. AM ſeu AB. AC.

4°. Si in MI ſumatur $u\xi$ ejus magnitudinis, ut rec-lum $u\xi.AM$ æquet aream hyperbolicam ALNM, punctum ξ erit centrum gravitatis curvæ CAC. Sit enim centrum hujus curvæ in aliqua recta $\xi\gamma$ parallela ipſi AB, ponaturque curvam AC libratam pendere ad axem librationis $u2c$; erit (§. 44.) $AC.u\xi =$ omnibus $uI.Cc =$ omn. $BM.Mm =$ omn. $MN.Mm =$ areæ ALNM, atque AC = AM; ergo $AM.u\xi = ALNM$, unde cum centrum gravitatis curvæ CAC ſit etiam in axe AW, erit omnino in puncto ξ.

5°. Sin verò centrum gravitatis curvæ AC fuerit in recta $\delta\gamma$, erit (§. 44.) $A\delta.AC =$ omn. $CI.Cc$. Atqui omn. $CI.Cc = AC.CI -$ omn. $AC.cf = AC.CI -$ omn. $AM.M\mu$, & triangula ſimilia ABM & $Mm\mu$ præbent $AM.M\mu = AB.m\mu$, atque adeo omn. $AM.M\mu = AB.\omega M = AB.AI$; ergo omn. $CI.Cc = AC.CI - AB.AI = AM.CI - AB.AI$; atque adeò $A\delta$ vel $\xi\gamma$ in $AC = AC.CI - AB.AI = AC.CI - AC.A\lambda$, ducta ſcilicet tangente $\omega\lambda$; adeòque $\xi\gamma = CI - A\lambda$; adeòque centr. grav. curvæ AC diſtat à recta $c2c$ intervallo $A\lambda$ vel $\omega\lambda$.

6°. Adeòque ſuperficies genita ex converſione curvæ AC circa axem AI æquatur circulo, cujus radius poteſt duplum rec-li $\xi\gamma.AC$ ſeu $2AC.CI - 2AB.AI$. Nam ſupra (§. 47.) demonſtratum eſt, magnitudinem *genitam* ex rotatione alicujus *genitricis* circa axem

 poſi-

poſitione datum, æquari facto ex magnitudine genitrice in viam centri ejus gravitatis; & viæ centri gravitatis ſunt circumferentiæ circulares à centro deſcriptæ, atque adeo radiis ſuis proportionales. Propterea magnitudines genitæ ſunt in compoſita ratione magnitudinum genitricium & diſtantiarum centri earum gravitatis ab axe rotationis. Idcirco erit ſuperficies ex converſione curvæ AC circa AI ad circulum quemcunque, cujus radius eſt R, in compoſita ratione magnitudinis AC ſuperficiei genitricis ad magnitudinem R circuli genitricem, & diſtantiæ centri gravitatis γ illius magnitudinis ab axe AI ſeu $\gamma\xi$ ad diſtantiam centri gravitatis hujus, ſeu $\frac{1}{2}$R, hoc eſt, ſicut AC. $\xi\gamma$ ad R. $\frac{1}{2}$R, id eſt, ſicut 2AC. $\xi\gamma$ vel 2AC. CI — 2AB. AI ad R^2; adeoque ſi $R^2 = 2AC.CI - 2AB.AI$, erit ſuperficies genita circulo æqualis.

7°. Eodem argumento circulus, cujus radius R poteſt duplum areæ hyperbolicæ, AMNL, æquatur ſuperficiei ex converſione AC circa axem $u2c$ genitæ. Nam dicta ſuperficies erit ad circulum, ut AC. $u\xi$ ad $\frac{1}{2}R^2$; vel ut 2AC. $u\xi$ ad R^2; atqui (num. 4.) AC. $u\xi$ = AMNL, ergo ſuperficies ex curva AC circa $u2c$ eſt ad circulum radii R = $\sqrt{2}$AMNL, ut 2AMNL ad 2AMNL, id eſt in ratione æqualitatis.

8°. Sin verò ρ centrum fuerit gravitatis areæ uAC$2f$, ducatur $\rho\theta$ parallela AB, eritque (§. 44.) $u\theta$ in aream uAC$2f$ = omnibus momentis rec-lorum $f2c$ ad axem $u2c$ appenſorum; hoc eſt $u\theta$. AM. AB = omnibus $\frac{1}{2}$. $c2c$. $c2c$. cf; nam (num. 3.) eſt area uAC$2f$ = AM. AB. Atqui $\frac{1}{2}c2c.\ c2c.\ cf = \frac{1}{2}$BM. BM. M$\mu$ = $\frac{1}{2}$AB. BM. Mm = $\frac{1}{2}$AB. MN. Mm, ergo omn. $\frac{1}{2}c2c.\ c2c.\ cf = \frac{1}{2}$AB in aream ALNM; atque adeò $u\theta$. AM. AB = $\frac{1}{2}$AB. ALNM, vel 2$u\theta$. AM = ALNM. Sed (num. 4.) habuimus etiam $u\xi$. AM = ALNM, ergo $u\xi$. AM = 2$u\theta$. AM, vel $u\xi = 2.u\theta$; adeoque centrum gravitatis curvæ AC duplo longius diſtat à linea $u2c$, quam centrum gravitatis areæ uAC$2f$.

9°. Hinc ſolidum ex rotatione figuræ uAC$2f$ circa axem $u2f$, ſemiſſis eſt cylindri, cujus altitudo AB, & baſeos radius poteſt duplum areæ hyperbolicæ ALNM. Nam hoc ſolidum (§. 47.) æquatur facto ex area uAC$2f$ in circumferentiam radii $u\theta$, cum ρ ſit centrum gravitatis areæ, hoc eſt = AB. AM in circumf. radii $u\theta$ (num. 8.) = $\frac{1}{2}$AB. AM in circumf. $u\xi$. Atqui AC vel AM in circumf. $u\xi$ eſt ſuperf. ex AC circa $u2c$ (num. 7.) = circulo cujus radius = $\sqrt{2}$ALMN; ergo ſolidum areæ uAC$2f$ circa $u2f$ rotatæ = cylindro, cujus radius poteſt 2ALMN, & altitudo eſt $\frac{1}{2}$AB; adeoque prædictum ſolidum dimidium eſt cylindri, cujus altitudo AB baſeosque radius poteſt 2ALNM.

10°.

10°. Hinc ultrò ſequitur, ſolida à figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa $u2c$ rotatis genita proportionari ſuperficiebus ex curvis homologis AC, Ac circa eundem axem $u2c$, ſicut areæ $uAC2f$, $uAc2c$ curvis AC, Ac proportionales ſunt; quæ proprietas, & ea qua centrum gravitatis curvæ AC duplo magis à recta $u2c$ diſtat quam centrum gravitatis ρ areæ $uAC2f$, & ambo hæc centra γ & ρ ab axe AI æqualiter diſtant, Illuſtri Leibnitio, qui primus eam advertit, meritò memorabilis viſa eſt.

11°. Centra gravitatis ρ & γ areæ $uAC2f$ & curvæ AC æqualiter diſtant ab axe velariæ. Nam (§. 44.) $\theta\rho$ in $uAC2f = \theta\rho . AB . AM$ = omnibus $CI . f2f . cf$ = omn. $CI . BM . M\mu$ = omn. $CI . AB . Mm$ = $AB . CI . AM$ — omn. $AB . AM . cf = AB . CI . AM$ — omn. $AB . AM . M\mu = AB . CI . AM$ — omn. $AB^2 . m\mu = AB . CI . AM - AB^2 . M\omega$, ergo etiam $\theta\rho . AM = AM . CI - AB . M\omega$. Sed (num. 5.) etiam habuimus $AM . \xi\gamma = AM . CI - AB$ in $M\omega$ vel AI, ergo $\theta\rho . AM = AM . \xi\gamma$, vel $\theta\rho = \xi\gamma$.

12°. Adeoque ſolidum ex converſione figuræ $uAC2f$ circa uI æquatur cylindro, cujus radius poteſt duplum ſpatium $2CI . AC - 2AB . AI$ & altitudo eſt AB. Hinc iterùm, ſolida ex figuris $uAC2f$, $uAc2c$ circa axem AI rotatis proportionalia ſunt ſuperficiebus ex curvis AC, Ac circa eundem axem in gyrum actis.

13°. Radius circuli oſculatoris $C\beta$ in curvæ puncto C, eſt tertius proportionalis ad uA & uI. Nam, quia Bm & BM parallelæ ſunt particulis curvæ Cc, & CG, ſectores evaneſcentes $MB\mu$ & $C\beta c$ ſimiles erunt; unde $M\mu : BM = Cc : C\beta$ vel permutando $M\mu : Mm$ vel $Cc = BM : C\beta$; atqui $M\mu : Mm = AB : BM$, ergo $AB : BM = BM : C\beta$, ſeu, quia $BM = uI$, erit $uA : uI = uI : C\beta$. Hinc curvæ $\alpha\beta$, ex cujus evolutione velaria deſcribitur, initium α à vertice velariæ A æque diſtat ac punctum u in circuli quadrante uSL.

SECTIO IV.

De Motibus corporum in mediis reſiſtentibus.

Quoties Galilæus, Torricellius aliique illius ævi Celeberrimi geometræ de motu egerunt, corpora in vacuo, id eſt, in medio, quod nec motum accelerare nec retardare queat, ferri ſuppoſuerunt; non quod neſcirent ejuſmodi medium reſiſtendi facultate

carens apud tellurem noſtram non dari, ſed quod non ſatis viderent, quo pacto reſiſtentiæ geometriæ legibus poſſent ſubjici. Ab his ergo reſiſtentiis medii tanto libentius animum abſtraxerunt, quod exiſtimarent non niſi per exiguos eas errores vixque ſenſibus perceptibiles determinationibus ſuis, ex ſuppoſitione vacui, inducere poſſe. Inter recentiores verò ſummi quique geometræ præclara Galilæi reperta circa motus doctrinam perfeciſſe & mirum quantum amplificaſſe non contenti, difficilem de motibus in mediis reſiſtentibus materiam ad geometriæ, ſed reconditioris, normam exigere fortunato ſucceſſu aggreſſi & in regiones non antea cognitas delati ſunt. Extant enim eximia hac de re Virorum Celeberrimorum *Newtoni*, *Leibnitii*, *Hugenii* & *Walliſii* meditata ante complures annos partim ſine demonſtrationibus edita, & breviter tantum indicata, partim etiam demonſtrationibus munita, ſed perbrevibus, nec ideò tyronum captui ſatis accommodatis, niſi Walliſium excipias, qui in ſuo ſchediaſmate ſuper hac re omnia minutim exponit, ſed tantum in hypotheſi particulari ſubſtitit reſiſtentiarum in ratione celeritatum corporibus remoram afferentium. Poſt laudatos viros Cl. *Varignon* idem argumentum fuſe, docte, atque perſpicue pertractat in Actis Academ. Reg. Pariſ. Scient. annorum 1707, 1708, 1709 & 1710. adeò ut ſecuturis Mathematicis otium hac in re feciſſe videatur; verùm, quia hæc materia tam directe ad inſtitutum noſtrum pertinet, ut ſi de ea agere omitterem, ex præcipuis aliquid opuſculo meo deeſſe putarem, ideò non detrectabo poſt tot præclaros Autores etiam hanc doctrinam, quantum potero breviter ſimul & perſpicue, proponere. Illorum inventis nonnulla propria addam, atque ſimplici principio inſiſtam, cui ferme omnia, quæ ad motum actualem corporum attinent, ſuperſtruxi, ſcilicet *momentum cujuslibet ſolicitationis indeſinenter agentis æquivalere momento celeritatis.* Quo principio nemo ex laudatiſſimis viris uſus eſt in doctrina motuum corporum in mediis reſiſtentibus latorum, ſaltem quatenus ex publicis eorum ſcriptis judicare licet, etſi hoc principio multa brevius & naturalius, quam ab aliis fundamentis, obtineantur.

CAPUT XIV.

Complectens generalia, quæ ad theoriam motus corporum in mediis reſiſtentibus pertinent, & nonnulla Lemmata Geometrica in hac theoria neceſſaria.

DEFINITIONES.

Duæ ſunt reſiſtentiæ ſpecies, una *abſoluta* altera *reſpectiva.*

I.

477. *Reſiſtentia abſoluta* eſt, quæ tantundem virium mobili detrahit, ſive magna ſive parva velocitate idem mobile feratur. Hujusmodi reſiſtentiæ abſolutæ exempla præbent media glutinoſa & ſuperficies aſperæ: nam in fluido glutinoſo eadem vi opus eſt ad ſeparandas ejus partes, quâcumque demum celeritate mobile partes eas ſeparare conetur. Sic etiam in frictionibus corporis in plano aſpero incedentis eadem obſtacula ſunt ſuperanda, ſive magna ſive parva velocitate mobile in plano aſpero moveatur, & quocunque modo ipſa motus impedimenta ſe habeant, ſive inſtar pilorum elaſticorum deprimendorum, & poſtea ſponte ſuâ ſeſe iterum erigentium; ſive filorum perrumpendorum ad inſtar, vel quoquo alio modo hisce æquivalente, ad hæc omnia definita quadam & determinata vi opus eſt, nec refert quæ ſit agentis velocitas.

II.

478. *Reſiſtentia* verò *reſpectiva* eſt, quæ provenit ab alliſione medii fluidi partibus anterioribus mobilis. Hæc reſiſtentia pendet à denſitate medii & celeritate mobilis; partes enim fluidi (§. 422.) ea ipſa celeritate corpori in eo fluido delato allabi cenſendæ ſunt, quâ corpus hisce particulis impingit, & quantitates fluidi corporibus allabentis (§. 423.) ſunt in compoſita ratione denſitatum & celeritatum.

III.

479. Medium fluidum atque reſiſtens *aëris* nomine ſimpliciter inſignietur, cum aër tantæ ſubtilitatis intelligi poſſit, ut eundem effectum præſtare valeat, quem medium reſiſtens.

IV.

480. *Motus primitivi* ſunt illi, qui in vacuo fierent. Sic motus primitive uniformis eſt motus æquabilis, quo corpus vi quacunque impulſum in vacuo incederet. Et motus primitive accelerati vel retardati à gravitate uniformi, ſunt motus illi, quos gravi in vacuo cadenti vel aſcendenti convenire Galilæus demonſtravit, cujusmodi motus Lib. I. Sect. II. Cap. I. §. 150, 151. conſideravimus.

V.

481. *Solicitatio acceleratrix* gravi in aëre deſcendenti applicata, eſt exceſſus, quo gravitas medii reſiſtentiam ſuperat, & *reſiſtentia totalis* ſeu *abſoluta* corpori in aëre aſcendenti oppoſita, eſt aggregatum ſolicitationis gravitatis & reſiſtentiæ aëris. Nam hæc duo corpori in aëre aſcendenti conjunctim renituntur. Grave verò cadens non alia vi deorſum ruit, quam eâ, quâ gravitas reſiſtentiam aëris, in quo corpus movetur, ſuperat: propterea hic *exceſſus* ſolicitatio acceleratrix gravis in aëre decidentis audit.

VI.

482. Et, quia hæ ſolicitationes acceleratrices in aëre continue decreſcunt ob creſcentem cum velocitate mobilis reſiſtentiam aëris, absque tamen eo, ut unquam penitus extinguatur, ut in ſequentibus fuſius demonſtrabitur, ideò etiam celeritas continue quidem creſcet, non tamen certum quendam velocitatis gradum unquam attinget, nedum prætergredietur. Talis velocitas quam gravia nunquam cadendo aſſequi poſſunt, etſi ei ſemper magis magisque accedunt, Hugenio *velocitas terminalis* audit, Leibnitius verò *celeritatem maximam* excluſivè eandem appellat.

Scalæ ſolicitationum acceleratricium, reſiſtentiarum totalium, & celeritatum acquiſitarum vel reſiduarum, eodem ſenſu ſumuntur, quo in Sectione ſecunda Libri primi; adeò ut nulla ambiguitas vocabulorum in hac materia irrepere queat. Idem pariter intelligendum de momentis harum ſolicitationum aut reſiſtentiarum totalium, & celeritatum creſcentium aut decreſcentium.

VII.

483. Si lineæ rectæ indefinitæ longitudinis æquabili motu ferri ſubinde dicentur, atque in hisce lineis corpora libere etiam ultro citro-

traque incedere ponentur, ipſæ lineæ mobiles *lineæ deferentes*, earum motus, *motus communis*, ſcilicet lineæ mobilis & corporis ſecum abrepti, & denique corporis in deferenti linea motus, ejus *motus proprius* deinceps dicentur, corporisque ejusdem *motus abſolutus* eſt is, qui reſultat ex motu communi & proprio, eſtque horum aggregatum, ſi linea deferens & in ea corpus proprio motu ad easdem partes feruntur, differentia verò ſi in partes oppoſitas. Idcircò, ex motu proprio & communi corporis ejus motus abſolutus ſemper innoteſcet.

PROPOSITIO LIV. Lemma.

484. *Momentum cujuslibet ſolicitationis acceleratricis corporis in aëre cadentis, aut reſiſtentiæ totalis ejusdem corporis in aëre quomodocunque aſcendentis, æquatur momento celeritatis acquiſitæ creſcentis, vel momento celeritatis reſiduæ & decreſcentis.*

Hæc propoſitio eadem eſt cum prop. XVII. Lib. I. §. 132. ut adeo nova demonſtratione non indigeat, nam ſolicitationum nomine quæcunque vires mortuæ, ſed continue applicatæ, intelligi queunt. Propterea, ſi facilitatis gratia corpus in linea verticali moveri ponatur, ſpatiaque transmiſſa dicantur x, gravitas g, reſiſtentia aëris r, velocitas acquiſita corpori decidenti vel reſidua aſcendentis u; ſolicitatio acceleratrix gravis cadentis (§. 481.) erit $g-r$, & momentum hujus ſolicitationis $gdx-rdx$ æquatur momento velocitatis creſcentis udu. Hinc $gdx-rdx=udu$.

Reſiſtentia verò totalis corporis aſcendentis (§. 481.) eſt $g+r$, momentumque hujus reſiſtentiæ $gdx+rdx$ æquale eſt momento celeritatis decreſcentis $-udu$, adeò ut habeatur $gdx+rdx=-udu$. Vel etiam ſumendo ſpatia non actu percurſa, ſed deinceps percurrenda, usque ad totalem motus aſcenſionalis extinctionem, erit $-gdx-rdx=-udu$, ſeu $gdx+rdx=udu$, hoc enim pacto ſpatia abſolvenda, poſt jam percurſa, decreſcent cum celeritatibus.

Idcirco utrumque caſum deſcenſus aſcenſusque verticalis corporum in aëre uni generali formulæ includendo, invenietur $gdx\mp rdx=udu$. Ubi ſignum ſuperius $-$ deſcenſum, alterum verò $+$ aſcenſum corporum in aëre reſiſtente reſpicit; ubi meminiſſe oportet ſpatia x non eſſe ſpatia actu transmiſſa à corpore aſcendente, ſed eorum complementa ad totam ſeu maximam altitudinem, quam aſcendens mobile percurrere poteſt.

Corollarium.

485. Si jam elementum temporis, quo ſpatiolum dx transmittitur, dicatur dt, erit $dt = du : g \mp r$. Nam, quia (§. 128.) $dt = dx : u$, & (§. 484.) $gdx \mp rdx = udu$, erit dt $(= dx : u) = du : g \mp r$. Adeoque $t = \int du : g \mp r$, ubi t ſignificat tempus, quo grave motu à quiete incepto ſpatium x perlabitur, vel tempus quo grave aſcendens complementum ſpatii actu jam transmiſſi aſcendendo conficere poſſet; unde, ſi tempus, quo maxima altitudo A, quam grave data celeritate in altum projecti emetiri poteſt, dicatur T, quantitas $T - t$ exponet tempus, quo mobile ſpatium aſcendendo actu abſolvit.

Scholion.

486. Cum nulla adhuc attentio habita ſit ad originem reſiſtentiæ medii, an pendeat à celeritatibus mobilis actualibus, an verò aliunde, ſatis manifeſtum eſt, in præcedentibus canonibus generalibus contineri leges motuum variatorum pro quacunque reſiſtentiæ medii abſolutæ vel reſpectivæ hypotheſi.

PROPOSITIO LV. Lemma.

487. *Motus variati corporis in aëre quacunque lege reſiſtente ex motu primitive uniformi ſunt iidem, qui reſultarent ex motu communi ac uniformi lineæ mobile ſecum deferentis, & ex motu proprio mobilis in linea deferente, orto ab alliſione aëris corpori in linea deferente delato.*

Mobile M incipiat moveri ex N verſus O velocitate data AN, ita quidem, ut ſi in vacuo incederet, motus perfecte æquabilis eſſet; ſed, quia in medio reſiſtente fertur, mobilis noſtri motus in recta NO continue variatus exiſtet, ita ut ſemper magis magisque langueſcat. Probari debet hunc motum variatum eundem fore cum eo, qui reſultaret ex motu communi lineæ NO celeritate AN ex N verſus Q æquabili motu latæ, atque mobile M ſecum abripientis, & ex motu proprio mobilis M in deferenti linea NO, ſed contrario motui æquabili lineæ deferentis, tendente ſcilicet ex N verſus O, utpote orto ex continuo allapſu aëris mobili M, quod (ſecundùm hypotheſin) ultro citroque in linea deferente liberrime moveri poſſe ſupponitur, abſque ullo impedimento ratione motus communis ſeu motus lineæ deferentis.

De-

Demonſtratio. Quatenus linea deferens NO æquabili motu verſus Q fertur, eatenus ea mobile M ipſi inhærens ſecum abripit, ſed quia aër mobili iſti continue alliditur, & corpus ipſum (ſecundùm hypotheſin) libere in deferenti linea NO moveri poteſt, aërque eandem in mobile impreſſionem exſerit, (§. 422.) ac ſi in ipſum quieſcens ea ipſa celeritate impingeret, quâ mobile in aëre motu abſoluto fertur; ideo per ſe liquet corpus M ab aëre continue verſus O impulſum omnino motum iri ex N verſus O, motu proprio in linea deferente, ſed contrario motui hujus lineæ deferentis; ac conſtat inſuper motus proprios mobilis M ab impulſu aëris ortos, eſſe decrementa motus abſoluti corporis in aëre, atque adeò effecta reſiſtentiæ aëris, ut adeò hinc manifeſtum ſit motum abſolutum corporis M in aëre haberi, ſi à motu lineæ deferentis NO ſubducatur motus proprius corporis M in hac deferente, adeò quidem, ut ſi, exacto quodam tempore atque motu proprio, mobile ſpatium NE in linea deferente transmiſerit, & in ejus termino E gradum velocitatis DE acquiſiverit, velocitas abſoluta mobilis in aëre (§. 483.) futura ſit BD, exceſſus ſcilicet celeritatis BE vel AN, qua linea deferens movetur, ſupra celeritatem DE in linea deferente mobili acquiſita ab aëris reſiſtentis impreſſionibus. Propterea motus abſolutus & variatus mobilis M in aëre idem erit cum eo, qui reſultaret ex motu communi lineæ deferentis NO, & ex proprio mobilis in hac linea deferente. Quod erat demonſtrandum. Fig. 119.

Corollarium I.

488. Sit jam curva NDO ſcala celeritatum mobilis M in linea deferente NO acquiſitarum, & curva PFO ſcala impreſſionum aëris in mobile M exertarum; & velocitas initialis mobilis M, quæ erat AN; reducta erit ad celeritatem BD eo tempore, quo mobile in linea deferente ſpatium NE transmittit. Adeoque per præcedentem habetur generaliter $EF . Ee = DE . ad$. Id eſt *momentum ſolicitationis acceleratricis* EF *in linea deferente æquivalet momento celeritatis* ED *in eadem linea deferente acquiſitæ*.

Tempus vero per NE ſeu (§. 128.) $\int Ee : DE = \int ad : EF$.

Corollarium II.

489. Hinc ſpatium abſolutum, quod mobile M hoc tempore $\int ad :$

EF in aëre abſolvit, reperietur generaliter AN. *ſda*: EF − NE. Nam linea deferens NO abſolvit motu ſuo æquabili & velocitate AN ſpatium AN. *ſda*: EF tempore *ſda*: EF, & mobile M in linea deferente ſpatium NE.

SCHOLION.

490. Si reſiſtentia medii abſoluta in omnibus ſpatii percurrendi punctis eadem aſſumatur, linea PFO erit recta ipſi NO vel AO parallela; & ſcala celeritatum NDO parabola erit. Nam momentum vis acceleratricis EF fit hoc caſu NP. E*e* = DE. *ad*, & omnia NP. E*e* hoc eſt NP. NE æqualia omnibus DE. *da* ſeu $\frac{1}{2}$DE², hinc 2NP. NE = DE², ergo NDO eſt parabola, cujus parameter eſt 2NP.

Hinc, quia *t*NE = *ſad*: EF = *ſad*: NP, erit *t*NE = DE: NP = DE²: DE. NP = 2NP. NE: DE. NP = 2NE: DE. Hinc NA. *ſad*: EF ſeu NA. *t*NE = 2AN. NE: DE, & ſpatium abſolutum, quod mobile in medio hoc abſolute reſiſtente tempore 2NE: DE transmittit, erit NA. *t*NE − NE = 2AN. NE: DE − NE = (2AN − DE). NE: DE = (2NA. DE − DE²): 2NP.

Celeritas verò mobilis, elapſo tempore DE: NP vel 2NE: DE, reſidua erit BD, ut jam ſupra (§. 488.) dictum. Propterea in iſta hypotheſi mobile M celeritate AN impulſum tempore AN: NP ad quietem redigetur. Hæc probe conſentiunt cum iis, quæ Cl. Varignon Probl. III. Coroll. I. Act. Acad. Reg. Scient. 1707. d. 13. Aug. diverſa tamen methodo, tradidit.

Ubi verò reſiſtentia medii reſpectiva obtinet, atque adeò reſiſtentiæ aëris ab ejus denſitate & velocitatibus mobilis pendent, ipſæ EF ſemper aliquam relationem habebunt cum lineis BD velocitatum mobilis in aëre repræſentatricibus, ut ex ſequentibus dilucide patebit.

PROPOSITIO LVI. LEMMA.

Fig. 119. 491. *Exhibens nonnullas logarithmicæ proprietates deinceps adhibendas.*

I. Elementum cujusque ordinatæ logarithmicæ eſt ad ipſam ordinatam ut elementum axis ad ſubtangentem log-micæ.

Sit enim HI ordinata quæcunque log-micæ NHT, cujus ſubtangens

gens ſit IR, poſitòque Hm elemento ordinatæ HI, agatur hi parallela HI, & mh parallela axi AR, quibus poſitis, triangula ſimilia Hmh & HIR præbent $Hm : HI = Ii : IR$. Quod erat demonſtrandum.

II. Rectangulum HIi, ſub ordinata HI & elemento axis Ii ordinatæ HI adjacenti, æquatur ubique rectangulo ſub ſubtangente IR & elemento Hm ordinatæ HI. Nam analogia præcedentis numeri $Hm : HI = Ii : IR$, præbet $HI . Ii = IR . Hm$.

III. Tertia proportionalis ad ſubtangentem & quamlibet ordinatam log-micæ cum adjacente axis elemento efficit rectangulum æquale rectangulo ſub ordinata ejusque elemento. Eſto VI tertia proportionalis ad IR & IH, ac reſumatur analogia numeri primi $Hm : HI = Ii : IR$, vel permutando $Hm : Ii = HI : IR$ (ſecundùm hypotheſin) $= IV : HI$. Ergo $VI . Ii = HI . Hm$.

IV. Si in duabus logarithmicis NHT & 2N2H2T ordinata NA fuerit ad HI, ſicut 2N2A ad 2H2I, erit AI ad 2A2I ſicut ſubtangens IR ad ſubtangentem 2I2R. Sint enim Ii & $2I2i$ elementa ſimilia totarum AI & 2A2I, eritque $HI : hi = 2H2I : 2h2i$; quoniam hæ rationes ſunt ſubmultiplices æqualium rationum ſecundum eundem multiplicitatis numerum; idcirco erit $Hm : HI = 2H2m : 2H2I$, atqui (num. 1. hujus) $Hm : HI = Ii : IR$, & $2H2m : 2H2I = 2I2i : 2I2R$, ergo $Ii : IR = 2I2i : 2I2R$, & permutando $Ii : 2I2i = IR : 2I2R$; verum, quia Ii & $2I2i$ ſunt particulæ ſimiles totarum AI, 2A2I, erit $Ii : 2I2i = AI : 2A2I$, ergo etiam $AI : 2A2I = IR : 2I2R$. Quod erat demonſtrandum. Fig. 119. & 120.

Corollarium.

492. Hinc log-us rationis duarum magnitudinum diviſus per ſubtangentem logarithmicæ, ex qua log-us dictæ rationis deſumtus eſt, eſt idem cum log-mo ejusdem rationis deſumto ex qualibet alia logarithmica, ſed diviſo per ſubtangentem hujus alterius logarithmicæ. Atque hinc liquet, quâ ratione logarithmi deſumti ex data quadam log-mica transferri queant in log-micam, quæ vulgares tabularum logarithmos continet, & viciſſim.

Propositio LVII. Lemma.

493. *Si ex eodem centro* M, *& ſemilatere transverſo* MI *deſcriptus* Fig. 121.

ſit

ſit quadrans circuli ILA *& hyperbola æquilatera* IL, *quorum ordinatæ* LS *referantur ad axem* MS, *erit in circulo & in hyperbola rec-lum* MS. Ss, *ſub abſciſſa ejusque elemento, æquale homologo rec-lo* LS. Lm *vel* lm *ſub ordinata ejusque elemento.*

In circulo. Juncta ML, triangula ſimilia MLS & L*lm* præbent MS : LS = L*m* : *lm* vel S*s*; adeoque MS. S*s* = LS. L*m*.

In hyperbola. Jungantur IS & I*s*, & centro I intervalloque IS deſcriptus intelligatur arculus S*u*. Jam ex natura hyperbolæ eſt LS = IS, & *ls* = I*s*; ergo *us* = *lm*. Atqui triangula ſimilia ISM & S*su* ſuppeditant analogiam S*s* : *su* vel *lm* = IS vel LS : MS. Ergo MS. S*s* = LS. *lm*. Quod erat demonſtrandum.

Scholion Generale.

494. Traditis jam generalibus principiis, ex quibus quicquid ad motus corporum in mediis reſiſtentibus pertinet, deduci poteſt, & nonnullis lemmatis geometricis in applicatione principiorum neceſſariis; ad hanc applicationem jam veniendum reſtat. Et primùm quidem, quod motus ex reſiſtentia abſoluta concernit, id cum in paragrapho ſuperiore 490, tum etiam in ſecunda ſectione Libri primi quadantenus jam præſtitum eſt, etenim in citato paragrapho definitus eſt motus variatus reſultans ex primitive uniformi in hypotheſi reſiſtentiæ abſolutæ; in Capite verò primo Sect. Sec. Libr. I. §.§. 150, 151. determinati ſunt motus gravium in hypotheſi gravitatis uniformis, ad quem caſum etiam revocari poteſt reſiſtentia abſoluta, qua in ſingulis percurrendi ſpatii punctis eadem quantitate corporibus reſiſtitur; unde ſi conſtans ubique reſiſtentia à conſtanti gravitate ſubducetur, reſidua ſolicitatio acceleratrix etiam conſtans erit, unde quæ citato loco reſpectu gravitatis uniformis demonſtrata ſunt, ea ſolicitationi ejusmodi acceleratrici etiam applicari poſſunt & debent. Idcirco non eſt quod reſiſtentiæ abſolutæ ſeu motibus inde orituris diutius immoremur. Reſiſtentia medii reſpectiva pendet à velocitate, qua mobile in ejusmodi medio incedit. Tres ſunt præcipuæ hujus reſiſtentiæ hypotheſes, quas in ſequentibus capitibus primùm ſigillatim percurremus, deinde analyſin trademus, qua motus in ejusmodi mediis variati generaliter determinabuntur.

CAPUT XV.

De motibus Corporum, quibus aër reſiſtit in ratione celeritatum mobilis.

PROPOSITIO LVIII. Theorema.

495. *Spatium, quod mobile quoddam in aëre, juxta proportionem celeritatum ejus actualium, variato motu ex primitive uniformi certo quodam tempore transmittit, exponitur eadem linea, quâ velocitatis mobilis initialis pars hoc tempore amiſſa repræſentatur. Et tempus abſolutum, quo dictum ſpatium abſolvitur, exponi debet per logarithmum rationis, quam habet velocitas initialis mobilis ad velocitatem abſolutam ejusdem elapſo hoc tempore, applicatum ad ſubtangentem illius logarithmicæ, ex qua prædictus logarithmus deſumtus eſt.* Fig. 119.

Sit M mobile in plano quodam horizontali celeritate AN impulſum, juxta rectam NQ, in qua deinceps æquabiliter incederet celeritate eadem AN, ſi in vacuo ferretur, ſed quia in aëre juxta proportionem celeritatum ſuarum reſiſtente movetur, ſingulis momentis aliquid de ſuâ velocitate actuali decedet. Ipſi verò motus ope propoſitionis 55. hujus ſecundi libri facile determinantur; quandoquidem, juxta hanc propoſitionem, iidem ſunt motus variati ex primitive uniformi in aëre reſiſtente, qui reſultarent ex motu communi alicujus lineæ deferentis, & ex motu proprio mobilis in hac deferenti linea orto ab appulſu aëris corpori in linea deferente delato.

Sit ergo NO hæc linea deferens celeritate mobilis initiali AN, æquabili motu tendens verſus Q, & poſt aliquod tempus mobile M in hac linea deferente ſpatium NE percurriſſe intelligatur, atque in ea celeritatem DE exacto dicto tempore acquiſiviſſe, quo fiet, ut velocitas ejus initialis AN reducta ſit ad velocitatem actualem (qua ſcilicet in aëre movetur) BD; hac ergo velocitate aër mobili allabitur & reſiſtentia eſt ut hæc celeritas, ergo impreſſio ſeu ſolicitatio acceleratrix mobilis in linea deferenti, quæ generaliter eſt EF, jam erit BD. Propterea curva PFO erit ſimilis & æqualis curvæ NDO, adeò ut tantùm (§. 488.) determinandum reſtet, quænam ſit curva NDO, ut in ea BD. B*b* ſeu EF. E*e* æquetur rec-lo *ead* ſeu ED. *ad*. Ubi E*e* vel B*b* eſt elementum ſpatii NE, & *ad* elementum ordinatæ DE.

Per

Per punctum N ducta ſit log-mica NHT, cujus ſubtangens AK (poſito ſcilicet rectam NK ipſam contingere in puncto N) æqualis AN, atque in ea ad aſymptotam AR aptetur ordinata IH æqualis BD, eaque producatur in S; ductaque per logarithmicæ punctum H recta indefinita HCD parallela OQ, tangentem log-micæ NK in G, rectamque NA in C ſecante, ſi in ea ſumatur ubique CD æqualis GH, interceptæ inter tangentem NK & log-micam NHT, erit ſemper punctum D in ſcala celeritatum propriarum mobilis in linea deferente NO.

Ducantur enim per punctum log-micæ H tangens HR & linea HL parallela tangenti NK, eruntque HI & IL, item LR & HS vel DE æquales, ductaque inſuper *dh* alteri DH indefinite vicina lineola *mh* & IR à media HL proportionaliter ſecentur, eritque adeò HI vel BD aut EF ad LR vel HS ſeu DE, ſicut H*m* ſeu *da* ad *nh*; adeoque EF.*nh* = DE.*da*. Jam, quia (conſtr.) DC vel EN = GH & N*e* = *ch*, erit *nh*, differentia inter GH & *gh*, æqualis E*e*; nam H*n* eſt parallela ipſi G*g*. Ergo EF.*nh* = EF.E*e* = DE.*da*. Quod erat demonſtrandum.

Porro eſt *nh* : LR = *mh* : IR, atqui *nh* : LR = E*e* : DE (§. 128.) = *t*E*e*, ergo *t*E*e* = I*i* vel *mh* : IR; ergo omnia *t*E*e*, id eſt, tempus per NE = omnibus I*i* : IR = AI : IR = log. (AN : HI) applicatus ad IR vel AN. Hoc eſt, tempus abſolutum, quo mobile percurrit ſpatium NE in linea deferente, exponitur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis AN ad celeritatem mobilis reſiduam IH elapſo hoc tempore, applicato ad log-micæ ſubtangentem.

Hinc, quia (§. 489.) ſpatium abſolutum, quod mobile M dato illo tempore in aëre transmittit, eſt AN.*t*NE − NE, erit hoc ſpatium AI − NE = CH − GH = CG = NC, quoniam (conſtr.) AN = AK, item *t*NE = AI : AN, & NE (conſtr.) = GH. Ergo ſpatium abſolutum, quod mobile nominato tempore percurrit, in aëre repræſentatur per eam lineam NC vel DE, quæ velocitatis amiſſam partem exhibet. Quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium I.

496. Ergo ſi mobilis celeritates actuales BD ſeu IH ſumantur in progreſſione geometrica, tempora reſpectiva AI : AN erunt in progreſſione arithmetica.

Co-

Corollarium II.

497. Adeoque velocitas mobilis non niſi tempore infinito extingui poteſt, cum log-us rationis AN ad o, ſeu ad quantitatem qualibet data minorem, ſit infinitus. Propterea mobile M ejusmodi motu ex primitive uniformi derivato in aëre nunquam percurrere poteſt ſpatium AN datæ magnitudinis.

Hæc omnia ad amuſſim conveniunt cum determinationibus Newtoni Prop. 2. Lib. 2. Pr. Phil. Nat. Leibnitii Act. Erud. 1689. art. 1. Walliſii Algebr. cap. 101. Et Varignonii Act. Acad. Reg. Pariſ. Scient. 1707. die 13 Aug. probl. 1. & coroll. annexis.

PROPOSITIO LIX. Theorema.

498. *Si grave in aëre juxta rationem celeritatum reſiſtente verticaliter à quiete deſcendat, ſpatium, quod mobile aliquo tempore perlabitur, exponetur exceſſu, quo factum ex tempore deſcenſus in velocitatem corporis terminalem excedit lineam, quæ celeritatem mobili acquiſitam repræſentat. Tempus vero ipſum exponetur log-mo rationis, quam gravitas abſoluta mobilis habet ad ſolicitationem acceleratricem in termino dicti ſpatii, applicato ad log-micæ ſubtangentem.* Fig. 122.

Sin verò grave in aëre eodem verticaliter in altum projiciatur data cum celeritate initiali, altitudo totius aſcenſus mobilis exponetur exceſſu, quo velocitas initialis excedit factum ex tempore aſcenſus in velocitatem terminalem. Et tempus ipſum exponetur log-mo rationis reſiſtentiæ totalis initio aſcenſus ad gravitatem abſolutam mobilis applicato ad ſubtangentem logarithmicæ.

I. Sit B*t*C log-mica ad axem FI extructa, cujus ſubtangens FH ſit quæcunque, & BH tangens log-micæ in puncto B. Ducatur pro lubitu linea DC æquidiſtans ipſi FI, rectæ BF in puncto D, tangenti BH in E, & denique log-micæ in puncto C occurrens. Eritque EC intercepta inter tangentem BH & log-micam BC ſpatium percurſum deſcenſu mobilis, ratio DC : FH exponet tempus, quo ſpatium EC conficitur, & denique DE intercepta inter BF & BH exponet celeritatem mobili acquiſitam tempore prædicto DC : FH. FH verò exponet celeritatem terminalem, ſeu maximam, excluſive. Hinc ducta EG parallela BF, recta GH repræſentabit ſolicitationem acceleratricem in fine ſpatii percurſi EC. Nam quoniam FH

repræſentat gravitatem abſolutam, & (ſecundùm hypotheſin) DE vel FG reſiſtentiam medii, reſidua GH exponet omnino ſolicitationem acceleratricem mobilis, ut adeò aliud non reſtet faciendum, quam (§. 484.) ut probetur hanc conſtructionem præbere GH. $\delta c =$ DE. gh, ſeu *momentum ſolicitationis acceleratricis* GH *æquari momento celeritatis* DE, ductis dc parallela DC, & δC parallela BH, adeo ut δc ſit elementum lineæ EC, & gh elementum lineæ DE. Ubi obiter notandum, punctum C in figura per accidens tantum reperiri in communi interſectione rectæ HP, æquidiſtantis FO per datum poſitione punctum H ductæ & log-micæ BC, cum dictum punctum C quodlibet aliud log-micæ punctum eſſe poſſit.

Demonſtr. Fiat GI = FH, eritque HI = FG = DE, & acta EI erit parallela tangenti log-micæ in C, atque adeò Ei erit parallela & æqualis elemento logarithmicæ Cc, & $\delta c = hi$. Jam, quia GH : HI vel DE, $= gh : hi$ ſeu $c\delta$ erit GH. $\delta c =$ DE. $g h$. Quod erat unum.

Porrò gi vel $\varkappa c$: GI $= gh$: GH (§. 128.) $= t\delta c$, ergo omnia $\varkappa c$: GI, ſeu DC : GI = tempori deſcenſus in ſpatio EC. Atqui DC eſt log-us rationis FB ad GE ſeu HF ad GH, hoc eſt, rationis, quam habet velocitas terminalis FH ad ſolicitationem acceleratricem GH. Nam, quia DE exponit (ſecundùm hypotheſin) velocitatem mobili acquiſitam, & quia hæc fit FH, ubi DC facta fuerit infinita, manifeſtum eſt celeritatem terminalem per ſubtangentem FH exponendam eſſe, qua etiam gravitas abſoluta mobilis repræſentatur. Idcirco tempus deſcenſus per ſpatium EC eſt log-us rationis FH : GH diviſus per ſubtangentem FH. Adeoque DC eſt factum ex tempore deſcenſus per EC in velocitatem terminalem FH, & ſpatium EC eſt exceſſus facti modo nominati, ſupra rectam DE, quæ celeritatem acquiſitam exponit. Quæ omnia erant demonſtranda.

499. Ponatur ſecundò mobile aſcendere in linea verticali ak vel AN celeritate initiali NO, oſtendendum reſtat, altitudinem, ad quam mobile pertingere poſſit, eſſe ak vel AN interceptam inter tangentem BN & log-micam BTA, tempusque, quo altitudo iſta conficiatur, eſſe AO : FH. Linea ak alteri AN indefinite vicina ponitur, unde ducta Aα parallela BN, lineola $a\alpha$ erit decrementum ſpatii ak verſus B continue decreſcentis cum velocitate NO. Initio motus reſiſtentia aëris (ſecundùm hypotheſin) eſt NO, & gravitas FH vel OP corpori aſcendenti etiam opponitur, adeoque (§. 481.) reſiſtentia totalis eſt NP. Propterea oſtendendum, conſtanter eſſe

NP :

NP. $a\alpha$ *momentum ſcilicet reſiſtentiæ totalis* NP *æquale* NO. kl *momento celeritatis decreſcentis* NO.

Si enim iterum LM = FH & NM ducta fuerit, erunt MH = NO, & $km = a\alpha$, & LH : MH = NP : NO = $kl : km$ vel $a\alpha$, adeòque NP. $a\alpha$ = NO. kl. Idcircò omnia decrementa $a\alpha$, id eſt ak, ſeu AN, ſunt altitudo, quam aſcendens mobile abſolvere poteſt.

Item ml : LM = km ſeu $a\alpha$: MH vel NO. (§. 128.) $ta\alpha$; ergo omnia ml : LM, ſeu omnia ab : LM, hoc eſt, AO : LM æquantur omnibus $ta\alpha$, ſeu tempori aſcenſionis mobilis in ſpatio ak vel AN. Atqui AO eſt log-us rationis A2F ad BF, ſeu rationis æqualis NP ad OP, id eſt, rationis, quam habet reſiſtentia totalis initio motus ad gravitatem. Adeoque temp. per AN = log. (NP : OP) diviſ. per LM vel FH, & LM in tAN = AO = log. (NP : OP). Ergo, cum AN ſit NO − AO, erit altitudo, quam mobile aſcendens percurrere poteſt, exceſſus, quo celeritas initialis NO excedit factum ex tempore aſcenſionis in celeritatem terminalem FH vel LM.

Corollarium I.

500. Tempus, quo aſcendens grave ſuam altitudinem AN vel QB emetietur, eſt ad tempus deſcenſus ejusdem ex eadem altitudine BQ, ſicut AO ad OP. Hoc per ſe ſatis clarum. Nam tempus deſcenſus per BQ vel EC (§. 498.) eſt DC : FH ſeu OP : FH, & tempus aſcenſus in AN (§. 499.) eſt AO : FH. Ergo &c.

Corollarium II.

501. Tempus quo mobile ſpatium AN aſcendendo trajicit celeritate initiali NO, eſt ad tempus, quo idem grave in vacuo & celeritate eadem initiali NO ſuam altitudinem, quousque pertingere poteſt, abſolveret, ut AO ad NO vel A2Q; ducta ſcilicet per Q recta Q2Q parallela FO. Nam tempus aſcenſionis in aëre per altitudinem AN eſt, ut vidimus, AO : TH; grave verò in vacuo aſcendens emetietur (§. 139.) ſuam altitudinem eo tempore, quo id à quiete cadere incipiens accelerato motu celeritatem NO initiali æqualem acquirere poteſt; atqui (§. 151.) hoc tempus eſt, ut celeritas acquirenda NO applicata ad rectam FH, quæ gravitatem uniformem exponit; atque adeò NO : FH exponit dictum tempus aſcenſionis mobilis in vacuo. Eſt ergo tempus aſcenſionis in aëre ad

tempus aſcenſionis in vacuo ut AO : FH ad NO : FH, id eſt, ſicut AO ad NO ſeu A2Q; nam ob æquales & parallelas BN & QA, etiam æquales erunt NO & A2Q.

Corollarium III.

502. Altitudo AN, quam grave celeritate NO verticaliter in altum projectum percurrere poteſt, erit ad altitudinem, quam eadem celeritate in vacuo ſurſum projectum abſolvere poſſet, ut rec-lum FBQ vel FB. AN ad triangulum BNO. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo abſolvenda exponitur quadrato velocitatis initialis NO, applicato ad duplum gravitatis, ſeu 2FH; ergo altitudo in aëre eſt ad altitudinem in vacuo abſolvendam ſicut AN vel BQ ad NO^2: 2. FH; vel ſicut QB ad OB. ON : 2. FB, cum NO ſit ad FH ſicut BO ad BF; ergo prædictæ altitudines ſunt ut BF. BQ ad BO. $\frac{1}{2}$ON id eſt, ut rec-lum FBQ ad triangulum BON. Verùm rec-lum FBQ æquatur trilineo BA2B; nam quadrilineum FBA2F, indicante Hugenio & demonſtrante Cel. Viro Guidone Grando in ſuis Hugenianis cap. 8. num. 14, æquatur rec-lo BO. FH, quod quidem ex ſuperioribus (§. 491. num. 11.) facillime probari poteſt; nam quia fig. 119. rec-lum HI. I*i* = rec-lo IR. H*m*, erunt omnia HI*i*, quæ in area NAIH continentur, id eſt hæc area ipſa = omnibus IR. H*m* ſeu
Fig. 122. IR. NC. Eodem ergo argumento ſequitur quadrilineum FBA2F æquari rec-lo FH. BO ſeu rec-lo ex ſubtangente log-micæ in differentiam ordinatarum A2F & BF. Atqui propter ſimilitudinem triangulorum HFB & NOB, eſt FH. BO = FB. NO = rec-lum LFB, ergo LFB = FBA2F, & ablato communi rec-lo BF2F, reſtabit L2F2B = FBQ = trilineo BA2B.

Hinc, quia altitudo in aëre conficienda eſt ad altitudinem in vacuo percurrendam, ſicut rec-lum FBQ ad triangulum BNO, erit etiam prior altitudo ad alteram ut trilineum BA2B ad triangulum BNO.

Corollarium IV.

503. Celeritas initialis gravis ſpatio AN vel QB in aëre aſcendentis, eſt ad celeritatem quacum in terram recideret, emenſo eodem ſpatio NA vel BQ, ſicut NO ad DE, vel propter triangula ſimilia BON & BDE, ſicut BO ſeu RP ad BD vel RC.

Hæc

Hæc quatuor corollaria continent omnia, quæ Nobil. Hugenius circa motus corporum in lineis rectis verticaliter aſcendentium & deſcendentium in præſenti reſiſtentiæ aëris hypotheſi absque omni demonſtratione ſimpliciter indicavit, ad calcem ſuæ Diatribæ *De Cauſa gravitatis* pag. 171, & quæ Cl. Varignonius poſtea eleganter etiam demonſtravit in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. 1708.

Corollarium V.

504. Cum tempora aſcenſus per ſpatia AN, & TS vel YN ducta, ſcilicet parallela TY ad BN vel QA, ſint AO : FH, & TW : FH, exiſtentibus celeritatibus initialibus NO & SW; erit ideo $tAY =$ (AO − TW) : FH = log. (OF : WF) : FH, in log-mica, cujus ſubtangens eſt FH, vel §. 492. ſimpliciter = log. (OF : WF) in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas.

Corollarium VI.

505. Sic etiam tempus, quo grave ſpatium *st* in aëre perlabitur, eſt log. (BF : WF) in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas. Nam tempus per $st = wt$: FH, & $wt =$ log. (BF : wF), ergo (§. 492.) wt : FH = log. (BF : wF) in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas.

Corollarium VII.

506. Unde, ſi grave quoddam projiciatur in aëre reſiſtente juxta præſentem hypotheſin, ſecundum directionem tangentis BH log-micæ BtC in puncto B, & celeritate ea, ut celeritas verticalis FH ex obliqua jactus BH derivata par ſit celeritati *terminali gravis* ſeu *maximæ* excluſive, corpus projectum arcum log-micum BtC in aëre deſcribet. Fingatur enim rectam *sx* ex ſitu BR verſus C ſibi ſemper parallelam moveri, ita ut ejus extremitas *s* ſemper in recta BH exiſtat, ejusque velocitas, juxta lineam BH, hac ipſa BH exponatur; idcirco, ſi ponatur puncto interſectionis *s* rectæ *sx* & BH reſiſti in ratione celeritatum, hoc punctum *s* tempore, quod exponitur per log. (BH : sH) : FH vel (§. 492.) per log. (BH : SH) vel propter triangula ſimilia BFH & Bws, per log. (BF : wF) in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas, percurret ſpatium Bs; grave verò hoc eodem tempore log. (BF : wF) in linea deferente perlabetur ſpatium *st*,

ut in coroll. VI. (§. 505.) dictum; eo ergo tempore, quo deferens linea sx ex ſitu BK venit in ſitum sx, grave in ea motu accelerato perlabitur ſpatium st, adeò ut id ſemper inceſſurum ſit in linea logarithmica BtC, prorſus ut Hugenius absque demonſtratione aſſeruit, & Varignonius analytico id calculo in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. 1708. eleganter demonſtravit.

507. Hugenius addit pag. 173. Diſſertationis *De la Cauſe de la Peſanteur* hujus log-micæ ſpeciem eo determinari, quod ejus ſubtangens dupla ſit altitudinis, ad quam grave celeritate initiali terminalem æquante aſcendens, in vacuo pervenire poſſit. Hoc facile deducitur ex §. 150. Nam ſi quadratum ſubtangentis FH, quæ exponit celeritatem terminalem, applicetur ad duplum ſubtangentis ejusdem, quæ etiam gravitatem uniformem exponit, reſultabit inde altitudo maxima, ad quam mobile in vacuo aſcendens velocitate initiali terminalem in aëre æquante, pervenire poteſt, æqualis ſemiſſi ſubtangentis log-micæ.

508. Addam & ego mobilis celeritate & directione BH in aëre projecti, & log-micam BtC deſcribentis velocitatem in quolibet log-micæ puncto t, exponi debere tangente log-micæ tu in hoc puncto t; ut adeò mobilis celeritas in logarithmica terminali ſemper major futura ſit, etſi decreſcat, eique ſemper magis magisque accedat. Aſſertionis demonſtrationem utpote facillimam non adduco.

Corollarium VIII.

509. Si grave, data cum celeritate, verticaliter deorſum projiciatur in aëre reſiſtente juxta proportionem celeritatum, motus corporis ex duabus præcedentibus propoſitionibus facili negotio determinabuntur, perinde ac præcedens corollarium ex iisdem elicuimus. Fig. 119. Eſto enim AN celeritas initialis ſeu velocitas projectionis, & quia ſi mobile in vacuo ferretur, ejus motus mixtus foret ex æquabili projectionis & ex motu accelerato gravitatis, ita etiam ejus motus in aëre mixtus eſt duplici motu variato, ſcilicet ex eo, qui reſultat a motu primitive uniformi, & ex eo qui naſcitur à primitive accelerato; ambo hi motus ſeorſim conſiderari poſſunt. In figuris 119. & 122. ſint ordinatæ logarithmicæ AN, HI, BF atque HC proportionales, atque adeò erit (§. 491. num. IV.) AI : DC = AK : FH, atque adeò DC : FH = AI : AK, atqui (§. 498.) DC : FH, ſeu logarithmus

rithmus rationis BF ad DF, ſeu FH ad GH, id eſt, log-us rationis, quam gravitas habet ad ſolicitationem acceleratricem in aëre diviſus per ſubtangentem FH, exponit tempus deſcenſus gravis in aëre per ſpatium EC, idque à ſola gravitate. Altera verò ratio AI : AK (§. 495.) exponit tempus, quo mobile motu ex primitivo æquabili variato in aëre transmittit ſpatium NC, ſed quia oſtenſum eſt DC : FH = AI : AK, hæc tempora erunt æqualia; propterea tempore DC : FH mobile deſcribet in aëre, motu mixto motibus ex æquabili & accelerato à gravitate uniformi derivatis, ſpatium NC + EC (inſpiciendo utramque figuram 119. & 122.): atque in fine prædicti temporis celeritas mobilis erit HI + DE. Eſt verò NC = AN − HI, & EC = DC − DE, ergo NC + EC = AN + DC − HI − DE, atque adeò ſpatium indicato tempore transmiſſum erit DC + AN − HI − DE, & celeritas, in termino hujus ſpatii acquiſita vel reſidua, HI + DE = HI + FH − GH = AN + FH − NC − GH. Quæ quantitas creſcente tempore AI : AK vel DC : FH, atque adeo decreſcente HI aut creſcente NC, continue decreſcit, quandiu AN major eſt quam FH; ita tamen, ut minima excluſive, cui ſemper magis magisque appropinquatur, futura ſit FH, æqualis velocitati terminali. Sin verò AN, ſeu velocitas jactus, minor fuerit terminali FH, ſumma HI + DE continue creſcit, usque dum HI in infinitum imminuta evanuerit, alteraque DE facta fuerit FH, æqualis ſcilicet velocitati terminali.

PROPOSITIO LX. Problema.

510. *Invenire curvam 2M2T2C, quam grave ſecundum directionem 2M2R, dato angulo 2R2M2L, ad horizontem inclinatam celeritate 2M2G projectum, in aëre, juxta proportionem celeritatum reſiſtente, deſcribet.* Fig. 123.

Solutio. In puncto 2G excitata normali 2G2D ad 2M2G, circa 2G2D tanquam axem deſcripta ſit per punctum 2M log-mica 2M2B2Q, ſubtangentem habens 2G2*u*, quæ juxta præcedentia, gravitatem uniformem ſeu etiam velocitatem terminalem exponit. Jungatur 2M2*u*, quæ log-micam in puncto 2M continget; tunc per quodlibet punctum 2*r* directionis jactus ductis 2*r*2*l* & 2*r*2*b* rectis 2G2E, & 2G2D æquidiſtantibus, quarum altera tangenti log-micæ in 2*s* & log-micæ ipſi in 2*b* occurrat: denique fiat ubique in quolibet 2*r*2*l* ejus pars 2*r*2*t* æqualis homologæ 2*s*2*b*, interceptæ inter

tan-

tangentem & log-micam, eritque ſemper punctum $2t$ in curva quæſita $2M2T2C$.

Demonſtr. Intelligatur iterum quædam linea $2M2N$, grave projectum ſecum deferens, motu ſibi ipſi & $2G2E$ ſemper parallelo ferri, & quidem motu variato ex primitive uniformi in aëre ſecundum celeritatum rationem reſiſtenti, exiſtente celeritate initiali eadem cum celeritate jactus $2M2G$; atque in hac linea deferente $2M2N$ grave libere cadere motu eadem ratione accelerato, quam qui in propoſitione antecedente definitus eſt; quibus poſitis, linea deferens $2M2N$ ex hoc ſuo primo ſitu veniet in ſitum $2r2l$, deſcribendo in directione jactus ſpatium $2M2r$, (§. 495.) tempore, quod exponitur per log. $(2M2G : 2r2G) : 2G2u = 2r2b : 2G2u$, atqui hoc eodem tempore (§. 505.) grave in linea deferente perlabitur ſpatium æquale $2s2b$ ſeu (conſtr.) $2r2t$. Ergo ſimulatque linea deferens $2r2l$ percurrit ſpatium $2M2r$, grave perlabitur in ea ſpatium $2r2t = 2s2b$, atque adeò id ſemper durante ejusmodi motu mixto invenietur incedere in curva $2M2T2C$. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIUM I.

511. Tangens $2g2t$ per quodlibet curvæ punctum $2t$ ducta, exponet celeritatem mobilis in eodem curvæ puncto. Nam elementa rectæ $2M2r$ & curvæ $2M2t$ duabus rectis indefinite vicinis & parallelis interjecta, quarum $2r2t$ eſſet altera, eodem tempore deſcribentur, atque adeò velocitates, quibus dicta elementa percurruntur, erunt ut hæc ipſa elementa; ſed hæc elementa ſunt lineis $2r2G$ & $2t2g$ proportionalia, ergo hæ rectæ etiam velocitatibus, quibus prædicta elementa percurruntur, proportionari debent. Unde, quia (§. 495.) $2r2G$ exponit celeritatem, qua percurritur elementum rectæ $2M2r$, ideò tangens $2t2g$ exponet celeritatem mobilis in curvæ $2M2T2C$ puncto $2t$.

COROLLARIUM II.

512. Recta $2E2G$ aſymptota erit curvæ projectionis $2M2T2C$. Nam ſi $2O2Q$ cadat ſuper $2G2D$, fiet $2P2Q$ infinita, ergo etiam $2O2C$ ipſi $2P2Q$ æqualis infinita erit, ubi ceciderit ſuper lineam $2G2E$.

Co-

Corollarium III.

513. Si 2*u*2D par fiat 2G2E, jungaturque 2M2D log-micam ſecans in 2Q, ductaque ex 2Q recta 2Q2O parallela 2D2G, & per 2O recta 2O2C æquidiſtanti 2G2E; recta 2M2C erit amplitudo curvæ projectionis 2M2T2C.

Corollarium IV.

514. Sic etiam amplitudo curvæ projectionis, in quolibet plano ad horizontem inclinato, 2M2F invenietur, ſumendo 2*u*2*x* = 2F2G, & ducendo 2M2X log-micam ſecantem in puncto 2V. Nam, ſi ex hoc puncto agatur 2V2I parallela 2G2D, & 2I2H æquidiſtans rectæ 2E2G, intercepta 2M2H erit amplitudo quæſita in plano 2M2F ad horizontem inclinato. Erit enim 2X2*u* : 2V2K = 2G2F : 2I2H, unde cum (conſtr.) 2X2*u* ſit = 2G2F, erit etiam 2I2H = 2V2K. Simili ferme ratione demonſtratur præcedens corollarium.

Corollarium V.

515. Quinimo datis amplitudine 2M2C atque celeritate jactus 2M2G, inveniri poteſt angulus 2G2M2E hiſce datis conveniens. Nam ſi coordinatis 2M2O & 2O2Q, nominatis x & y reſpective, conſtruatur curva 2Y2Q, cujus æquatio ſit $y = \frac{cx}{a} + \sqrt{(xx - bb)}$, quam proinde liquet eſſe aliquam ſectionem conicam, ſcilicet hyperbolam, in qua a ſignificat 2M2G, dein c & b denotant log-micæ ſubtangentem datam 2G2*u*, & datam curvæ projectionis amplitudinem 2M2C. Communis interſectio curvæ 2Y2Q & log-micæ 2M2B2Q ſit 2Q, per quam & per punctum 2M ducatur linea 2M2D rectæ 2G2D occurrens in puncto 2D, linea 2*u*D dabit ſinum 2G2E anguli quæſiti 2G2M2E, exiſtente 2G2M radio ſeu ſinu toto.

Corollarium VI.

516. Nec amplius arduum erit determinatu, quinam angulus elevationis 2G2M2E conveniat maximæ omnium amplitudini 2M2C poſſibili. Nam, poſitis iisdem, quæ in coroll. præc. ſymbolis, ſi hoc

 caſu

caſu curvæ 2Y2Q æquatio fuerit $y = \frac{aax - axx}{cx - 2ac} + \frac{cx}{a}$, quam proinde liquet eſſe aliquam Sectionem conicam, novæ curvæ hujus & log-micæ communis interſectio 2Q præbebit lineam 2*u*2D, quæ perpetuo æqualis eſt ſinui anguli 2G2M2E quæſiti. Sed, ſi curva 2Y2Q log-micam nusquam interſecat, problema impoſſibile eſt, quod præſertim de corollario antecedente intelligendum, in quo ſæpe contingere poteſt, ut *b*, ſeu amplitudo jactus, tanta aſſumatur, ut hyperbola inde reſultans log-micam nusquam ſecare queat, atque adeò problema ſolutu impoſſibile ſit, cum contra problema corollarii hujus ſexti ſemper poſſibile exiſtat. Nonnunquam etiam hyperbola corollarii V. hujus log-micam in duobus punctis ſecare poteſt, quo fiet ut problema duas elevationes diverſas 2G2M2E admittat. Horum duorum corollariorum fundamentum conſiſtit in corollariis III. & IV. Calculum verò Lectoris induſtriæ relinquo.

Corollarium VII.

517. Per log-micæ punctum 2*b* ducta ſit tangens 2*b*2*p*, eritque primo 2*u*2*p* = 2G2*g*. Nam elementum lineæ 2*s*2*b* eſt ad elem. lineæ 2M2*s* ut 2*u*2*p* — 2*s*2*b* ad 2*u*2*s*, & elem. lineæ 2M2*s* ad elem. 2M2*r* ut 2*u*2*s* ad 2G2*r*, ergo ex æquo elem. lineæ 2*s*2*b* ad elem. lineæ 2M2*r* ſe habet ſicut 2*u*2*p* — 2*s*2*b* ad 2G2*r*; atqui elementum lineæ 2*s*2*b* vel (conſtr.) æqualis 2*r*2*t* eſt ad element. 2M2*r* ſicut 2G2*g* — 2*r*2*t* vel 2*s*2*b* ad 2G2*r*, ergo 2*u*2*p* — 2*s*2*b* : 2G2*r* ſe habet ut 2G2*g* — 2*s*2*b* : 2G2*r*, atque adeò 2G2*g* — 2*s*2*b* = 2*u*2*p* — 2*s*2*b*, hoc eſt, 2G2*g* = 2*u*2*p*, & ſic ubique. Secundò eſt 2*u*2*p* ubique æqualis reſpectivæ 2*r*2*b*. Nam ducta per 2*b* recta 2*b*2*q*, parallela rectæ 2M2G, erit 2*p*2*q* ſubtangens, atque adeo æqualis ipſi 2G2*u*, hinc ablata (vel addita ſubinde) communi 2*q*2*u*, remanebunt æquales 2*u*2*p* & 2G2*q* vel 2*r*2*b*, ergo etiam 2G2*g* = 2*r*2*b*, unde 2G2*g* — 2*r*2*t* = 2*r*2*b* — 2*s*2*b* = 2*r*2*s*. Propterea eſt elementum 2*t*2*r* ad elem. rectæ 2M2*r*, ſicut 2*r*2*s* ad 2*r*2G. Jam 2*s*2*r* : 2*r*2M = 2G2*u* : 2G2M, & 2*r*2M : 2*r*2G = 2*r*2M : 2*r*2G, ergo per rationum compoſitionem, & ex æquo 2*s*2*r* : 2*r*2G = 2*r*2M. 2G2*u* : 2G2M. 2*r*2G. Erit ergo etiam elementum rectæ 2*r*2*t* ad element. rectæ 2M2*r* = 2*r*2M. 2G2*u* : 2G2M. 2*r*2G. Hinc, ſi lineæ nominentur, ut ſequitur, ſcilicet 2M2G, *b*; ſubtangens 2G2*u*, *a*; indeterminatæ 2M2*r*, *y*; 2*r*2*t*, *x*, harum elementa *dy* & *dx*, & analogia modò reperta element. 2*r*2*t* : elem. 2M2*r* = 2*r*2M. 2G2*u* : 2G2M. 2*r*2G præbebit hanc alteram, in terminis

minis analyticis, $dx:dy=ay:bb-by$; adeoque æquatio differentialis curvæ erit $dx=aydy:bb-by$. Quam Celeb. Varignon primus reperit in Act. Acad. Scient. Pariſ. 1708. ad diem 18. Julii, coroll. III; Clariſſ. hic Autor etiam in citato hoc ſchediaſmate conſtructionem tradidit problematis in præſenti propoſitione exhibiti ſimillimam illi, quam ſupra (§. 510.) adduximus, ſed aliter quam à nobis factum, demonſtratam. Et denique in ſchediaſmate die 22. Auguſti ejusdem anni 1708. coram ſocietate prælecto, identitatem curvarum projectionis à ſummis geometris Newtono & Hugenio conſtructarum cum effectione à ſe adducta (quam ab ea, quam nos attulimus, non niſi in demonſtratione differre jam diximus) analytico calculo eleganter commonſtravit. Verùm, quia eadem identitas curvarum, quas conſtructiones Newtoni atque Hugenii cum inter ſe, tum etiam à conſtructione Varignonii prima fronte non parum diſcrepantes præbent, absque calculo eleganter etiam demonſtrari poteſt, eandem identitatem geometrica demonſtratione hoc loco confirmare non gravabor. Ad demonſtrationis facilitatem à conſtructione Hugeniana rem ordiar.

PROPOSITIO LXI. Theorema.

518. *Curva projectionis, cujus conſtructio in propoſitione præcedenti exhibita eſt, ſimilis & æqualis eſt curvæ, quæ reſultat ex conſtructione Hugeniana (vide* Diſcours de la Cauſe de la Peſanteur pag. 171.) *in hypotheſi reſiſtentiarum mediis velocitatibus actualibus mobilis proportionalium.* Fig. 124.

Hugenii conſtructio ita habet. Sint MG directio jactus, ME horizontalis, DE horizonti perpendicularis, circa quam velut axem deſcripta ſit log-mica ABC ſubtangentem habens Dω vel FO, diviſaque qualibet AD alteri EM parallela in K, ut AK ſit ad KD, ſicut celeritas jactus verticalis ex obliqua MG derivata, ad celeritatem terminalem, ſeu maximam excluſive, quam ſcilicet grave nunquam attingere poteſt, etſi ei magis magisque ſemper cadendo accedat. Per K agatur KBL æquidiſtans DE log-micam in B, & horizontalem in L ſecans; ductisque porrò per log-micæ puncta A, B tangentibus Aω, BO, tum etiam AC tangenti BO parallela, quæ KL ſecet in P, & logarithmicam in C; ſi fiat in qualibet KL, rectas Aω, AC, MG & ME ſecante in punctis S, P, R & L, logarithmicam verò in B, ut RL ad TL ita SP ad BP, & $rl:tl=$

sp : *bp*, erunt puncta T, *t*, &c. in curva optata MTC, quam dico eandem eſſe cum curva 2M2T2C in propoſitione LX. §. 510. conſtructa, ſi anguli GME, 2G2M2E, ſubtangentes logarithmicarum Dω & 2G2*u*, & denique celeritates jactus MG, & 2M2G, æquales fuerint.

Fig. 124. & 123. *Demonſtr.* Sint præterea M*r* & 2M2*r* æquales, & æquabuntur pariter *rl* ac 2*r*2*l*. Jam, quia MG exponit celeritatem jactus, EG denotabit velocitatem verticalem ex obliqua MG derivatam, & Dω vel FO (§. 498.) exponit celeritatem terminalem, erit (conſtr.) AK : DK = EG : Dω; &, quia ſi æqualibus Dω & FO communis ωF addatur, provenientes inde DF ſeu KB & ωO æquales, atque adeò rectæ ωK, HB & AI parallelæ ſunt, erit etiam AK : DK = ωI : Dω = EG : Dω; & per conſequens ωI = EG, & ſic ubique *sp* = *rl* = 2*r*2*l*, cùm M*r* & 2M2*r* anguliquе GME, 2G2M2E (ſecundùm hypotheſin) æquentur; porrò AD : *k*D (= MG : *r*G) = 2M2G : 2*r*2G, ergo (§. 492.) *kb* : Dω = 2*r*2*b* : 2G2*u*; ſunt enim *kb* log-mus rationis AD ad *k*D in log-mica ABC, & 2*r*2*b* log-mus rationis alteri æqualis 2M2G ad 2*r*2G in log-mica 2M2B2Q. Vel, quia (ſecundùm hypotheſin) Dω = 2G2*u*, fiet *kb* = 2*r*2*b*, & quia 2G2*u* : 2*r*2*s* (= 2G2M : 2*r*2M = GM : *r*M = DA : *k*A) = Dω : *ks* atque 2G2*u* = Dω, erit 2*r*2*s* = *ks* & *sb* = 2*s*2*b*; hinc etiam ex æqualibus *sp* & 2*r*2*l* ablatis æqualibus *sb* & 2*s*2*b* vel 2*r*2*t*, remanet *bp* = 2*t*2*l*; ſed conſtructio præbet *rl* : *tl* = *sp* : *bp*; ſeu quia *rl* = *sp*, fit etiam *tl* = *bp*, ergo pariter habebitur *tl* = 2*t*2*l*, & ſic ubique, ergo curva Hugeniana MTC eadem eſt cum altera 2M2T2C. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

519. Hinc liquet Hugenium ſuam conſtructionem nonnihil ſimpliciorem traditurum fuiſſe, ſi loco analogiæ RL : TL = SP : BP ſimpliciter juſſiſſet ſumere ubique applicatam TL æqualem homologæ BP interceptæ inter log-micam ABC & ejus ſubtenſam AC.

Corollarium II.

520. Parameter parabolæ, quam miſſile juxta directionem MG & celeritate hac recta expreſſa in vacuo deſcriberet, foret $2.\mathrm{EM}^2 : \mathrm{D}\omega$. Nam, quia celeritas verticalis ex obliqua derivata eſt EG, & gravitas uniformis exponitur per ſubtangentem log-micæ Dω, maxima alti-

altitudo, ad quam grave celeritate initiali EG pervenire poteſt, erit (§. 150.) $EG^2 : 2.D\omega$. Sed GE eſt ad EM, ut dupla parabolæ altitudo ad ſemiſſem amplitudinis, ac propterea hæc dimidia amplitudo eſt $EM.EG:D\omega$. Atqui quadratum dimidiæ amplitudinis parabolæ applicatum ad ejus altitudinem præbet parametrum, ergo hic parameter eſt $2.EM^2:D\omega$. Quod Hugenianæ & Varignonianæ determinationibus, utut aliis terminis expreſſis, conſonum eſt.

PROPOSITIO LXII. Theorema.

521. *Eadem adhuc reſiſtentiæ hypotheſi poſita, curva projectionis, quæ ex conſtructione à Cel. Newtono* (Princ. Phil. Nat. Math. Lib. II. Prop. IV.) *exhibita naſcitur, eadem eſt cum Hugeniana, de qua in propoſitione proxime antecedenti egimus, aut cum curva propoſitionis noſtræ ſexageſimæ primæ.*

Ne Lectori Newtoni conſtructionem alibi quærere opus ſit, eam, ſed aliis quam apud Autorem litteris ſignatam, huc afferre libet. Eadem vero ita habet: Fig. 124.

Aſſumpta MG pro celeritate & directione jactus, ductisque per terminos ejus horizontali ME, ac verticali ED, in qua ejus ſegmentum EG celeritatem verticalem ex obliqua MG derivatam exponit; inter aſymptotas DEM hyperbola quæcunque QV*d* deſcripta intelligatur rectam AM in Q ſecans, per quod punctum agatur inſuper QH æquidiſtans horizontali ME, diviſaque hac ME in L, ut ML ſit ad LE ſicut reſiſtentia medii renitens motui in altum initio projectionis, ſeu velocitas verticalis EG ad gravitatem, ſeu celeritatem terminalem, antea expoſitam per ſubtangentem FO log-micæ ABC, ducatur LK parallela AM, hyperbolam in V ſecans, quæ log-micæ occurret in B & AD in K, quandoquidem in conſtructione Hugeniana (§. 518.) AK etiam eſt ad KD ſicut EG ad FO vel $D\omega$. Per hyperbolæ punctum V agatur *Zz* parallela EM, ſumaturque in ea portio *gz*, quam Newtonus per litteram N deſignat, quæ ſit ad *z*Q vel VN, ſicut ME ad EG, aut ſimplicius, ducatur Q*g* æquidiſtans ipſi MG. Quibus poſitis, ſi in qualibet *rl* parallela KL capiatur *rt* æqualis trilineo hyperbolico Q*un* applicato ad datam *gz*, punctum *t* erit in curva, quæ eadem prorſus eſt cum ea, quam conſtructiones propoſitionum antecedentium LX & LXI, præbent.

Demonſtr. I. Hyperbola QV*d* præbet, $EM:EL = VL:QM$ & dividendo $LM:EL = zQ:QM$, & (conſtr.) $LM:EL = EG:D\omega = rl:$

ks, ergo etiam $zQ : QM = rl : ks$, tum etiam (conſtr.) $gz : zQ$ ($= ME : EG$) $= Ml : rl$, ergo ex æquo $gz : QM = Ml : ks$; atque adeò $Ml . QM = gz . ks$.

II. Reſumatur analogia $zQ : QM = GE : D\omega$, & $gz : zQ = EM : GE$, ergo ex æquo $gz : QM = EM : D\omega$. Atque adeò $EM . QM = D\omega . gz$.

III. Conſtructione eſt trilineum hyperbolicum $Qnu = gz . rt$, additisque $Ml . QM$ (num. 1. hujus) $= gh . ks$, fiet $QulM = rt . gz + ks . gz$. Atqui (§. 368.) $QMlu : EM . MQ = kb : D\omega$ & (num. 11. hujus) $EM . QM = D\omega . gz$; ergo $rt . gz + ks . gz : D\omega . gz = rt + ks : D\omega = kb : D\omega$; atque adeò $rt + ks = kb = sb + ks$: hinc tandem $rt = sb$, ut habent conſtructiones propoſitionum LX & LXI; propterea tres diverſæ conſtructiones propoſitionum trium poſtremarum unam eandemque curvam ſuppeditant. Quod erat demonſtrandum.

CAPUT XVI.

De motu Corporum, in aëre reſiſtente in duplicata ratione celeritatum mobilis.

HÆc reſiſtentiæ hypotheſis convenit fluidis perfectis atque raris, quorum ſcilicet partes prorſus non cohærent, ſed liberrime, ubi corporibus ſolidis impegerunt, recedere queunt; ipſius vero hypotheſeos ratio alibi (§. 427.) jam data eſt.

PROPOSITIO LXIII. THEOREMA.

Fig. 125. 522. *Motus variati ex primitive uniformi in aëre juxta duplicatam celeritatum rationem reſiſtente ita ſe habent, ut ſpatium transmiſſum aliquo tempore exponatur log-mo rationis, quam habet celeritas initialis mobilis ad reſiduam eidem mobili poſt dictum tempus. Hoc verò tempus, ratione celeritatis amiſſæ mobilis ad reſiduam.*

I. Sit nunc linea MO deferens, quæ juxta NQ quieſcentem æquabiliter incedere intelligatur eodem modo, quo ad propoſitionem LVIII. dictum eſt (§. 495); mobile vero M feratur ad oppoſitam partem ſcilicet verſus O in deferenti linea, quæ verſus Q æquabiliter procedit; ſint præterea MDO ſcala celeritatum mobilis motu proprio in deferente linea currentis, & PFO ſcala ſolicitationum acceleratricium ſeu impulſuum aëris mobili allidentis. Unde, ſi aliquo tempore

pore mobile M confecerit in linea deferenti ſpatium ME, & in ejus termino acquiſiverit celeritatem DE, velocitas abſoluta mobilis in aëre erit BD, quâcum aër mobili M allabetur, unde per hypotheſin erit MP ad EF in duplicata ratione AM ad BD; hoc eſt MP : EF $=$ AM^2 : BD^2. Ponitur enim AM, ſeu MN vel NT, pro deſignanda velocitate initiali. Jam ductis per punctum N intra aſymptotas MA & AR hyperbolâ NHK, & log-micâ NGK ſubtangentis NT; in linea indefinita DCH parallela OQ & quomodocunque inter parallelas OR ac OQ ducta, fiat VD æqualis interceptæ GH inter hyperbolam NHK & log-micam NGK, eritque punctum D in ſcala celeritatum mobilis propriarum MDO. Per punctum *d* alteri D indefinite vicinum agantur *dh* parallela OQ, & *bf* æquidiſtans alteri BF; ac ductis per punctum hyperbolæ H rectis IS & HL, ita ut IL $=$ NT (ſeu $=$ ſubtangenti logmicæ NGK in puncto G, atque adeò HL parallela ſit tangenti log-micæ in G, ſeu elemento G*g*) ac denique tangente hyperbolæ HR, adeo ut AI ſit $=$ IR, & LR $=$ TI $=$ NS; quibus factis erit *nh* $=$ E*e* $=$ D*a*, & H*m* $=$ *da*.

II. Hyperbola præbet, AI : AT $=$ TN : IH, & dividendo LR vel TI : AT $=$ DE vel HS : BD ſeu IH, ex hypotheſi verò AT vel AM aut MP : BD $=$ BD : EF, ergo ex æquo LR : IH vel BD $=$ DE : EF; eſt verò LR : IH $=$ *nh* vel E*e* : H*m* ſeu *da*, ergo etiam DE : EF $=$ E*e* : *da*; atque adeò EF. E*e* $=$ DE. *da*. Hoc eſt *momentum ſolicitationis acceleratricis* EF *æquatur momento celeritatis in deferenti linea mobili* M *acquiſitæ* DE. Ergo (§. 488.) curva MDO eſt ſcala celeritatum, & PFO ſcala reſiſtentiarum, ſeu impulſuum aëris vel ſolicitationum acceleratricium mobilis in linea deferenti, hæc enim omnia idem ſignificant.

III. Agatur SR eritque ea parallela HL; nam IH : IS vel TN $=$ IL vel AT : IR vel AI. Adeoque IS : HS $=$ AM : DE $=$ IR : LR $=$ *mh* : *nh* vel E*e*, hinc E*e* : DE (§. 128.) $=$ *t*E*e* $=$ *mh* : AM; ergo omnia *t*E*e* id eſt *t*ME $=$ CH : AM, hinc AM. *t*ME $=$ CH, & AM. *t*ME, $-$ ME ſeu (§. 489.) ſpatium abſolutum, quod mobile in aëre tranſmittit, erit $=$ CH $-$ GH $=$ CG; adeòque exponi debet logarithmo rationis, quam celeritas initialis mobilis TN habet ad IH vel BD in logarithmica NGK, cujus ſubtangens NT. Quod erat primùm.

IV. Num. III. erat *t*ME $=$ CH : AM $=$ LR : IL $=$ SH : HI $=$ DE : BD, id eſt, tempus quo mobile ſpatium ſuum abſolutum in aëre abſolvit, ſeu motu proprio in linea deferenti ſpatium ME, exponitur

ratione, quam habet celeritatis initialis AM pars hoc tempore extincta DE ad reſiduam BD. Quod erat ſecundum.

COROLLARIUM I.

523. Adeoque, ſi tempora fuerint in progreſſione geometrica aſcendente, atque adeò velocitates mobili poſt hæc tempora reſiduæ etiam in progreſſione geometrica, ſed deſcendente, & quidem reciproca progreſſionis temporum, ſpatia transmiſſa erunt in progreſſione arithmetica. Nam, ſi AT, AI ſint in progreſſione geometrica, differentiæ TI, quæ ſunt ut tempora, erunt in eadem progreſſione aſcendente; ipſæ verò HI, ſeu celeritates mobili reſiduæ ipſis AI reciproce proportionales, erunt in progreſſione geometrica deſcendente, ſpatia vero, ſeu CG, exiſtent in progreſſione arithmetica. Atque cum hoc corollario penitus conſentit Prop. V. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Celeberr. Newtoni.

COROLLARIUM II.

524. Idcirco in iſta reſiſtentiæ hypotheſi mobile in infinitum excurrens, tempore infinito ut CH, ubi infinite acceſſerit ad aſymptotam TR, percurret etiam ſpatium infinitum CG; nam, ſi CG confunditur cum aſymptota TR, fit infinita. In hypotheſi verò capitis præcedentis, mobile tempore infinito ne quidem ſpatium finitæ magnitudinis, quod per rectam celeritatem initialem indicantem exponitur, abſolvere poteſt, ut ſupra (§. 497.) oſtenſum. Quod Hugenio notatu dignum meritò viſum eſt in Tractatu *De la Cauſe de la Peſanteur* pag. 175. circa finem.

PROPOSITIO LXIV. THEOREMA.

525. *Si grave vi gravitatis uniformis in aëre juxta duplicatam rationem celeritatum mobilis reſiſtente verticaliter deſcendat à quiete motum ſuum incipiendo,*

Spatium *deſcenſu confectum exponetur log-mo rationis ſinus totius ad ſinum complementi illius anguli, cujus ſinus rectus celeritatem mobili acquiſitam repræſentat;*

Tempus *verò, quo ſpatium illud pertranſitur, aut prædicta velocitas mobili acquiritur, exponetur log-mo rationis ſinus totius ad tangentem ſe-*

ſemiſſis complementi præmemorati anguli, applicato ad logarithmicæ ſubtangentem.

Grave M deſcendere incipiat à quiete in recta verticali MX, cui alia AO ad angulos rectos aptata ſit; in hac AO capiatur MA, quæ gravitatem uniformem exponat, ac deſcriptis centro M intervallo MA quadrante circuli ILA & hyperbola æquilatera IKk, necnon log-mica NIQ, cujus ſubtangens æquet radium quadrantis vel ſemilatus transverſum MI hyperbolæ; per hyperbolæ & quadrantis punctum I agatur tangens communis IU, quæ æquidiſtans erit ipſi MA. Tum etiam per quodvis quadrantis punctum L ducatur LN parallela AO log-micæ occurrens in puncto N, & recta ALP radio MI producto occurrens in P, per quod punctum ducatur inſuper PQ æquidiſtans MA & log-micæ occurrens in puncto Q, ſitque adhuc NO ordinata log-micæ per punctum N ducta. Dein fiat porrò in recta indefinita MX ſegmentum ME = MO, & ſic ubique reſpective; eritque ductis per puncta E & L rectis EG, LS radiis MA & MI reſpective parallelis, communis earum interſectio D in *ſcala celeritatum acquiſitarum* MDX, adeo quidem, ut mobile poſtquam ſpatium ME perlapſum fuerit, in termino E hujus ſpatii acquiſiverit celeritatem ED vel MS. Factaque ubique EF tertia proportionali poſt rectas EG & ED, punctum F erit in *ſcala reſiſtentiarum* aëris MFX, quæ ſcala etiam erit *ſcala ſolicitationum acceleratricium* mobilis cadentis in recta MX, ſed quatenus ea refertur ad axem AX, verſus quem curva MFX convexa eſt; nam, quia EF, ſeu $ED^2 : EG$, exponit reſiſtentiam medii in puncto E & EG = MA gravitatem uniformem, exponet FG omnino ſolicitationem acceleratricem in puncto eodem E, ut alibi (§. 481.) jam dictum eſt. Igitur ductis *eg* parallela EG & ab ea elemento ſpatii E*e* diſtante; *dlr* parallela DL productæ in *a*, & ſurſum in R, per punctum quadrantis *l*, recta *Alp*, & per *p* linea *pq* æquidiſtante PQ; ac denique ordinata *no* diſtantia O*o* = E*e* diſtante ab altera NO, in qua NO ſit VO tertia proportionalis ad IM & NO; & his poſitis juxta alibi (§. 484.) oſtenſa, tantum probandum ſupereſt, FG.E*e*, ſeu rec-lum FG*g*, *momentum ſolicitationis acceleratricis* FG æquari rec-lo ED.*ad*, ſeu *momento celeritatis* ED *caſu mobilis ex altitudine* ME *acquiſitæ*. Quo probato reliqua ſponte ſua obtinebuntur, ſcilicet expreſſio temporis deſcenſus in ſpatio ME, & natura curvarum MDX, MFX, &c.

Demonſtr. I. Eſt (ſecundùm hypotheſin) $EG : EF \ (= EG^2 : ED^2)$

$= ML^2$:

$= ML^2 : MS^2$, & convertendo fit EG : FG ($= ML^2 : LS^2 = IM^2 : NO^2$, ſeu quia IM, NO & VO ſunt in continua ratione) = IM : VO, hinc VO = FG, & VO. *Oo* = FG. E*e*. Atqui (§. 491. num. III.) VO. *Oo* = NO. N*p* = LS. L*m* (§. 493.) = MS. S*s* = ED. *ad*; ergo FG. E*e* = ED. *ad*. Quod erat primùm.

II. Propter ſimilitudinem triangulorum MLS & M*lm*, fit *ad* (vel *ml*) : *l*λ (vel, §. 463. num. III, L*l*) eſt = LS : ML = NO : IM = VO : NO; & *l*λ : P*p* = NO (vel LS) : MP; ac denique ex natura log-micæ (§. 491. num. I.) P*p* : *q*ρ = MP : IM, erit ex æquo *ad* : ρ*q* = VO : IM, ſeu permutando *ad* : VO = ρ*q* : IM. Atqui (§. 131. & 485.) *ad* : VO = *t*E*e*, hoc eſt, incrementum celeritatis elementare, applicatum ad ſolicitationem acceleratricem VO, exponit tempusculum, quo elementum ſpatii E*e* percurritur; ergo etiam ρ*q* : IM = *t*E*e*, atque adeò omnia ρ*q* : IM, id eſt, PQ : IM = omnibus *t*E*e*, ſeu tempori deſcenſus per ſpatium ME.

III. Jam MO ſeu ME, id eſt, ſpatium deſcenſu confectum, eſt log-us rationis IM ad NO, ſeu IM ad LS, hoc eſt log-us ſinus totius ad ſinum complementi anguli IML, cujus ſinus rectus MS celeritatem in E acquiſitam exponit. PQ verò eſt log-us rationis PM ad IM, ſeu IU ad IM; ducta ſcilicet ex centro M ſuper AP perpendiculari, eaque producta usque ad occurſum cum tangente IU; aut denique rationis MA ad AZ, id eſt, ſinus totius ad tangentem ſemiſſis anguli LMA, id eſt, ſemiſſis complementi anguli IML, cujus ſinus MS celeritatem acquiſitam exponit. Idcirco tempus per ME, quod num. II. hujus exponitur per PQ : IM, exponi debet per log-mum rationis (MA : AZ) ſinus totius ad tangentem ſemiſſis complementi anguli IML applicatum ad radium IM, ſeu ad log-micæ ſubtangentem. Quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium I.

526. Igitur ducta MR usque ad occurſum K cum hyperbola IK, trilineum hyperbolicum IMK applicatum ad ſemiſſem quadrati IM, exponet etiam tempus deſcenſus per ſpatium ME. Nam (§. 463.) eſt duplum trilinei IMK = rec-lo PQ. IM, ergo trilineum IMK = PQ. ½IM. Jam, quia (§. 525. num. II.) *t*ME = PQ : IM = PQ. IM : IM², erit *t*ME = dupl. trilin. IMK : IM² = trilin. IMK : ½IM².

Pariter ducta aſymptota M*y* hyperbolæ IK*k*, atque ex K demiſſa ad aſymptotam ordinata KY, ad quam alia quædam *ky* ſe habeat,

ut

ut LS ad IM, quadrilineum hyperbolicum K*ky*Y applicatum ad ſemiſſem IM exponet ſpatium percurſum ME. Nam, quia (conſtr.) KY : *ky* = IM : NO, erit (§. 368.) K*ky*Y : MY . KY ſeu $\frac{1}{2}$IM² = OM : IM, adeoque OM = ME = K*ky*Y : $\frac{1}{2}$IM.

Corollarium II.

527. Scala ſolicitationum acceleratricium MFX eſt log-mica, cujus ſubtangens eſt ſemiſſis ipſius IM. Nam, quia ſupra (§. 525. num. 1.) oſtenſum VO = FG & (conſtr.) OM = ME = AG, ſequitur curvam MFX ſimilem & æqualem eſſe curvæ IV; atqui hæc curva eſt log-mica, cujus ſubtangens eſt dimidia ipſius IM ſubtangentis logarithmicæ IN; quandoquidem quælibet VO eſt tertia proportionalis ad IM & NO; ergo etiam MFX eſt log-mica, cujus aſymptota eſt AX. Propterea, ſi ſolicitationes acceleratrices FG ſunt in progreſſione geometrica deſcendente, ſpatia transmiſſa ſunt in progreſſione arithmetica aſcendente.

Corollarium III.

528. Adeoque velocitas *terminalis* ſeu *maxima*, eſt MA, quæ gravitatem uniformem repræſentat, cum linea AX parallela MX aſymptota ſit utriusque curvæ MFX & MDX.

Corollarium IV.

529. Tempus, quo grave in aëre celeritatem DE acquirit, eſt ad tempus, quo eandem celeritatem in vacuo acquireret, ut PQ ad DE. Nam (§. 151.) tempus, quo celeritas DE in vacuo acquiritur, eſt DE : IM vel AM, & tempus, quo in aëre eadem DE acquiritur, PQ : IM.

Corollarium V.

530. Viciſſim celeritas, quæ tempore PQ : IM in aëre acquiritur, eſt ad celeritatem, quæ eodem tempore in vacuo acquiri poteſt, ut DE ad PQ. Nam (§. 151.) tempore PQ : IM acquiritur in vacuo celeritas PQ.

SCHOLION.

Fig. 127. 531. Si grave M perpendiculariter deorſum projiciatur in recta MX celeritate MI, majore ipſâ terminali MA vel MP; poſitoque, mobilis velocitatem reductam eſſe ex MI ad MS (nam, quia velocitas projectionis MI major eſt quam AM, reſiſtentia medii major erit gravitate, ac propterea motus continuo debet retardari) erit ſpatium percurſum ME exponendum per log. $\sqrt{}$(PIA : PSA) ſeu log-mum ſubduplicatæ rationis rectanguli PI. AI ad PS. AS; tempus verò, quo mobile ſpatium ME percurrit, ſeu quo velocitas initialis MI reducitur ad ED vel MS, exponitur per log. $\sqrt{}$(AI : AS) — log. $\sqrt{}$(PI : PS). Ponitur verò MP = MA, hi poſteriores log-mi ſumuntur in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas, log. vero ex $\sqrt{}$(PIA : PSA) ſumitur in log-mica, cujus ſubtangens eſt AM vel MP. Sin verò celeritas projectionis MI minor fuerit quam MA, hic caſus jam continetur in præſenti propoſitione, ut adeo eidem diutius immorari plane neceſſum non ſit.

PROPOSITIO LXV. THEOREMA.

532. *Lineâ rectâ, quæ celeritatem terminalem ſeu gravitatem uniformem exponit, ſumtâ pro ſinu toto ſeu radio; ſi mobile quoddam, celeritate initiali, expreſſa tangente alicujus anguli, verticaliter in altum projiciatur*, maxima altitudo, *ad quam mobile in aere pervenire poteſt, exponetur log-mo rationis ſecantis anguli ad radium*, & tempus *hujus aſcenſionis exponetur per ipſum angulum, cujus tangens celeritatem initialem exponit.*

Fig. 128. Aſcendat mobile celeritate initiali EC ex E in M in linea verticali EM, centroque M deſcribantur, ut in præcedenti, circuli quadrans IKA, hyperbola æquilatera IL, & logarithmica PN. Producatur CE in H factaque EH tertia proportionali ad EG & EC, eritque EH reſiſtentia, quam aſcendens mobile ab aëre patietur in E; & quia præterea EG, ſeu MA, gravitatem uniformem exponit, quæ mobili in altum lato quoque reſiſtit, erit ideo (§. 481.) *reſiſtentia totalis* mobili oppoſita in E æqualis GH. Adeoque curva quædam HM erit ſcala reſiſtentiarum totalium, curva verò CM ſcala celeritatis decreſcentis EC. Adeoque (§. 484.) res eo deducitur, ut conſtruantur hæ nominatæ curvæ ejus proprietatis, ut ſit

ubi-

ubique HE. Ee = EC. *b*C. Ad id; ductis CL, LN atque NO parallelis rectis MI & MA reſpective, fiat ME = MO, & ſic ubique, dabunturque tot puncta in curva C2CM, quot libuerit, ex qua deinceps alteram HM conſtruere non erit difficile. Ducantur *cl*, *ln*, *no* prioribus CL, LN & NO æquidiſtantes & indefinite vicinæ, ſumaturque in qualibet ON major OV, quæ ſit ad homologam ON, ut hæc NO ad MI; quæ MI ſimul etiam log-micæ IN ſubtangentem ſignificat, & hac ratione reſultabit nova log-mica IV, cujus ſubtangens erit ſemiſſis IM ſubtangentis log-micæ IN.

Demonſtr. I. Quia rectæ EG, EC & EH (ſecundùm hypotheſin) ſunt in continua ratione, erit EG : EH = EG² : EC², vel invertendo & componendo HG : EG = IS² : IM² = LS² : IM² = NO² : IM² (vel ob continue proportionales VO, NO & IM) = VO : IM vel EG, ergo HG = VO; & quia OM = EM, ac *o*M = *e*M, & proinde O*o* = E*e*; erit HG. G*g*, vel HG. E*e* = VO. O*o* (§. 491. num. III.) = NO. N*p* = LS. L*m* (§. 493.) MS. S*s* = EC. C*b*. Id eſt *momentum celeritatis decreſcentis* EC *æquatur momento reſiſtentiæ totalis* HG. Jam ME vel MO eſt log-us rationis NO ad IM, ſeu IS ad IM, id eſt, log-us rationis ſecantis anguli MIS, cujus tangens MS = EC celeritatem initialem exponit, ad radium IM vel MA. Quod erat primum.

II. Quia VO : IM = NO² : IM² = LS² : IM² = MR² : MK² (§. 165.) = R*r* : K*k*, atque adeò, quia R*r* = C*b*, erit K*k* : IM = C*b* : VO = C*b* : HG (§. 131, 485.) = *t*E*e*, & K*k* : MK vel IM (§. 129.) = angulo KM*k*, adeoque *t*E*e* = angulo KM*k*, ac proinde tempus totius aſcenſus per ſpatium EM exponi debet angulo KMI, cujus tangens eſt IR vel EC. Quod erat alterum.

Corollarium I.

533. Nunc iterum curva reſiſtentiarum totalium M2HH erit log-mica ſimilis & æqualis log-micæ IV. Atque adeo ſi reſiſtentiæ totales ſumantur in progreſſione geometrica deſcendente, ſpatia aſcendendo confecta erunt in progreſſione arithmetica deſcendente, ſcilicet ſpatia toto aſcenſu deſcripta. Horum demonſtratio eadem ferme eſt cum ea coroll. II. prop. præced. §. 527.

Corollarium II.

534. Velocitas initialis mobilis ſuam maximam in aëre altitudinem EM abſolventis, eſt ad celeritatem initialem, qua mobile pari tempore ſuam in vacuo maximam altitudinem conficeret, ut tangens IR ad arcum IK. Nam, ſi corpus in vacuo celeritate initiali IK aſcendit, tempore IK : IM id (§.§. 141. 151.) aſcendet quousque poteſt, ſed hoc ipſo tempore IK : IM expoſitum angulo KMI, aſcendet in aëre ſpatio EM, celeritate initiali EC vel IR. Ergo, &c. Atque hoc conſentit cum coroll. 4. prop. 9. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cel. Newtoni.

Corollarium III.

535. Tempus, quo mobile ſuam in aëre altitudinem, ad quam celeritate initiali IR pervenire poteſt, abſolvit, eſt ad tempus, quo in vacuo ſuam altitudinem, celeritate initiali exiſtente eadem IR, abſolveret, ſicut arcus IK ad tangentem IR, ſeu, quod idem eſt, ut ſector IMK ad triangulum IMR. Nam tempus aſcenſionis in aëre eſt angulus IMK, ſeu IK : IM, & tempus aſcenſionis in vacuo (§. 151.) IR : IM.

Corollarium IV.

536. Adeoque, ſi celeritas initialis, qua corpora in aëre & in vacuo aſcendunt, terminalem æquaverit, erit tempus, quo altitudo illius quod in aëre, ad tempus, quo altitudo ejus, quod in vacuo aſcendit, conficitur, ut circulus ad quadratum circumſcriptum; nam, ſi IR = IM, erit ſector IMK octava circuli & triangulum IMR octava quadrati circulo circumſcripti pars, adeoque ille ad hoc, ut circulus totus ad quadratum circulo circumſcriptum.

Corollarium V.

537. Iisdem adhuc poſitis, quæ in coroll. III. altitudo, quam mobile in aëre abſolvit, eſt ad altitudinem in vacuo percurrendam, ut duplum rec-lum IMO ad quadratum tangentis IR. Nam (§. 150.) altitudo in vacuo deſcribenda erit $IR^2 : 2IM$, & ME eſt ad $IR^2 : 2IM$, ut duplum rec-lum IMO ad IR^2.

Co-

Corollarium VI.

538. Adeoque, ſi celeritas initialis IR terminali IM par fuerit, erit altitudo in aëre ad altitudinem in vacuo abſolvendam, vel 2.IMO ad IR^2, ſicut 2MO ad IM, id eſt, ſicut log. ($2.IM^2 : IM^2$) ad IM, hoc eſt, ſicut log-us rationis duplæ ad ſubtangentem log-micæ, vel etiam (§. 368.) ut quadrilineum hyperbolicum alterutri aſymptotæ adjacens, cujus ordinatæ ſunt in ratione dupla, ad rec-lum hyperbolæ inter aſymptotas. Ut Celeb. Hugenius (pag. 174. Diſſ. *De Cauſa Gravitatis*) ſine demonſtratione aſſeruit.

Corollarium VII.

539. Celeritas initialis mobilis ſpatium EM aſcendendo deſcribentis, eſt ad celeritatem, quacum denuo in terram recidit, ſicut tangens anguli IMR ad ejusdem ſinum. Nam, quia in figuris 126. & 128. ſpatia ME utrinque ſunt (ſecundùm hypotheſin) æqualia, erit ratio ON : IM, in fig. 126. ſeu LS : LM = in fig. 128. IM : NO = RS : MR; adeoque triangulum rec-lum LMS in fig. 126. eſt ſimile triangulo RMS, adeo ut angulus IML in fig. 126. = IMK, atqui IR eſt tangens & MS in fig. 126. ſinus unius ejusdemque anguli IMK vel IML, ergo &c. Fig. 126. & 128. Fig. 126.

Hisce multa alia potuiſſent addi corollaria, ſed brevitati conſulens talia Lectoris induſtriæ ex præcedentibus elicienda relinquo.

Caput XVII.

De motibus Corporum in aëre reſiſtente, partim juxta proportionem celeritatum mobilis, partim etiam juxta duplicatam proportionem earundem.

540. HÆc reſiſtentiarum hypotheſis illis fluidis convenit, quorum partes nonnihil inſtar viſci cohærent: etenim, ſi tale fluidum tanquam medium concipiamus mobili trajiciendum, ilicò apparebit, ad ſeparandas ejusmodi viſcidi fluidi partes, aliquam vim adhibendam eſſe, diverſam ab ea, quæ in mobili tollitur ab allapſu continuo particularum fluidi; & hanc vim ſeparatricem partium fluidi proportionari quantitatibus fluidi trajiciendi. Quantitates verò ipſæ fluidi trajiciendæ velocitatibus mobilis proportiona-

les

les exiſtunt. Igitur tenacitas abſoluta fluidi ducta in celeritatem mobilis, ſeu, quod idem eſt, in quantitatem materiæ ſeparandæ vel trajiciendæ, erit una pars reſiſtentiæ, quam mobile in ejusmodi fluido latum ſubibit, altera provenit à fluiditate, qualem in præcedenti capite contemplati ſumus. Idcirco reſiſtentia totalis, quam mobile in hujusmodi medio patietur, eſt ut velocitas in datam quantitatem ducta, cum quadrato ejusdem velocitatis. Idcirco tenacitatem dictam conſiderabimus deinceps tanquam vim mortuam gravitatique comparabilem, perinde ac reſiſtentias, quæ ab allapſu fluidi ad corpus mobile proveniunt.

PROPOSITIO LXVI. Theorema.

541. *Si mobile in aëre dicta ratione reſiſtente motu variato ex primitive uniformi ſeu æquabili feratur;* ſpatium, *quod id aliquo effluxo tempore deſcribet, exponetur tertia proportionali ad celeritatem mobilis initialem, tenacitatem fluidi & log-um rationis, quam habet dicta velocitas initialis tenacitate aucta, ad hanc tenacitatem auctam pariter, ſed celeritate actuali mobilis.* Tempus, *quo hoc ſpatium percurritur, exponi debet exceſſu, quo log-us rationis, quam celeritas initialis habet ad actualem, ſuperat log-um rationis earundem celeritatum, ſed tenacitate aëris auctarum, applicato ad celeritatem initialem. Poſito ſcilicet log-mos deſumtos eſſe ex log-mica, cujus ſubtangens ſe habet ad celeritatem mobilis initialem, ſicut rectangulum ex aggregato tenacitatis fluidi & velocitatis initialis corporis in hanc celeritatem initialem ad rec-lum ſub dicta tenacitate & reſiſtentia medii totali initio motus.*

Fig. 129. I. Eſto MS linea deferens, quæ, ut in propoſitione LVIII. explicuimus, uniformiter moveatur verſus T celeritate AM, quæ proinde eſt celeritas initialis, mobile verò M proprio ſuo motu ab alliſione continua aëris feratur ex M verſus S, ponaturque certo tempore acquiſiviſſe in linea deferenti celeritatem AQ, poſtquam ſcilicet ſpatium ME in ea transmiſit, adeoque detracta celeritate AQ ab initiali AM, quâ deferens linea MS verſus T æquabiliter incedit, erit residua QM velocitas abſoluta mobilis, quam revera in aëre habet; ſit porrò OM, vel æqualis IA, tenacitas fluidi proveniens ex viſcoſitate ejus; item ponatur MP pro reſiſtentia aëris initio motus, & EF pro reſiſtentia aëris, ubi actualis mobilis velocitas fuerit QM; eritque adeò (ſecundùm hypotheſin) EF ut $OM.QM + QM^2$, ſeu facta $OG = MQ$, ut rec-lum $GM.QM$, & MP ut $IM.AM$,

atque

atque adeo habetur MP : EF = IM. AM : GM. QM, atque MP. GM. QM = EF. IM. AM. Æqu. I.

Per punctum A ducta ſit log-mica HAB, cujus ſubtangens quælibet RC ſit ad AM (ſecundùm hypotheſin) = IM. AM : OM. MP; atque adeò RC. OM. MP = IM. AM². Æqu. II. Et per puncta I, G, O, Q agantur rectæ IK, GH, OX, & QB aſymptotæ log-micæ ST parallelæ, log-micæ occurrentes in punctis K, H, X & B, per quæ ordinatæ KL, HN, XY & BC ductæ ſint; fiat ME = MC $-\frac{IM.LN}{AM}$, eritque PFS ſcala reſiſtentiarum & tempus, quo ſpatium ME in linea deferenti MS percurritur, ſeu tME = (MC = LN) : AM.

II. *Demonſtr.* Cum (conſtr.) ſit ME = MC $-\frac{IM.LN}{AM}$, erit etiam Ee = Cc $-\frac{IM}{AM}$. Nn, ſunt enim Ee, Cc, & Nn elementa linearum ME, MC & LN. Præterea, quia etiam (conſtr.) OG = MQ, erit pariter Gg = Hi = Qq = Bd, adeòque (§. 491. num. 11.) rec-lum HNn = rec-lo BCc, ac proinde Cc : Nn = GM : QM, & Cc : $\frac{IM}{AM}$. Nn = GM : $\frac{IM}{AM}$. QM = GM. AM : IM. QM, & convertendo Ee ſeu Cc $-\frac{IM}{AM}$. Nn : Cc = GM. AM − IM. QM : GM. AM (vel quia OM. AQ æquatur GM. AM − IM. QM) = OM. AQ : GM. AM, & propter triangula ſimilia RCB ac bdB eſt, Cc : Qq = RC : QM, ergo ex æquo & per rationum compoſitionem Ee : Qq = RC. OM. AQ : GM. QM. AM = RC. OM. MP. AQ : MP. GM. QM. AM, (vel ſubſtitutis loco RC. OM. MP & MP. GM. QM ope Æqu. II. & I. ſolidis reſpective æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM) = IM. AM². AQ : IM. AM². EF = AQ : EF, adeoque comparando primam cum ultima ratione, habetur Ee : Qq = AQ : EF, atque adeò EF. Ee = AQ. Qq. Id eſt *momentum ſolicitationis acceleratricis* EF in linea deferenti MS *æquatur momento celeritatis acquiſitæ* AQ in hac linea deferente.

III. Ut antea (num. 11. hujus) erit Cc : Nn = GM : QM, & convertendo Cc − Nn : Cc = OM (ſeu GQ) : GM, & Cc : Qq = RC : QM, ergo Cc − Nn : Qq = RC. OM : GM. QM = RC. OM. MP : MP. GM. QM = IM. AM² : EF. IM. AM, ſubſtitutis ſcilicet loco ſolidorum RC. OM. MP & MP. GM. QM æqualibus IM. AM² & EF. IM. AM, quæ æqualitates ſecunda & prima num. 1. exhibent;

 eſt

eſt ergo $Cc - Nn : Qq = IM . AM^2 : EF . IM . AM = AM : EF$, & permutando $Cc - Nn : AM = Qq : EF = Ee : AQ = tEe$, ergo omnia tEe ſeu tempus per $ME = (MC - LN) : AM$.

IV. Ergo, aſſignato hoc tempore, linea deferens MS deſcribet in aëre cum velocitate AM motu ſuo æquabili ſpatium MC − LN, motu verò proprio in hac deferente corpus ſimul deſcribit ſpatium $ME = MC - \frac{IM}{AM} . LN$, adeòque ſpatium abſolutum, quod mobile in aëre abſolvet, erit exceſſus ſpatii motu communi & æquabili lineæ deferentis ſupra motum iſti contrarium mobilisque in deferenti proprium, ſeu $MC - LN - MC + \frac{IM}{AM} . LN = IM . LN : AM$. Hoc ergo ſpatium abſolutum exponitur tertia proportionali ad celeritatem initialem AM, tenacitatem fluidi OM vel IA, atque ad log-mum rationis, quam KL & HN, id eſt, celeritates initialis & actualis, mobilis tenacitate auctæ, ad invicem habent. Quæ omnia erant demonſtranda.

COROLLARIUM I.

542. Apparet igitur in præſenti reſiſtentiarum hypotheſi mobile non ſolum non poſſe in infinitum excurrere, ſed ne quidem poſſe terminum finiti ſpatii SM . LY : AM tempore quantumlibet magno attingere. Nam evaneſcente QM, ipſa MC fit infinita, GM fit OM, adeoque LN mutatur tunc in LY, adeo ut MC − LN : AM abeat in MC − LY : AM ſeu in MC : AM, quia finita LY præ infinita MC evaneſcit. Idcirco ſpatium IM . LN : AM tempore finito MC − LN : AM percurſum, mutabitur in IM . LY : AM, quod tempore infinito tantum MC : AM, id eſt nunquam, abſolvi poteſt.

COROLLARIUM II.

543. Si ſpatia IM . LN : AM ſumantur in progreſſione arithmetica, erunt ipſæ LN abjectis IM : AM ejusdem ubique magnitudinis, etiam in progreſſione arithmetica, atque adeò ordinatæ log-micæ HN vel æquales hisce GM, ſeu velocitates actuales mobilis QM tenacitate medii OM vel AI auctæ, in progreſſione geometrica.

Co-

Corollarium III.

544. Quia CM = log. (AM : QM) & LN = log. (IM : GM) erit MC − LN = log. (GM. AM : IM. QM) = log. (AM. OM + AM. QM : IM. QM). In recta MP ſumatur MZ, quæ ſit ad OM vel AI = AM : QM, eritque QM. MZ = AM. OM, atque adeò AM. OM + AM. QM : IM. QM = AM + MZ ſeu AZ : IM, & conſequenter MC − LN = log. (AM + MZ : IM), atque (MC − LN) : AM = log. (AM + MZ : IM) applicatus ad AM. Adeoque, ſi hæ MC − LN : AM, hoc eſt, tempora ſumantur in progreſſione arithmetica, erunt ipſæ AM + MZ, ſeu magnitudines MZ velocitatibus QM reciproce proportionales celeritate initiali AM auctæ in progreſſione geometrica.

Hæc duo poſtrema corollaria probe conſpirant cum propoſitionibus XI. & XII. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Math. Cl. Newtoni, & cum iis, quæ Cl. Varignon in Actis Acad. Scient. 1707. d. 13. Auguſti probl. IV. coroll. 11. & 14. exhibuit.

Scholion.

545. Satis prævideo fore, ut mihi objiciatur nimia prolixitate in hac propoſitione noſtra ea tradita eſſe, quæ multo brevius atque facilius potuiſſent perfici, ſi pro linea OM, tenacitatem fluidi denotante, aſſumſiſſem rectam AM, quæ velocitatem initialem exponit. At reſpondeo hoc pacto propoſitionem minus generalem futuram fuiſſe, etſi non negem, multò brevius atque ſimplicius tunc demonſtrari potuiſſe. Nam talem adducere volui, quæ etiam caſum propoſitionis noſtræ LXIII. contineret; quod revera præſtat, nam evaneſcente OM vel AI, ex conſtructione præſentis propoſitionis, naſcuntur omnes determinationes propoſitionis LXIII, adeo ut illa caſus tantum ſit ſeu corollarium præſentis. Sed, ſi pro linea tenacitatem fluidi repræſentatrice accepiſſem tantum rectam AM, quæ velocitatem initialem mobilis exponit, talis deductio non ſucceſſiſſet, quia AM, quatenus velocitatem initialem exprimit, nunquam poteſt evaneſcere. Sed, quia deductio propoſitionis ſuperioris LXIII. ex præſenti non adeò obvia eſſe videtur, eam hoc loco diſtinctius explicare libet. Si IA vel OM evaneſcit, etiam AI. LN : AM evaneſcere videtur, ſeu ſpatium à mobili in aëre juxta duplicatam pro-

portionem celeritatum reſiſtente in nihilum abire, tum etiam MC − LM : AM. Hoc enim caſu IM abiret in AM, & GM in QM, id eſt, ratio IM : GM fieret AM : QM, adeoque LN log-us illius rationis fieret MC, adeò ut MC − LN futura ſit MC − MC = o. Quomodo ergo ex conſtructione præſentis propoſitionis elici poteſt conſtructio propoſitione LXIII. in caſu ipſius AI = MO = o?

546. Quia in dicta propoſitione (§. 522.) log-micæ ſubtangens exponit celeritatem initialem, ſumatur log-us rationis IM : GM in ea log-mica, eritque (§. 492.) log. (IM : GM) : AM = LN : RC, adeoque LN = RC. log. (IM : GM) : AM, & IA. LN : AM = RC. IA. log. (IM : GM) : AM^2 = RC. OM, MP. log. (IM : GM) : AM^2. MP. Atqui (§. 541. num. 1. æqu. I. II.) eſt RC. OM. MP = IM. AM^2, ergo IA. LN : AM = IM. AM^2. log. (IM : GM) : AM^2. MP = IM. log. (IM : GM) : MP, & hæc eſt nova expreſſio ſpatii in aëre decurſi, ſive IA ſit quantitas realis ſive non. Jam, ſi IA = o, erit ratio IM : GM = AM : QM, evaneſcente ſcilicet OM = IA, & exiſtente OG = QM. Ergo ſpatium in aëre percurſum erit hoc caſu AM. log. (AM : QM) : MP = log. (AM : QM) in caſu propoſitionis LXIII. ubi MP revera æqualis facta erat AM celeritati initiali. Eſt ergo ſpatium abſolutum à mobili in aëre percurſum exponendum log-mo rationis, quam celeritas initialis AM habet ad reſiduam mobilis ſeu actualem QM, prorſus ut habet propoſitio citata.

547. Determinatio temporis eſt paulò altioris indaginis. Hoc tempus exponitur juxta præſentem propoſitionem per (MC − LN) : AM. Jam (§. 544.) eſt MC − LN = log. (AM + MZ : IM) = log. AM + MZ, − log. IM. Et log. (AM + MZ) = $\left(\frac{MZ}{MA} - \frac{MZ^2}{2.AM^2} + \frac{MZ^3}{3.AM^3} - \right.$ &c.) in RC, = $\left(\frac{MZ.QM}{AM.QM} - \frac{MZ^2.QM^2}{2.AM^2.QM^2} + \frac{MZ^3.QM^3}{3.AM^3.QM^3} - \&c.\right)$. RC, ſeu quia ex conſtructione rec-lum MZ. QM æquatur dato rectangulo AM. OM, erit log. (AM + MZ) = $\frac{RC.OM.AM}{AM.QM} - \frac{RC.OM^2.AM^2}{2.AM^2.QM^2} + \frac{RC.OM^3.AM^3}{3.AM^3.QM^3} - \&c. = \frac{RC.OM.MP}{MP.QM} - \frac{RC.OM^2.MP}{2.MP.QM^2} + \frac{RC.OM^3.MP}{3.MP.QM^3} - \&c.$ (aut, quia ſolidum RC. OM. MP æquatur ſolido IM. AM^2, ut aliquoties jam vidimus) = $\frac{IM.AM^2}{MP.QM} - \frac{IM.AM^2.OM}{2.MP.QM^2} + \frac{IM.AM^2.OM^2}{3.MP.QM^3} - \&c.$ Atqui in hac ultima ſerie infinita, ob evaneſcentem (ſecundùm hypotheſin) OM,

OM, evaneſcent omnia poſt primum terminum membra, propterea erit hoc caſu log. (AM + MZ) $= \frac{IM.AM^2}{MP.QM}$.

Quia IM $=$ AM $+$ IA $=$ AM $+$ OM, erit log. IM $= \left(\frac{OM}{AM} - \frac{OM^2}{2.AM^2} + \frac{OM^3}{3.AM^3} - \&c.\right)$ RC, quæ eſt eadem ſeries cum prima, excepta ſola OM, quæ hoc loco eſt poſita loco MZ, in prima. Ergo etiam log. IM $= \frac{RC.OM.MP}{AM.MP.} - \frac{RC.OM^2.MP}{2.AM^2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM^2}{AM.MP} - \frac{IM.AM^2.OM}{2.AM^2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM}{MP} - \frac{IM.OM}{2.MP} + \&c. = \frac{IM.AM}{MP}$, quia etiam in hac ſerie infinita omnes, poſt primum, termini evaneſcunt, exiſtente (ſecundùm hypotheſin) OM vel AI $=$ o. Hinc MC $-$ LN $=$ log. (AM $+$ MZ) $-$ log. (IM) $= \frac{IM.AM^2}{MP.QM} - \frac{IM.AM}{MP} = \frac{IM.AM^2 - IM.AM.QM}{MP.QM} = \frac{IM.AM.AQ}{MP.QM} = \frac{AM^2.AQ}{MP.QM}$, quia in præſenti hypotheſi IM fit AM evaneſcente IA, & quia inſuper, in propoſitione LXIII, MP æqualis erat AM, erit MC $-$ LN $= \frac{AM.AQ}{QM}$, & MC $-$ LN : AM, ſeu tempus, quo mobile ſuum ſpatium log. (AM : QM) in aëre abſolvit fit $=$ AQ : QM, exponendum ſcilicet ratione celeritatis initialis partis amiſſæ ad reſiduam, ſeu velocitatem mobilis actualem in aëre, prorſus ut habet citata propoſitio LXIII. §. 522.

548. Quin imò res univerſalius adhuc quam illic tradi poteſt, ſupponendo reſiſtentiæ ab initio motus repræſentatricem MP diverſam eſſe à recta AM, quæ celeritatem initialem exponit; etenim ſpatium abſolutum in aëre confectum eo caſu exponetur; ut ſupra (§. 546.) invenimus, per AM. log. (AM : QM) : MP, & tempus, quo hoc ſpatium abſolvitur per AM. AQ : MP. QM. Idcirco potuiſſet ſæpius jam memorata propoſitio penitus omitti, quemadmodum & eæ, quæ poſt eam in eodem capite XVI. immediate ſequuntur, quod pariter ex iis deduci poſſint facillimo negotio illæ, quæ mox ſequentur. Sed demonſtrationum diverſitas atque in concluſionibus concentus omnino digna ſunt, quæ diſtinctius curioſi Lectoris oculis exponantur.

PROPOSITIO LXVII. Theorema.

549. *Si gravitas uniformis exponatur ſinu complementi alicujus anguli acuti & dati, & grave in linea recta horizonti normali cadat in aëre, juxta indicatam in titulo hujus capitis hypotheſin, reſiſtente; aſſumaturque quædam magnitudo, quæ ſit ad log-mum rationis, quam tangens ſemiſſis complementi dati anguli habet ad tangentem ſemiſſis complementi alicujus anguli variabilis & majoris dato, ut ſinus dati anguli ad ſinum totum. Sumptis ſcilicet log-mis in logarithmica, cujus ſubtangens eſt æqualis ſinui complementi dati anguli præmemorati, quibus poſitis,*

1°. Spatium, *quod grave aliquo tempore perlabitur accelerato motu, eſt exceſſus log-mi rationis, quam habet ſinus complementi dati anguli ad ſinum complementi variabilis, ſupra aſſumptam magnitudinem:*

2°. Tempus, *quo ſpatium iſtud abſolvitur, exponetur aſſumpta magnitudine applicata ad ſinum rectum anguli dati:*

3°. Celeritas, *in fine cujusque temporis acquiſita, eſt, ut exceſſus ſinus anguli variabilis ſupra ſinum rectum anguli dati.*

Fig. 130. Cadat grave à quiete ex M in linea recta Mα horizonti perpendiculari, ac centro A deſcripto circuli quadrante BLCA, exponat in eo recta IM, quæ eſt ſinus complementi cujusdam dati anguli BAI, gravitatem uniformem, & ductâ porrò qualibet SL parallela IM, jungatur AL; eritque angulus BAL is, qui in propoſitione variabilis dicitur, cujus recta LS eſt ſinus complementi. Circa axem MR & per ſupremum quadrantis punctum transeat log-mica BGN, cui linea LN parallela radio CA occurrat in N, recta verò IG eidem MC æquidiſtans in puncto G, per hæc duo log-micæ puncta transeant ordinatæ GH & NO; dein aſſumatur quædam XZ, quæ ſit ad log-um rationis QA : AP ſicut AM ſinus dati anguli BAI ad radium AI. Ductis enim per puncta I & L ex puncto C rectis CP & CQ, erit QA : PA, ut tangens dimidii anguli IAC ad tangentem dimidii LAC, ſeu ut tangens ſemiſſis complementi anguli dati BAI ad tangentem ſemiſſis complementi anguli variabilis BAL; nam AQ : AP = tang. LCA : tang. ang. ICA = tang. MIC : tang. SLC = tang. $\frac{1}{2}$IAC : tang. $\frac{1}{2}$LAC. Ipſa verò HO, ſeu log-us rationis GH : NO, ſeu IM : LS, eſt log-us rationis, quam habet ſinus complementi IM anguli dati BAI ad ſinum complementi LS variabilis BAL; propterea oſtendi debet 1°. ſpatium cadendo deſcriptum ME,

ME, eſſe $= HO - XZ$; deinde 2°. tempus, quo ſpatium iſtud percurritur, ſeu $tME = XZ : AM$, ac denique MS differentiam ſinuum AS, AM angulorum variabilis & dati, celeritatem in E acquiſitam, adeo ut productis FE & LS in D hoc punctum futurum ſit in ſcala celeritatum MD, ducta ſcilicet FD per punctum E parallela RS. Eſto inſuper RF ſcala ſolicitationum acceleratricium, ductisque *dl*, *ln*, *no* ac *df* ipſis DL, LN, NO ac DF parallelis ac indefinite vicinis productaque LD in *a*; probari debet momentum ſolicitationis acceleratricis FE æquari momento celeritatis acquiſitæ ED, ſeu $EF . Ee = ED . ad$, poſita conſtructione ſupra expoſita. Fiat $AT = AM$, & VO tertia proportionalis ad GH & NO, adeò ut inde nova log-mica GV exurgat. Log-micæ BN ſubtangens quælibet æquetur IM vel GB.

Demonſtr. I. Eſto reſiſtentia in E, quam ſimplici litera R indicabimus, ut gravitatem per G, eſto inquam $G : R = IM^2 : 2AM . MS + MS^2$, ſeu, quia (conſtr.) $AM = AT$, ponatur $G : R = IM^2 : TS . MS$, eritque convertendo $G - R : G$, id eſt, ſolicitatio acceleratrix in E ad gravitatem, hoc eſt, $EF : IM = IM^2 - TS . MS : IM^2 = IM . EF : IM^2$, atque adeò $IM . EF = IM^2 - TS . MS = AI^2 - AM^2 - TS . MS = AI^2 - AM^2 - 2 . AM . MS - MS^2 = AL^2 - AS^2 = LS^2 = NO^2$, aut (quia NO eſt media proportionalis inter GH vel IM & VO) $= IM . VO$, atque adeò $EF = VO$.

II. Quia (conſtr.) $ME = HO - XZ$, & $Me = Ho - Xz$, erit etiam $Ee = Oo - Zz$; propterea ſi $E\varepsilon$ ponatur $= Oo$, erit $e\varepsilon = Zz$, ubi Zz eſt elementum lineæ aſſumtæ XZ.

III. Propter triangula ſimilia *Llm* & ALS habetur $Ss : rl$ (vel æqualem Ll) $= LS : AL$, & $rl : Qq = rs$ (vel LS) $: QA$; ergo ex æquo $Ss : Qq = LS^2 : AL . AQ = NO^2 : AL . AQ = IM . VO : AI . AQ$. Verùm Qq : elementum log-mi $(QA : PA) = QA$: ſubtang. log-micæ $IM = QA . VO : IM . VO$, ergo ex æquo Ss : elem. log-mi $(QA : RA) = AQ . VO : AI . AQ = VO : AI$. Et (conſtr.) element. log-mi $(QA : PA) : Zz = AI : AM$, ergo denuo ex æquo $Ss : Zz = VO : AM$. Atque adeò $FE . e\varepsilon$ (num. I. & II. hujus) $= VO . Zz = AM . Ss$.

IV. Rurſus $EF . E\varepsilon$ (ſeu $VO . Oo$) $= NO . Np$ per §. 491. num. III. Et $NO . Np = LS . Lm$ (§. 493.) $= AS . Ss$, hinc, quia (num. III. hujus) $FE . e\varepsilon = AM . Ss$, erit $FE . E\varepsilon - FE . e\varepsilon = AS . Ss - AM . Ss$, hoc eſt, $FE . Ee = MS . Ss$. Id eſt, *momentum ſolicitationis acceleratricis* EF *eſt æquale momento celeritatis acquiſitæ* MS.

V. Quoniam ſupra (num. III. hujus) invenimus $VO . Zz = AM . Ss$,

Ss, erit $Zz : AM = Ss : VO = da : FE$ (§. 485.) $= tEe$; adeoque omnia tEe, hoc eſt, tempus caſus perpendicularis per ſpatium ME, quod tempus deſignavimus per tME, = omnibus Zz, quibus tota XZ componitur, diviſis per AM, ſeu = XZ : AM. Ergo tempus per ſpatium ME exponitur per aſſumtam magnitudinem XZ applicatam ad ſinum AM anguli dati BAI. Quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium I.

550. Cum celeritas in E acquiſita ſit ED vel MS, celeritas terminalis erit MC ſinus verſus complementi IAC anguli dati BAI, & ſcala celeritatum MD aſymptotam habebit parallelam ipſi $M\alpha$, ſed per punctum C transeuntem.

Corollarium II.

551. Spatium, quod grave in vacuo abſolveret cadendo eo tempore, quo in aëre ſpatium ME perlabitur, eſt ad ſemiſſem MI, quæ gravitatem exponit in duplicatâ ratione aſſumtæ XZ ad datam AM. Nam, quia tempus (§. 151.) deſcenſus in vacuo exponitur radice ex duplo ſpatio applicato ad magnitudinem, quæ gravitatem uniformem repræſentat, erit, vocando ſpatium tempore XZ : AM in vacuo percurrendum S, erit inquam $\sqrt{(2S : IM)} = XZ : AM$, ſeu $2S : IM = S : \frac{1}{2}IM = XZ^2 : AM^2$.

Corollarium III.

552. Velocitas, quam mobile in termino E ſpatii ME in vacuo deſcripti acquireret, erit ad celeritatem in aëre acquiſitam percurſo eodem ſpatio ME, ſicut $\sqrt{(2ME . IM)}$ ad MS, id liquet ex §. 150.

Corollarium IV.

553. Celeritas vero in aëre erit ad celeritatem in vacuo mobili acquiſitam tempore XZ : AM, ſicut rec-lum AM . MS ad rec-lum IM . XZ. Nam (§. 551.) in vacuo percurritur ſpatium $S = IM . XZ^2 : 2 . AM^2$ tempore XZ : AM; atqui (§. 150.) eſt velocitas in termino hujus ſpatii acquiſita $= \sqrt{(2 . S . IM)} = \sqrt{(2 . IM^2 . XZ^2 : 2 . AM^2)} = IM . XZ : AM$; ergo celeritas in aëre eſt ad celeritatem in vacuo acquiſitam,

tam, ſicut MS ad IM. XZ : AM, vel ſicut rec-lum AMS ad rec-lum IM. XZ.

Corollarium V.

555. Quia recta TA tenacitatem medii & AM dimidium hujus tenacitatis exponit, erit hæc tenacitas ad gravitatem, ſicut ſinus anguli dati BAI ad ſemiſſem ſinus complementi.

Corollarium VI.

556. Idcirco evaneſcente angulo BAI fluidum omni tenacitate carebit, eritque perfecte fluidum, adeò ut redeat caſus propoſitionis LXIV, quæ propoſitio proinde tantum corollarium eſt præſentis. Evaneſcent enim eo caſu AM & XZ, adeo ut tunc ME ſimpliciter æqualis fiat ipſi HO. Tempus vero per ME, quod in hac propoſitione LXVII. eſt XZ : AM (conſtr.) = log. (QA : PA) : AI, in caſu coincidentiæ ipſarum BA & IM, fiet XZ : AM = log. (QA : BA) : AB = tME; prorſus ut §. 525. num. 111. oſtenſum.

Scholion I.

557. Propoſitio etiam analyſi geometrica ſequenti ratione expediri poteſt. Poſitis iis, quæ in præparatione ad demonſtrationem propoſitionis, numero 1. erit FE vel VO = NO^2 : IM = LS^2 : IM (vel poſita KC diametro circuli BIC) = KS. SC : IM; unde, quia generaliter eſſe debet EF. Ee = MS. Ss = ED. ad, erit etiam KS. CS. Ee : IM = MS, Ss, atque adeo Ee : IM = MS. Ss : KS. CS. Sed MS = ½KS − ½KM + ½MC − ½SC, quo valore ſubrogato reperietur Ee : IM = $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{\frac{1}{2}KM.Ss + \frac{1}{2}CM.Ss}{KS.CS} = \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM.Ss}{KS.CS}$; nam KM − CM = 2.AM. Atqui $\frac{AM\,Ss}{KS.CS} = \frac{AM}{AC}.\left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$ ergo Ee : IM = $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC}.\left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)$. Verum $\frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS}$ = elem. log-mi ex $\sqrt{\left(\frac{CM}{CS} : \frac{KS}{KM}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{CM.KM}{CS.KS}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{IM^2}{LS^2}\right)}$ = elem. log. (GH : NO) in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas.

Et $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}$ = elem. log-mi ex $\sqrt{\left(\frac{KS}{KM} : \frac{CM}{CS}\right)}$ = elem. log. $\sqrt{\left(\frac{KS}{CS} : \frac{KM}{CM}\right)}$.

S s Sed

Sed quia SL & MI ſunt mediæ proportionales inter KS & CS, atque inter KM & CM, erit $KS : CS = LS^2 : SC^2 = QA^2 : AC^2$, & $KM : CM = IM^2 : MC^2 = PA^2 : AC^2$, atque adeò $\frac{KS}{CS} \cdot \frac{KM}{CM} = \frac{QA^2}{AC^2} \cdot \frac{PA^2}{AC^2} = \frac{QA^2}{PA^2}$; ac propterea erit $\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} =$ elem. log. $\left(\frac{QA}{PA}\right)$ etiam in log-mica, cujus ſubtangens eſt æqualis unitati. Hinc $\frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right) = \frac{AM}{AC}$ in elem. log. (QA : PA); ac proinde habebitur etiam $Ee : IM$ $\left(= \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS} - \frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} - \frac{AM}{AC} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}Ss}{KS} + \frac{\frac{1}{2}Ss}{CS}\right)\right) =$ elem. log. (GH : NO) $- \frac{AM}{AC}$. elem. log. (QA : PA) ergo $\int Ee : IM = ME : IM =$ log. (GH : NO) $- \frac{AM}{AC}$. log. (QA : PA), vel ducendo omnia in IM, erit ME = IM. log. (GH : NO) $- \frac{AM.IM}{AC}$. log. (QA : PA). At verò IM. log. (GH : NO) juxta §. 492. = HO, quandoquidem log. (GH : NO) primùm ſumebatur in log-mica, cujus ſubtangens erat unitas; ſic etiam IM. log. (QA : PA) ſumenda eſt in log-mica BN, quia ejus ſubtangens eſt IM. In conſtructione propoſitionis erat XZ : log. (QA : PA) = AM : AC, & quia log. (QA : PA) jam ſumitur in log-mica, cujus ſubtangens eſt IM, quæ antea erat unitas, erit proinde hoc caſu $XZ = \frac{AM.IM}{AC}$. log. (QA : PA), atque adeo ME = HO − XZ ut ſupra (§. 549.)

Similiter pro expreſſione temporis caſus ex altitudine ME invenietur XZ : AM, ut in jam citato loco. Quæ omnia analytice erant invenienda.

SCHOLION II.

558. Eadem methodo ſolvi poteſt caſus, quo mobile data velocitate, majore tamen terminali, perpendiculariter deorſum projicitur in aëre reſiſtente juxta præſentem reſiſtentiarum hypotheſin. Nam, ſi celeritas projectionis terminali minor ſit, problema jam ſolutum continetur in propoſitione poſtrema; abſque eo, ut alia ſolutione opus ſit; ſin verò, ut nunc ſupponemus, celeritas projectionis major ſit quam terminalis, nonnihil alia inde prodibit conſtructio, quam nunc adducam omiſſa demonſtratione, quam induſtriæ Lecto-

Lectoris ex præcedentibus eliciendam relinquo. Eſto KO linea indefinitæ longitudinis, cui perpendicularis inſiſtat IME ad partes *α* indefinita, in hac perpendiculari portio IM exponat gravitatem uniformem, & AM = AT ſemiſſem tenacitatis medii, ductaque AI factisque AC = AK = AI, centro A & latere transverſo KC deſcripta ſit hyperbola æquilatera CLP, in qua, ſi MO accipiatur pro celeritate initiali projectionis, & MS pro velocitate mobili poſt aliquod tempus reſidua, agantur ordinatæ OP & SL hyperbolæ occurrentes in P & L, per quæ puncta ducantur denique ex K rectæ KP, KLQ. Spatium ME, in cujus termino E mobili relinquitur celeritas MS vel ED, erit $= \log. (PO:LS) - \frac{AM}{AC} \cdot \log. (PO:QO)$, & tempus per ſpatium ME $= \log. (PO:LS):IM$. Omnes hi logarithmi ſunt ex log-mica, cujus ſubtangens eſt æqualis IM. Ex hac conſtructione jam ſatis apparet, ſcalam celeritatum OD*α* aſymptotam habere C*α*, atque adeò mobilis celeritatem quidem continuò decreſcere, nunquam verò ad celeritatem MC reduci poſſe. Fig. 131.

PROPOSITIO LXVIII. Theorema.

559. *Si gravitas exponatur per ſecantem alicujus arcus dati, & corpus grave verticaliter in altum projiciatur in aëre præſentis reſiſtentiæ hypotheſeos, ac celeritate, quæ exponitur exceſſu tangentis arcus cujusdam variabilis ſupra tangentem dati arcus; aſſumaturque magnitudo quædam, quæ ſit ad differentiam arcuum variabilis & dati, ut rec-lum ex ſecante & tangente dati arcus ad quadratum radii.*

Erit 1°. Spatium, *quod mobile, aſcendendo quousque poteſt, conficiet, ut log-us rationis, quam ſecans arcus variabilis habet ad ſecantem dati arcus, dempta magnitudine aſſumta.*

2°. Tempus, *quo mobile hanc altitudinem abſolvet, erit ut magnitudo aſſumta applicata ad tangentem dati arcus.*

Sint ABKC quadrans circuli, BIL hyperbola æquilatera ex centro A & ſemilatere AB deſcripta. Exponat IM ſeu AW ſecans dati arcus B*ω* gravitatem uniformem, ac mobile ex E in altum projici intelligatur celeritate ED vel WQ, quæ eſt differentia tangentium BQ, BW arcuum variabilis BK & dati B*ω*. Deſcriptaque circa axem AT log-mica BGN, cujus ſubtangens ſit GH vel IM; agantur IG, LN parallelæ AS, ac per puncta G, N, &c. transeant ordinatæ log-micæ GH & NO; in NO producta ſit OV tertia pro- Fig. 132.

 por-

portionalis ad GH & NO, & per omnia puncta V tranſibit nova log-mica GV, cujus ſubtangens dimidia erit ſubtangentis prioris log-micæ GN. Accipiatur deinde XZ, quæ ſit ad arcum ωK, ut rec-lum IMA ad quadratum radii AB, quibus poſitis dico fore I. ME vel potius EM = HO − XZ, & temp. per EM = XZ : AM.

Demonſtr. Ductis lineis *dl*, *ln*, *no* prioribus cognonimis DL, LN, NO ad diſtantias indeſinite parvas parallelis, fiatque ut ſupra (§. 549. num. 1.) AT = AM, & reſiſtentia aëris in E ut TS. MS.

I. Eritque adeò reſiſt. : grav. = TS. MS : IM², & componendo R + G, ſeu reſiſtentia totalis EF : IM, ſeu G = IM² + TS. MS : IM² (ſeu quia AM² + TS. MS = AS², ſeu TS. MS = AS² − AM²) = AS² + IM² − AM² : IM² = AS² + QS² : IM² = LS² : IM² = NO² : GH² (aut quia VO, NO & GH ſunt in continua ratione) = VO : IM vel GH, habemus ergo EF : IM = VO : IM atque adeò EF = VO.

II. Ex conſtructione eſt EM = HO − XZ, & *e*M = H*o* − X*z*, adeoque E*e* = O*o* − Z*z*, unde, ſi *εe* fuerit = O*o*, & *ε*E = Z*z*, erit omninò E*e* = O*o* − Z*z*. Jam (§. 165.) Q*q* : K*k* = AQ² : AK² = LS² : AB² = NO² : AB² = VO. GH : BA², & (conſtr.) K*k* : Z*z* = AB² : GH. AM, ergo ex æquo Q*q* : Z*z* = VO. GH : GH. AM = VO : AM (num. 1. hujus) = EF : AM. Adeoque EF. Z*z* = EF : *ε*E = AM. Q*q* = AM. S*s*.

III. Eſt verò etiam (§. 491. num. III.) VO. O*o* (= EF. *εe*) = NO. N*p* = LS. L*m* (§. 493.) = AS. S*s*. Adeoque EF. E*e* (= EF. *εe*. − EF. *ε*E) = AS. S*s* − AM. S*s* = MS. S*s*. Hoc eſt, momentum reſiſtentiæ totalis EF æquatur momento celeritatis MS.

IV. Numerus ſecundus hujus demonſtrationis præbet, S*s* : EF (num. III. hujus) = E*e* : MS = Z*z* : AM, atqui, ut toties jam dictum S*s* : EF = E*e* : MS = *t*E*e*; ergo *t*E*e* = Z*z* : AM, & omnia *t*E*e* = omnibus Z*z* : AM ſeu = XZ : AM. Hoc eſt, tempus aſcenſionis in ſpatio EM, eſt XZ : AM, exponitur ergo per magnitudinem aſſumtam applicatam ad tangentem anguli BAW. Quæ omnia erant demonſtranda.

Corollarium I.

560. Altitudo, ad quam grave in altum projectum pertingere poteſt, eodem tempore, quo in aëre altitudinem EM abſolvet, erit iterum ad ſemiſſem IM, quæ gravitatem exponit in duplicata ratione aſſumtæ XZ ad datam AM. Celeritas verò projectionis in vacuo eſt ad celeritatem projectionis in aëre, ſicut IM. XZ ad AM. MS.

De-

Demonſtratio continetur in corollariis II. & IV. propoſitionis præcedentis.

Corollarium II.

561. Evaneſcente AM vel AT, atque adeò coincidentibus rectis IM, BA & GH, redibit iterum caſus propoſitionis LXV. adeò ut omnia, quæ in propoſitione illa exhibita ſunt, tantum corollaria ſint præſentis.

Ut brevitati conſulerem omiſi perplura corollaria, quæ ex hac propoſitione adhuc elici potuiſſent, tum etiam calculum arithmeticum, quo ope tabularum ſinuum tangentium & log-morum, celeritates, ſpatia percurſa, & tempora lationis determinari potuiſſent. Intelligens Lector omnia ſua ſponte ſupplebit. Sed, priusquam ad contemplationem motuum curvilineorum in mediis reſiſtentibus me conferam, forte haud abs re fuerit, ſi calculo algebraico regulas generales tradidero pro motibus rectilineis in mediis denſitate variantibus.

Caput XVIII.

Methodus inveniendi ſymptomata motuum corporum in mediis utlibet reſiſtentibus, atque denſitate pro libitu variantibus.

In præcedentibus capitibus celebriores reſiſtentiarum aëris hypotheſes excuſſimus, & quinam motus, iisdem hypotheſibus poſitis, naſci debeant, definivimus, ſupponentes tamen medium reſiſtens ejusdem ubique denſitatis eſſe. Quia verò denſitates ſubinde variare poſſunt, canones motuum etiam exhibendi ſunt pro ejusmodi mediis denſitate variantibus, quod in hoc capite reſpectu motuum rectilineorum præſtabimus, de curvilineis in ſequentibus duobus capitibus acturi.

Propositio LXIX. Lemma.

562. *Exhibens nonnullas elementorum logarithmicorum proprietates; ſcilicet,* 1°. *Elementum log-micum* poſitivum, *eſt elementum log-mi rationis majoris inæqualitatis, quam* magnitudo quæcunque variabilis *habet ad ſuam* minimam magnitudinem.

Elementum vero log-micum privativum *eſt elementum log-mi rationis majoris itidem inæqualitatis*, *quam* maxima magnitudo alicujus variabilis *habet ad hanc* variabilem.

2°. Multiplum *quodcunque vel* ſubmultiplum *elementi cujuſcunque magnitudinis variabilis applicatum ad ipſam magnitudinem, cujus eſt elementum, eſt elementum log-mi rationis* multiplicatæ *vel* ſubmultiplicatæ *rationis, quam variabilis magnitudo habet ad ſummi minimam magnitudinem, aut quam maxima magnitudinis variabilis habet ad ipſam variabilem, prout elementum log-micum poſitivum aut privativum fuerit.*

Fig. 133. Eſto 1°. quantitas variabilis u, ejusque *minima* magnitudo a, elementum log-micum $+du:u$ erit elementum log-mi rationis $(u:a)$. Sin verò magnitudo u, cum *maxima* eſt, ſit $=a$; erit $-du:u=$ elem. rationis $(a:u)$. 2°. Iisdem poſitis, ſi habeatur $mdu:u$ erit hoc elementum log-mi rationis $(u:a)$ multiplicatæ juxta m, id eſt, $mdu:u=$ elem. rationis $(u^m:a^m)$ ubi m ſignificat quemlibet numerum integrum vel fractum, rationalem aut irrationalem, &c. & $-mdu:u=$ elem. rationis $(a^m:u^m)$. in log-mica, cujus ſubtangens eſt unitas.

Sit IAE log-mica circa axem MF, cujus ſubtangens DO æquetur unitati 1, ſintque CD magnitudo variabilis ac continue creſcens ejusque *minima* magnitudo AB, ordinata verò variabilis GH ſit magnitudo continue decreſcens, ejusque *maxima* etiam AB; ponantur cd & gh ordinatæ ipſis CD & GH indefinite propinquæ, ductisque Ck, $g\gamma$, axi MF parallelis, erunt $c\kappa$ incrementum ipſius CD adeoque $c\kappa$ erit poſitivum; ipſum verò $G\gamma$ erit decrementum ordinatæ GH, atque adeò privativum. Hisce poſitis,

Fig. 133. I. Quia (§. 491.) $+c\kappa:CD=Dd:OD$ (aut quia ſubtangens OD æquivalet unitati) $=Dd$, & quia Dd eſt elementum ipſius BD ſeu log-mi (CD : AB), erit omninò $c\kappa:CD=$ elem. log-mi rationis (CD : AB) hoc eſt $+du:u=$ elem. log-mi rat. $(u:a)$, poſitis AB, a; CD, u & $c\kappa$, du.

Eodem argumento probatur eſſe $-G\gamma:GH=$ elem. log-mi rationis AB : GH, hoc eſt $-du:u$, $=$ elem. log. $(a:u)$ ſeu log-mi (AB : GH), vocatis nunc GH, u; ac $G\gamma$, du exiſtente AB, etiamnunc a.

II. Oſtendendum, eſſe $m.c\kappa:CD=$ elemento log-mi $(CD^m:AB^m)$. Sit enim $BD:BF=1:m$, atque adeò $BF=m.BD$, adeo ut excitata in F ordinata FE, ex natura log-micæ ſit $CD^m:AB^m=EF:AB$. Verum $m.c\kappa:CD=m.Dd:DO$, & omn. $m.c\kappa:CD=$ omnibus $m.Dd:$

DO

DO $=m.$BD : DO (ſeu conſtr.) BF : DO (vel ſi DO æquivalet unitati) $=$ BF $=$ log. (EF : AB) $=$ log. $(CD^m : AB^m)$. Adeoque $mdu : u$, $=$ elem. log. $(u^m : a^m)$.

Nec diſſimili ratione evincitur, quod, facta BM $=m.$BH erectaque ordinata MI, futurum ſit, $-m.G\gamma$: GH $=$ elem. log-mi (AB : IM) $=$ elem. log. $(AB^m : GH^m)$ ſeu, quod idem eſt, $-mdu : u =$ elemento log-mi $(a^m : u^m)$. Quæ duo erant demonſtranda.

PROPOSITIO LXX. Problema.

563. *Exhibere canonem generalem motuum rectilineorum ex primitive uniformibus derivatorum, quibus corpora in aëre denſitatis variabilis, & juxta quamlibet legem reſiſtente, ferantur.*

Poſitis iis, quæ ad propoſitionem LV. hujus Libri Secundi dicta ſunt, vocetur ſpatium NE in linea deferenti percurſum x, tempus, quo abſolvitur t, celeritas mobili reſidua DB poſt effluxum hoc tempus u; adeoque celeritas DE mobilis in linea deferenti hoc tempore acquiſita erit $a-u$, ſi, quod ſupponimus, a ſignificet velocitatem mobilis initialem AN, quâ ſcilicet linea deferens æquabili motu (ſecundùm hypotheſin) in aëre progreditur. Spatium abſolutum, quod mobile tempore memorato t, in aëre transmittit S. Solicitatio acceleratrix, in quolibet lineæ deferentis puncto E, ſeu recta EF reſiſtentiam aëris generaliter indicans, R; ac denique denſitas aëris Δ. Hisce denominationibus factis, paragraphi 489. & 488. ſequentes præbent formulas: I. $Rdx = udu - adu$. II. $t = \int -du : R$. III. & $S = at - x$. Quæ erant exhibendæ. Fig. 119.

Exemplum.

564. Sit generaliter $R = (abu^m + cu^{m+1}). \Delta : a^{m+1}$, ubi a, b, c ſunt magnitudines conſtantes, & m quilibet numerus rationalis vel ſurdus. Formula prima generalis, reductionibus factis, dat $\Delta dx = (a^{m+1} udu - a^{m+2} du) : abu^m + cu^{m+1}$. Ex qua liquet abſciſſas x inveniri per quadraturas duarum curvarum.

565. Si $m=1$, fiet $R = (abu + cuu). \Delta : aa$; & $\Delta dx = (aaudu - a^3 du) : (abu + cuu)$.

566. Igitur, ſi præterea $c = 0$, erit $R = bu\Delta : a$, hoc eſt, reſiſtentiæ aëris erunt in compoſita ratione denſitatum & velocitatum mobilis actualium, alteraque æquatio §. 565, mutabitur in $\Delta dx = adu : b, -$

aadu :

$aadu:bu$. Atqui (§. 88.) ſumma omnium $adu:b=(au-aa):b$, & $\int -aadu:bu$ (§. 562.) $=\frac{aa}{b}.$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus ſubtangens 1, vel $=\frac{a}{b}$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus ſubtangens eſt a. Propterea $\int \Delta dx=\frac{a}{b}$ log. $(a:u)-(aa-au):b$. Hinc, ſi $\Delta=1$, & $b=a$, erit $\int \Delta dx$ $=x=$ log. $(a:u)-a+u$. Atque adeò, ſi in fig. 119. AN $=$ AK $=$ $a=b$, BD $=$ IH $=u$, ac NE $=x$, erit CG $=$ CN $=a-u$, & CH $=$ log. $(a:u)=$ log. (AN : IK), ergo x, ſeu NE $=$ CH $-$ CG $=$ GH, prorſus ut conſtructio propoſitionis LVIII. habet.

567. Si in æquationibus ſuperioribus (§. 565.) $b=0$, habebitur R $=cuu\Delta:aa$, id eſt, reſiſtentiæ aëris ſunt in compoſita ratione denſitatum & duplicatæ velocitatum mobilis, & $\Delta dx=aaudu-a^3du:cuu$, $=aadu:cu$, $-a^3du:cuu$. At verò (§. 562.) eſt $\int -aadu:cu=\frac{a}{c}.$ log. $(a:u)$ in log-mica, cujus ſubtang. $=a$, & $\int -a^3du:cuu$ (§. 88.) $=$ $(a^3-aau):cu$. Ergo $\int \Delta dx=a^3aau:cu$; $-\frac{a}{c}.$ log. $(a:u)$; vel factis $\Delta=1$, & $a=c$; fiet $x=aa-au:u$, $-$ log. $(a:u)$. Hinc, ſi in fig. 125. AM $=$ AT $=a$, BD $=$ IH $=u$, & ME $=x$, erit, propter hyperbolam NHK, $(aa-au):u=$ CH, & log. $(a:u)=$ log. (NT : IH) $=$ CG, cum NGK (conſtr.) ſit log-mica, cujus ſubtangens $=$ NT $=a$; adeoque ME $=$ CH $-$ CG $=$ GH, iterum ut habet conſtructio propoſitionis LXIII.

568. Tandem, ſi æquatio ipſa paragraphi 565. $\Delta dx=aaudu-a^3du:abu+cuu$ conſtruenda ſit, dividatur numeratoris membrum $-a^3du$ per membrum abu denominatoris, reductiſque reducendis, erit $\Delta dx=\left(\frac{aa}{b}+\frac{aa}{c}\right).\ du:\left(\frac{ab}{c}+u\right)-\frac{ab}{b}du:u$. Et horum integralia (§. 562.) invenientur, ſcilicet $\int \Delta dx=$ log. $(a:u)-\frac{b-c}{c}.$ log. $\left(\frac{ab}{c}+a:\frac{ab}{c}+u\right)$ in logarithmica, cujus ſubtangens eſt $\frac{aa}{b}$. Jam, in figura 129. propoſitionis LXVI. ſi fiat PW : MP $=$ OM : IM, & PV : MP $=$ AM : IM, ac dicantur PW $=b$, PV $=c$, & AM $=a$, $=$ OI; indeterminatæ QM $=$ OG $=u$, ac ME $=x$. Invenieturque $\frac{aa}{b}=$ IM. AM^2 : OM. MP (conſtr.) $=$ RC. Nam (§. 541. num. 1.) RC : AM $=$ IM. AM :

AM : OM. MP, atqui propter (conſtr.) PW : MP = OM : IM, atque adeo OM. MP = IM. PW, ergo RC : AM (= IM. AM : OM. MP) = IM. AM : IM. PW = AM : PW, ac proinde RC = AM² : PW = $aa:b$, ut dicebatur. Item $\frac{b+c}{c} = \frac{IM}{AM}$, & $\frac{ab}{c}$ = OM, adeoque $\frac{ab}{c} + a$ = IM, & $\frac{ab}{c} + u$ = GM; hinc $\int \Delta dx$ = log. (AM : QM) $- \frac{IM}{AM}$. log. (IM : GM), atque adeò exiſtente $\Delta = 1$, x = ME = log. (AM : QM) $- \frac{IM}{AM}$ log. (IM : GM) prorſus ut habet conſtructio recenſitæ propoſitionis LXVI.

569. Pro inventione temporis conſulenda eſt ſecunda formula generalis (§. 563.) ſeu $t = -\int du : R$, vel $dt = -du : R$, vel ſubſtituendo ex §. 565. valorem ipſius R erit $\Delta dt = -aadu : abu + cuu = -adu : bu; + \frac{acdu}{b} : ab + cu = -adu : bu, + \frac{a}{b} du : \frac{ab}{c} + u$. hinc $\int \Delta dt = \frac{1}{a}$. log. $(a:u) - \frac{1}{a}$ log. $(\frac{ab}{c} + a : \frac{ab}{c} + u) = \frac{1}{AM}$ log. (AM : QM) $- \frac{1}{AM}$. log. (IM : GM) = (MC − LN) : AM; prorſus ut in præmemorata propoſitione LXVI. jam oſtenſum, ubi tamen Δ eſt 1, atque adeo $\int \Delta dt = t$.

Atque hæc pauca exempla particularia ad illuſtrationem formularum generalium ſufficiant.

PROPOSITIO LXXI. Problema.

570. *Exhibere generales formulas pro deſcenſu & aſcenſu gravium rectilineo & horizonti perpendiculari in aëre denſitatis variabilis & ſecundùm quamcunque legem reſiſtente.*

Retentis ſymbolis ſupra (§. §. 484, 485.) jam adhibitis: propoſitio LIV. nobis ſuppeditat formulas pro utroque caſu deſcenſus aſcenſusque gravium; ſcilicet, I. $x = \int udu : g \mp r$. & II. $t = \int du : g \mp r$. Ubi ſignum ſuperius reſpicit deſcenſum & inferius deſcenſum corporum. In hiſce formulis g ſignificat gravitatem, r reſiſtentiam medii, u velocitates mobili acquiſitas vel reſiduas, & x ſpatia à quiete deſcendendo percurſa, vel complementa ſpatiorum aſcenſu jam actu confectorum ad maximam altitudinem A, quam gravia certa quadam velocitate initiali aſcendentia percurrere valent, ac denique t denotant tempora deſcenſus in ſpatiis x, vel quibus complementa præmemorata ad maximam altitudinem deſcribi poſſunt. Idcirco ſpatia

actu mobili aſcendendo percurſa erunt $A-x$, & tempora, quo hæc ſpatia abſolvuntur $T-t$, poſita T pro tempore, quo maxima altitudo A conficitur. Quæ erant exhibenda.

Exemplum.

571. Sit $r=(abu+cuu)\Delta:aa$, eritque $x=\int aaudu:aag\mp abu\Delta\mp cuu\Delta$, & $t=\int aadu:aag\mp abu\Delta\mp cuu\Delta$. Utut hæ formulæ particulares ſint, infinitos tamen caſus particulares complectuntur, tam pro deſcenſu quam pro aſcenſu gravium; ſcilicet pro varietate denſitatum Δ. Nos primum ſimpliciſſimum caſum conſiderabimus, ſupponentes $\Delta=1$, & formulæ noſtræ redigentur ad caſus, quos in capitibus proxime antecedentibus jam excuſſimus.

572. Propterea, ſubſtituatur tantum loco Δ, 1, & retinendo ſigna ſuperiora pro deſcenſu gravium, & habebimus $x=\int aaudu:aag-abu-cuu$, alteramque $-t=\int(aadu:aag-abu-cuu)$. Ut hæ æquationes conſtrui queant, ponantur $aag=chh-cff$, item $ab=2cf$, ac denique $y=f+u$; ubi a, b, c, f, g, & h ſunt quantitates conſtantes, ac x, y, u, t, variabiles. Factis hisce ſubſtitutionibus reperietur $aaudu:aag-abu-cuu=aaudu:chh-cff-2cfu-cuu=\frac{aa}{c}udu:hh-(f+u)^2=(\frac{aa}{c}ydy-\frac{aaf}{c}dy):hh-yy$. Atqui (§. 562.) omnia $\frac{aa}{c}ydy:hh-yy=\log.\sqrt{}(hh-ff:hh-yy)$ in logarithmica, cujus ſubtangens eſt $\frac{aa}{c}$. Nam ydy eſt dimidium elementi denominatoris $hh-yy$, ſed ſub ſigno contrario, & $hh-ff$ eſt maxima magnitudo omnium $hh-yy$, quia f eſt minima omnium $y=f+u$, quæ habetur ubi u evanuit.

Porrò $\int\frac{aaf}{c}dy:hh-yy=$ (§. 467. num. III.) $\frac{f}{h}\log.\sqrt{}(h+y:h-y)$, vel potius, quia evaneſcente u ipſum etiam integrale evaneſcere debet, & exiſtente $u=0$, ſeu $y=f$, inventum integrale abit in $\frac{f}{h}\log.\sqrt{}(h+f:h-f)$, quæ quantitas detrahenda eſt à priore, & habebitur $\int\frac{aaf}{c}dy:hh-yy=\frac{f}{h}\log.\sqrt{}(h+y:h-y)-\frac{f}{h}\log.\sqrt{}(h+f:h-f)$.

573. Eadem facilitate reſolvetur altera æquatio paragraphi 572, ſeu

ſeu $t = \int aadu : aag - abu - cuu$ (ſeu factis iisdem ſubſtitutionibus, quæ in præcedenti articulo factæ ſunt) $= \int \frac{aa}{c} dy : hh - yy$. Hæc enim quantitas æquatur integrali invento in ultima periodo articuli præcedentis, ſed diviſo per f; propterea invenietur t $(= \int \frac{aa}{c} dy : hh - yy) = \frac{1}{h} \log. \surd(h + y : h - y) - \frac{1}{h} \log. \surd(h + f : h - f)$.

574. Hæ repertæ æquationes reductæ accuratiſſime nos ducunt ad conſtructionem propoſitionis LXVII. Sint enim $a = g = c$, & quia (ſecundùm hypotheſin §. 572.) $aag = chh - cff$, ac $ab = 2cf$, erunt $aa = hh - ff$, & $b = 2f$. Si itaque in fig. 130. fiant $IM = a$, $AM = \frac{1}{2}b = f$, adeòque $TM = b$, erit $IA^2 = aa + ff = hh$, atque adeò $AI = AB = AL = h$, factaque $MS = u$, erit $AS = f + u = y$, & $LS^2 = hh - yy$, nec non $IM^2 = hh - ff = aa$, adeoque $\log. \surd(hh - ff : hh - yy) = \log. \surd(IM^2 : LS^2) = \log. (IM : LS) = \log. (GB : NO) = HO$. In log-mica BN, cujus ſubtangens æquatur $\frac{aa}{c}$ ſeu a, quia (ſecundùm hypotheſin) $a = c = IM = GH$.

Præterea, ſi $AK = AC = AI = h$, erit $KS = h + y$, & $CS = h - y$; ergo ratio $h + y : h - y = KS : CS$ (vel, quia KS, LS, & SC in circulo ſunt in continua ratione) $= LS^2 : SC^2 = QA^2 : AC^2$; atque adeò $\surd(h + y : h - y) = QA : AC$. Simillimo argumento invenitur $\surd(h + f : h - f) = IM : MC = PA : AC$. Adeoque $\frac{f}{h} \log. \surd(h + y : h - y) - \frac{f}{h} \log. \surd(h + f : h - f) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : AC) - \frac{AM}{AI} \log. (PA : AC) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$. Atqui (§. 549.) aſſumta eſt $XZ : \log. (QA : PA) = AM : AI$, ergo $XZ = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA)$, atque adeo $x = \log. \surd(hh - ff : hh - yy) - \frac{f}{h} \log. \surd(h + y : h - y) + \frac{f}{h} \log. \surd(h + f : h - f) = HO - XZ$, ut in citata propoſitione LXVII.

575. Quantum ad alteram (§. 573.) $t = \frac{1}{h} \log. \surd(h + y : h - y) - \frac{1}{h} \log. \surd(h + f : h - f)$, hæc $t = XZ : AM$. Quandoquidem $\frac{f}{h} \log. \surd(h + y : h - y) - \frac{f}{h} \log. (h + f : h - f) = \frac{AM}{AI} \log. (QA : PA) = XZ$, adeoque

 $t =$

$t = \frac{1}{h} \log. \sqrt{(h+y : h-y)} - \frac{1}{h} \log. \sqrt{(h+f : h-f)} = XZ : f = XZ : AM.$ Iterum ut in citata propoſitione aſſeritur.

576. Pro aſcenſu gravium faciunt formulæ paragraphi 571. cum ſignis inferioribus, unde ſi iterum Δ ſit $= 1$, erit $x = \int aadu : aag + abu + cuu$ (vel, ſi nunc fiat $aag = chh + cff$, item $2cf = ab$, & $f+u$ æquale y) $= \int (\frac{aa}{c} ydy - \frac{aaf}{c} dy) : hh + yy$. Atqui $\int \frac{aa}{c} ydy : hh + yy$ (§. 562.) $= \text{Log.} \sqrt{(hh + yy : hh + ff)}$, quia ydy eſt dimidium elementum denominatoris $hh + yy$, & $hh + ff$ eſt minima omnium $hh + yy$, cum f ſit minima omnium $y = f + y$. Hic log-us ſumitur in log-mica, cujus ſubtangens eſt $\frac{aa}{c}$.

Altera pars æquationis, ſeu $\int \frac{aaf}{c} dy : hh + yy = \frac{aaf}{chh} . \int hhdy : hh + yy$. Atqui (§. 166.) eſt $hhdy : hh + yy =$ elemento arcus circularis, cujus radius h, & tangens y, quod elementum dicatur $d\omega$, atque adeò arcus ipſe ω; unde $\int hhdy : hh + yy = \omega$, ergo $\int \frac{aaf}{c} dy : hh + yy = \frac{aaf}{chh} . \omega$. Ergo utrumque integrale, ut decet, conjungendo, habetur $x = \int aadu : aag + bau + cuu = \int (\frac{aa}{c} ydy - \frac{aaf}{c} dy) : hh + yy = \log. \sqrt{(hh + yy : hh + ff)} - \frac{aaf\omega}{chh}$.

577. Altera æquatio tempus reſpiciens eſt $t = \int aadu : aag + abu + cuu = \int \frac{aa}{c} dy : hh + yy$ (§. 166.) $= \frac{aa}{chh} . \omega$. Poſitis iis, quæ in periodo paragraphi proxime antecedentis ultimo.

578. Etiam hæ poſtremæ determinationes cum propoſitione LXVIII. probe conſpirant; nam ſi, ut ſupra (§. 574.) $a = g = c$, atque adeò $2f = b$, erit $aa = hh + ff$. Unde, ſi dicantur $AW = IM = a$, $AM = f = \frac{1}{2} TM = \frac{1}{2} b$, erit $WM = BA = h$, adeoque $\sqrt{(hh + ff)} = a = MI$, & quia iterum $AS = f + u = y$, exiſtente $MS = u$; erit $LS = \sqrt{(hh + yy)}$ adeòque $\log. \sqrt{(hh + yy : hh + ff)} = \log. (LS : IM) = \log. (NO : GH) = HO$. Cum log-micæ ſubtangens $\frac{aa}{c}$ ſit $= a$, exiſtente (ſecundùm hypotheſin) $c = a$.

Fig. 132.

Et quia $AS = BQ = y$, & $AB = h$, erit arcus $BK = \omega$, atque adeò

$\frac{aaf}{chh}$.

$\frac{aaf}{cbb}. \omega = \frac{af}{bb} \omega = \frac{WM.AM}{IM^2}$ in BK, ſed in propoſitione LXVIII. §. 559. eſt XZ : BK = WM. AM : IM² ergo $\frac{af\omega}{bb} = XZ$; ac proinde x (= log. $\sqrt{(bb + yy : bb + ff)} - \frac{aaf\omega}{cbb}$) = HO − XZ. ut in memorata propoſitione dictum.

$t = \frac{aa}{cbb} \omega = \frac{a\omega}{bb}$, erit = XZ : AM, pariter ut in dicta propoſitione oſtenſum.

Scholion.

579. Plura alia exempla ad illuſtrationem canonum generalium non affero, ac multa alia ſilentio prætereo, quæ ex ſoluto exemplo potuiſſent elici. Id tamen minime videtur ſubticendum, quod denſitates medii varie modificando effici poſſit, ut gravia, juxta quamlibet accelerationis retardationisque legem, poſſint deſcendere vel aſcendere in lineis horizonti perpendicularibus. Galilæus olim primus demonſtravit, celeritates gravi in vacuo cadenti acquiſitas eſſe in ſubduplicata ratione ſpatiorum, quod etiam in antecedentibus (§. 150.) oſtenſum eſt, ſed ex principiis à Galilæanis diverſis. Hæc accelerationis lex ſolis corporibus in vacuo cadentibus convenire hactenus credebatur, ſed, ut mox probabitur, perperam, cum etiam in aëre reſiſtente juxta hanc eandem accelerationis legem deſcendere poſſint gravia, modò aëris denſitas certa quadam ratione ubique varietur.

580. Ut res generaliter tradatur, ſit nunc $r = (a^{m+2} + abu^m + cu^{m+1}). \Delta : a^{m+2}$, adeo ut formula prima §. 570. $x = \int udu : g \mp r$, vel differentiando $(g \mp r). dx = udu$, nunc futura ſit $(a^{m+2}g \mp a^{m+2} \Delta \mp abu^m \Delta \mp cu^{m+1} \Delta). dx = a^{m+2} udu$, fiat $a^{m+2}g \mp a^{m+2} \Delta \mp abu^m \Delta \mp cu^{m+1} \Delta = \frac{1}{2}a^{m+2}e$, eritque $\frac{1}{2}a^{m+2} edx = a^{m+2} udu$, vel $edx = 2udu$, ac integrando, $ex = uu$, ſeu $u = e^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, ac $u^m = e^{m:2} x^{m:2}$, nec non, $u^{m+1} = e^{m+1:2} x^{m+1:2}$, qui valores, in æquatione $a^{m+2}g \mp$ &c. $= \frac{1}{2}a^{m+2}e$ ſubſtituti, præbent æquationem $a^{m+2}g \mp a^{m+2} \Delta\ abe^{\frac{1}{2}m} x^{\frac{1}{2}m} \Delta \mp ce^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}} \Delta = \frac{1}{2}a^{m+2}e$. Quæ æquatio relationem inter denſitates aëris & ſpatia percurſa, ſeu inter indeterminatas Δ & x, declarat, ad id, ut grave in

hoc aëre eadem accelerationis lege feratur ac in vacuo; etenim hæc accelerationis norma exhibetur æquatione $uu = ex$, vel $u = \sqrt{ex}$. Jam, cum e ſit quantitas conſtans liquet celeritates acquiſitas (u) eſſe ut ($\sqrt{x}$) id eſt, in ſubduplicata ratione ſpatiorum percurſorum. Ad hoc ne quidem neceſſe eſt, ut gravitas (g) ſit conſtans ſeu uniformis, res etiamnum obtinebit, dummodo g datæ ſint per x & conſtantes.

Non immorabimur particularibus exemplis illorum caſuum, quibus aër gravibus reſiſtit in ratione compoſita denſitatum & velocitatum, vel in compoſita ratione ex denſitatum ratione & duplicata celeritatum, vel etiam juxta reſiſtentiæ legem, quæ ex utraque memoratarum participat, ad hæc enim duntaxat in æquatione ponendus eſt exponens $m = 1$, & $c = 0$ primo, vel $b = 0$, ſecundo, aut vero utramque b, c, &c. retinendo tertio caſu, inde tot reſultabunt diverſæ æquationes, quot hi diverſi caſus exigunt.

CAPUT XIX.

De deſcenſu & aſcenſu gravium in lineis quibuscunque curvis, poſita medii reſiſtentia quadratis celeritatum proportionali.

581. GRavia, quæ in vacuo feruntur atque in lineis curvis incedunt, in quolibet curvæ puncto, quam accelerato motu perlabuntur, eam celeritatem acquiſiviſſe cenſentur, quam acquiſiviſſent, ſi via breviſſima à linea horizontali per initium deſcenſus in curva ducta, in datum curvæ punctum, id eſt, juxta lineam rectam horizontali perpendicularem, cecidiſſent, ut in primo Libro §. 142. id generaliter oſtenſum. Sed res aliter ſe habet cum corporibus, quæ in aëre moventur; eorum enim celeritates aliter, quam per quadraturas & rectificationes curvarum exhiberi nequeunt, idque in ſola hypotheſi, qua reſiſtentiæ aëris quadratis celeritatum mobilis proportionantur, ut quidem ex ſequentibus id eluceſcet.

PROPOSITIO LXXII.

582. *Si, extenſa tota curva, quam grave deſcenſu ſuo & ſubſequente aſcenſu deſcribit in lineam rectam, in ſingulis hujus rectæ punctis perpen-*

pendiculares excitentur proportionales reſiſtentiis aëris, quas mobile in homologis curvæ punctis ſubit. Area curvilinea, quæ omnes ejusmodi perpendiculares continet, æquabitur rectangulo, à recta, quæ gravitatem uniformem exponit, in differentiam abſciſſarum arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptorum.

Eſto ADB curva deſcenſu mobilis & BEC aſcenſu deſcripta, curvæ hujus BEC abſciſſa eſt BH, illius verò BG, adeoque GH erit differentia abſciſſarum. Extenſa deinde tota curva ABC in lineam rectam ABC, atque in ſingulis hujus rectæ punctis D, erectæ ſint perpendiculares DT exponentes reſiſtentiam medii in homologis curvæ punctis B, formantesque figuram curvilineam ATRC, quam æquari oſtendam rec-lo βB in GH, ſupponendo rectam βB exponere gravitatem uniformem. Fig. 134.

In eadem DT producta ſumatur, ubi DN, quæ ſolicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam exponet ND − TD exceſſus ſolicitationis tangentialis gravitatis ſupra reſiſtentiam aëris, ſolicitationem acceleratricem mobilis in curva ADB deſcendentis. Jam momentum hujus ſolicitationis acceleratricis, hoc eſt, (ND − TD.) D*d*, vel ND. D*d* − TD. D*d*, hoc eſt, elementum areæ AMND − elem. areæ ATD (§.§. 132, 484.) æquatur momento celeritatis mobili in curvæ puncto D acquiſitæ, ſeu elemento dimidii quadrati ex dicta celeritate acquiſita; unde, cum in A omnia à nihilo incipiant, & omnia momenta ſolicitationis acceleratricis æquentur omnibus momentis celeritatis, erit area AMND − area ATD = dimid. quadr. velocitatis in D, & area AMNSB − area ATRB = dimid. quadrat. velocitatis acquiſitæ in B.

Si porro mobile in curva BEC aſcendit, reſiſtentia totalis, in quolibet ejus puncto E (§. 481.) erit NE + TE, & momentum hujus reſiſtentiæ totalis ſeu (NE + TE). *e*E = NE. *e*E + TE. *e*E = elem. areæ MNEC − elem. areæ CTE æquatur momento celeritatis decreſcentis mobilique in curvæ puncto E reſiduæ, ſeu elemento dimidii quadrati ex celeritate in E; unde, quia delata NE in MC, omnia in nihilum deſinunt, erit area MNEC + area CTE = dimid. quadr. ex veloc. in E, adeoque etiam MNSBC + CTRB = dimid. quadrato ex celeritate initiali in B. Atqui hæc celeritas initialis in B, eadem eſt cum velocitate acquiſita in B, poſt deſcenſum mobilis in curva ADB; ergo AMNSB − ATRBA (= dimid. quadrato celeritatis in B) = CMNSBC + CTRBC, adeoque tota figura reſiſtentiarum ATRCA = AMNSB − CMNSB.

Atqui

Atqui area AMNSB æquatur perpetuo rectangulo ſub βB recta, quæ gravitatem uniformem exponit, & abſciſſa BG curvæ ADB deſcenſu mobilis deſcriptæ, cum quodlibet elementum areæ N D*d* æquetur rec-lo βB. F*f*, ſeu momento gravitatis centralis βB. Eodem argumento ſequitur fore aream CMNSBC = βB. BH, ergo AMNSB − CMNSB, quod areæ ATRCA æquari oſtenſum, æquabitur etiam rec-lo βB. GH. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

583. Si reſiſtentiæ aëris ſint ut celeritates mobilis acquiſitæ, erit AMND = areæ ATD + $\frac{1}{2}$TD². Nam TD (ſecundùm hypotheſin) eſt ut celeritas in D acquiſita, adeoque, per præcedentem paragraphum, erit momentum ſolicitationis acceleratricis, ſeu ND. D*d* + TD. D*d* = elem. AMND + elem. ATD, æquale momento celeritatis, ſeu TD. *t*θ, quod æquatur elem. ex $\frac{1}{2}$TD². Ergo ſummando, erit omninò area AMND − area ATD = $\frac{1}{2}$TD², atque adeò AMND = ATD + $\frac{1}{2}$TD². Eodem argumento concludetur eſſe NECM = $\frac{1}{2}$TE² − CTE.

Corollarium II.

484. Sin verò reſiſtentiæ aëris fuerint in duplicata ratione celeritatum acquiſitarum, quæ verior eſt hypotheſis, erit area AMND = AQ. TD + ATD, & area CMNE = AQ. TE − CTE. Ubi AQ eſt magnitudo data ſeu conſtans.

Hoc enim caſu celeritatis in D acquiſitæ quadratum erit = 2 AQ. TD, cum reſiſtentiæ ſint ut quadrata celeritatum; & dimidium celeritatis quadratum AQ. TD, hujusque elementum, id eſt momentum celeritatis acquiſitæ in D, reperietur AQ. *t*θ; unde, quia momentum ſolicitationis acceleratricis ND − TD æquatur momento celeritatis in D acquiſitæ, fiet ND. D*d* − TD. D*d* = AQ. *t*θ, & ſummando, omnia ND. D*d*, ſeu area AMND − omn. TD. D*d*, ſeu area ATD = omnibus AQ. *t*θ, id eſt, rec-lo AQ. TD; adeoque AMND = ATD + AQ. TD. Eadem ferme ratione probatur eſſe CMNE = AQ. TE − CTE.

Co-

Corollarium III.

585. Si reſiſtentia eſt uniformis, curva ARC abit in lineam rectam ipſi AC parallelam, eritque hoc caſu $AMNSB - CMNSB = \beta B . GH = AC . BR$, ac per conſequens reſiſtentia medii BR uniformis ad gravitatem uniformem ſe habebit, ut GH differentia abſciſſarum BG & BH arcuum curvæ AB & BC deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum ad AC aggregatum ipſorum arcuum ABC.

Corollarium IV.

586. Si curva ABC eſt cyclois ordinaria, cujus axis vel diameter circuli generatoris eſt *b*B & baſis *ac*; ſemiſſis differentiæ quadratorum ex arcubus cycloidis ADB & BEC deſcenſu & aſcenſu deſcriptis æquabitur areæ ATRTC.

Nam, quia βB exponit gravitatem uniformem juxta ea, quæ §. 179. dicta ſunt, hæc βB erit dupla diametri *b*B; hinc $\beta B . BG = 2 . bB . BG = 2 . BK^2$ (vel, quia arcus cycloidis ADB æquat duplam ſubtenſam BK) $= \frac{1}{2} . AB^2$, & $\beta B . BH = 2 . bB . BH = \frac{1}{2} . BC^2$, ergo $\beta B . GH = \frac{1}{2} AB^2 - \frac{1}{2} BC^2 = ATRTC$. Hoc eſt, rectangulum ex ſemiſſe differentiæ arcuum ADB & BEC deſcenſu & ſubſequente aſcenſu in cycloide deſcriptorum, in aggregatum ABC eorundem arcuum, æquat aream ATRTC.

Hoc corollarium coincidit cum propoſitione XXX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. Illuſtr. Newtoni, cujus tamen demonſtrationem ex aliis principiis hauſit, ut demonſtrationem illam inſpicienti cuilibet patebit.

Corollarium V.

587. Ergo, in caſu corollarii III. hujus, reſiſtentia uniformis in cycloide erit ad gravitatem, id eſt, RB ad βB in fig. 134. ſicut dimidia differentia arcuum ADB & BEC ad βB, ſeu hemicycloidem *a*DB, vel, ſicut differentia dictorum arcuum ad integram cycloidem, *a*B*c*. Eſt enim (§. 585.) $BR : \beta B = GH : AC = \beta B . GH : \beta B . AC$ (§. 586.) $= (\frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} BC) . AC : \beta B . AC = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} BC : \beta B$ vel *a*DB, $= AB - BC$: cycloid. *a*B*c*.

SCHOLION.

588. In aliis reſiſtentiæ hypotheſibus res evadit paullo altioris indaginis, quam in corollariis III. & V. hujus; cum in omni alia hypotheſi curva ATRTC adhuc invenienda ſit. Illuſtris Newtonus ſtatim poſt propoſitionem in corollario IV. hujus citatam aſſerit, hanc curvam ARC ad ellipſin proxime accedere, ſi, curva ABC exiſtente cycloide, reſiſtentiæ aëris fuerint celeritatibus proportionales, vel ad parabolam, ſi reſiſtentiæ fuerint in duplicata proportione celeritatum: Sed, accurate & mathematice rem ſumendo, prænominata ATRTC non eſt ellipſis in prima, nec parabola in altera reſiſtentiæ hypotheſi; ſed, quantum conjicere licet, utroque caſu erit transcendens. Etenim, ſi reſiſtentiæ ſunt ut celeritates acquiſitæ, nondum conſtat, quâ ratione curva ARC conſtrui debeat, ne quidem conceſſis quadraturis figurarum curvilinearum. Pro altera vero hypotheſi ac naturæ magis conſentaneâ nominatæ curvæ conſtructio haberi poteſt per quadraturas & rectificationes curvarum. Ex propoſitione XXIX. laudatiſſimi Newtoni Lib. II. ejusmodi conſtructio peti poteſt in caſu particulari, quo curva deſcenſus ABC eſt cyclois. Hoc loco vero generalem conſtructionem adducam pro quacunque curva ABC, idque gemino modo.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA.

589. *Per quodlibet in linea* AM *producta punctum* V, *deſcripta logarithmica* VXY *ſubtangentem habente æqualem datæ lineæ* AQ, *&* *aſymptotam* CQ, *ac protenſa* ND *usque ad occurſum* P *cum log-mica* VX; *ſi omnia elementa* PD. DN. Dd *alicujus ſolidi duobus planis* MAV *&* NDP *interjecti erecto ſcilicet ad angulos rectos plano* MABS *ſuper plano* VAB, *æqualia fuerint parallelepipedo* AQ^2. DO, *ſub quadrato ſubtangentis log-micæ & ordinata* DO *cujusdam curvæ* AOΔC; *homologa ordinata* DT *ſcalæ reſiſtentiarum* ARC *erit quarta proportionalis ad ordinatas* PD, DO *&* AQ *ſubtangentem log-micæ* VX.

I. Eſto linea pn alteri PN indefinite vicina, atque per puncta T, O & P curvarum AT, AO & VP ductæ ſint lineolæ $T\theta$, $O\omega$, & $P\pi$; ac denique, ſit DT quarta proportionalis ad PD, DO & AQ, vel, quod eodem recidit, rec-lum PD. DT = AQ. DO, & $pd.dt =$ AQ.do, id eſt, PD.$dt + p\pi.dt$ = PD.DT + PD.$t\theta + dt.p\pi$ = PD.DT + PD.

PD. $t\theta$ + DT. $p\pi$ = AQ. DO + AQ. ωo; ſubductis igitur PD. DT & AQ. DO, remanebit PD. $t\theta$ + DT. $p\pi$ = AQ. ωo, ductisque ſingulis partibus in AQ; fiet AQ. PD. $t\theta$ + DT. AQ. $p\pi$ = AQ². $o\omega$.

II. Atqui AQ². ωo = PD. DN. Dd, cum omnia PD. DN. Dd ſint (conſtr.) = AQ². DO; item (§. 491. num. 11.) AQ. $p\pi$ æquatur PD. Dd, vel AQ. DT. $p\pi$ = DT. PD. Dd; ergo, ſubrogatis his valoribus in poſtrema æqualitate num. 1. hujus, invenietur PD. AQ. $t\theta$ + PD. DT. Dd = PD. DN. Dd, &, applicando ſingula membra ad PD, AQ. $t\theta$ + DT. Dd = DN. Dd. Adeoque omnia AQ. $t\theta$, id eſt, AQ. TD + omn. DT. Dd, id eſt, area ATD = omnibus DN. Dd, ſeu areæ AMND. Eſt proinde AQ. TD + ATD = AMND; atque adeò (§. 584.) curva ATR eſt ſcala reſiſtentiarum mobilis in curva ADB cadentis. Fig. 134.

III. Eodem modo probatur PE. $t\theta$ — ET. Pπ æquari AQ. $o\omega$ atque inde, ut ante, inferetur eſſe AQ. TE — CTE = CMNE, ac per conſequens (§. 584.) curvam CTR ſcalam reſiſtentiarum aëris mobili in curva BEC aſcendenti oppoſitarum. Propterea curva ATRTC eſt ſcala reſiſtentiarum aëris, cum corpus in curva quacunque ADB deſcendit, atque dehinc in altera BEC aſcendit. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

590. Celeritas mobilis, in quolibet curvæ puncto D acquiſita, eſt $\sqrt{(2AQ.DT)}$, atque velocitas eidem mobili per arcum curvæ BE aſcendenti reſidua in E erit $\sqrt{(2.AQ.ET)}$ quorum ratio ex ſuperioribus (§. 484.) ſatis conſtat.

Corollarium II.

591. Omnia parallelepipeda PD. DN. Dd continentur in ſolido quodam MAVN, cujus ſingulæ ſectiones plano BAV rectæ planoque MAV parallelæ, ſunt rectangula PDN. Planum enim AMSB ſuper plano VAB erectum concipiendum eſt.

Corollarium III.

592. Si linea deſcenſus mobilis ABC eſt cyclois ordinaria, linea MNS erit recta transiens per B, angulumque MBA, ſemirecto æqualem continens cum linea AB. Propterea ſolidum prædictum MAVN erit truncus log-micus ſuper baſi ADPV interjectus plano VAB

 alii-

aliique per BX tranſeunti, atque angulo ſemirecto ad planum VAB inclinato.

Fig. 134. Nam, quia ſubtenſa BL arcus circularis BL parallela eſt tangenti cycloidis in puncto D, erit gravitas ad ſolicitationem ejus tangentialem in cycloidis puncto D, ſicut *b*B ad BL $=\beta$B : 2.BL $=\beta$B : arcum cycl. BD, atqui βB exponit gravitatem, ergo BD exponet ſolicitationem gravitatis tangentialem in D, atque adeo in fig. 135. BD quæ eadem eſt cum arcu cycloidis BD in fig. 134. in rectam extenſo æquabitur ordinatæ ND, & AB = AM; hinc linea MNS eſt recta, ſeu figura AMNS erit triangulum rectangulum iſoſceles, atque adeò ſolidum MAVNP truncus reſectus ex priſmate recto ſuper baſi ADPV à plano ſecante per BX ducto, atque angulo ſemirecto ad planum baſeos BAV inclinato.

Corollarium IV.

593. Unde, ſi Ω ſit centrum gravitatis quadrilinei log-mici ADPV, demiſſa perpendiculari $\Omega\Delta$ ad AB, ſolidum ex quadrilineo prædicto ADPV in BΔ æquabitur trunco MAVNP, atque adeo (conſtr.) parallelepipedo; atqui ducta per VZ parallela AC, quadrilineum AVPD reperietur = AQ. PZ, ergo ſolidum MAVNP = AQ. PZ. BΔ (conſtr.) = AQ^2. DO, & PZ. BΔ = AQ. DO (num. 1. §. 589.) = PD. DT. Eſt proinde reſiſtentia DT in quolibet cycloidis puncto = PZ. BΔ : PD.

Scholion.

594. Quia ad obtinendam expreſſionem ordinatarum DT etiam expreſſio requiritur ipſarum BΔ, ſeu diſtantiarum centri gravitatis quadrilineorum ADPV, idcirco duobus verbis indicabo, qua ratione inveſtigari debeant.

In log-mica eſt DP. D*d* = AQ. $p\pi$, & AD. DP. D*d* = AQ. AD. $p\pi$ (vel ducta PW parallela VZ) = AQ. PW. $p\pi$, ergo omnia AD. DP. D*d* = omnibus AQ. PW. $p\pi$ id eſt = AQ in trilineum VPW. Atqui (§. 44.) eſt quadrilineum ADVP in AΔ = omnibus AD. DP. D*d*; ac per conſequens = AQ. VPW. Verum ADPV = AQ. PZ, & VPW = AD. DP − AQ. PZ; ergo AQ. PZ. AΔ = AQ. AD. DP − AQ^2. PZ. ſeu PZ. AΔ = AD. DP − AQ. PZ; hinc PZ. BΔ = AB. PZ − AD. DP + AQ. PZ = BQ. PZ − AD. DP (vel ponendo DP − AV loco ipſius PZ) = BQ. DP − BQ. AV − AD. DP.

Hinc,

Hinc, ut ſaltem in tranſitu dicam, centrum gravitatis areæ log-micæ ultra ordinatam DP verſus Q in infinitum excurrentis intervallo ſubtangentis AQ diſtat à ſua prima ordinata DP.

Corollarium V.

595. Cum DT (§. 593.) ſit PZ. BΔ : PD, ſubſtituto invento valore ipſius BΔ, reperietur DT = (BQ. DP − AD. DP − BQ. AV) : PD = BQ − AD, − BQ. AV : DP. Adeoque ſolicitatio acceleratrix mobilis in cycloidis puncto D, hoc eſt, DN ſeu DB, − DT erit BD − BQ + AD, + BQ. AV : DP = AV. BQ : DP, − AQ.

Scholion II.

596. Supra jam indicavi (§. 588.) reſiſtentias in cycloide jam pridem definitas eſſe à Cel. Newtono Prop. XXIX. Lib. II. Princ. Phil. Nat. idque præſtitit per ſpatia hyperbolica, expreſſionibus à noſtris diverſiſſimis quoad apparentiam, ſed revera cum noſtris conſpirantibus; ſed, quia aſſertionis meæ veritas non ſtatim in oculos incurrit, conſenſum inter Newtonianam atque meam determinationem reſiſtentiarum, paucis oſtendere libet. In figura 136. afferam Newtoni ſchema ipſiusmet literis, aſt confuſionis vitandæ gratia minuſculis inſignitum, atque propria ejus verba nulla mutatione facta, niſi quod hoc loco, quæ cycloidem reſpiciunt, noſtræ figuræ 134. applicaturus ſim, quæ ille indicat circa figuram propoſ. XXV. citati libri.

„ 597. Sit ABC arcus oſcillatione integra deſcriptus, ſitque B Fig. 134.
„ infimum cycloidis punctum, & B*a* ſemiſſis arcus cycloidis totius,
„ longitudini penduli æqualis, & quæratur reſiſtentia corporis in
„ loco quovis D. Secetur recta infinita *oq*, in punctis *o*, *c*, *p*, *q*, Fig. 136.
„ ea lege, ut (ſi erigantur perpendicula *ok*, *ct*, *pi*, *qe*, centroque
„ *o*, & aſymptotis *ok*, *oq* deſcribatur hyperbola *tige* ſecans perpen-
„ dicula *ct*, *pi*, *qe* in *t*, *i* & *e*, & per punctum *i* agatur *kf* paral-
„ lela aſymptoto *oq* occurrens aſymptoto *ok* in *k*, & perpendiculis *ct*
„ & *qe* in *l* & *f*) fuerit area hyperbolica *pieq* ad aream hyperboli-
„ cam *pitc*, ut arcus AB, deſcenſu corporis deſcriptus, ad arcum BC
„ aſcenſu deſcriptum, & area *ief* ad aream *ilt* ut *oq* ad *oc*. Dein per-
„ pendiculo *mn* abſcindatur area hyperbolica *pinm*, quæ ſit ad aream
„ hyperbolicam *pieq*, ut arcus *a*B ad arcum AB deſcenſu deſcriptum.
„ Et ſi perpendiculo *rg* abſcindatur area hyperbolica *pigr*, quæ ſit

 „ ad

„ ad aream *pieq*, ut arcus quilibet BD ad arcum AB deſcenſu to-
„ to deſcriptum; erit reſiſtentia in loco D ad vim gravitatis, ut
„ area $\frac{or}{oq}$ *ief* — *igh* ad aream *pienm*. Hactenus Newtonus.

598. Conſulantur omnino tres figuræ 134, 135 & 136: &, quia (conſtr.) ſpatia hyperbolica *pinm*, *pieq*, *pigr* & *rgeq* arcubus cycloidis *a*B, AB, DB & AD proportionalia ſunt, & logarithmicæ ordinatæ DP, & AV abſciſſis hyperbolæ *oq* & *or* reſpective, adeo ut habeatur AV : DP = *or* : *oq*. & AB : AQ = *pieq* : *piko* & componendo BQ : AQ = *okieq* : *okip*, erit BQ — AD ut *okieq* — *rgeq* ſeu *okigr* & AV. BQ : DP ut $\frac{or}{oq}$ *okieq*, ergo BQ — AD — $\frac{AV.BQ}{DP}$ ut *okigr* — $\frac{or}{oq}$ *okieq*, atqui *okigr* = *orhk* — *igh*, & $\frac{or}{oq}$ *okieq* = (*oq*.*pi* — *ief*). $\frac{or}{oq}$ = *or*.*pi* — $\frac{or}{oq}$ *ief*, ergo *okigr*. — $\frac{or}{oq}$ *okieq* = *or*.*pi* — *igh* — *or*.*pi* + $\frac{or}{oq}$ *ief* = $\frac{or}{oq}$ *ief* — *igh*, atque adeo BQ — AD — $\frac{AV.BQ}{DP}$ eſt, ut $\frac{or}{oq}$ *ief* — *igh*, & BQ — AD — $\frac{AV.BQ}{DP}$ ad *β*B ſeu *a*B, id eſt, reſiſtentia aëris ad gravitatem ut $\frac{or}{oq}$ *ief* — *igh* ad aream *pienm*. Quod erat demonſtrandum.

Hoc ergo modo Newtoniana determinatio reducitur ad ſimpliciorem meris lineis à nobis exhibitam, & vice verſa noſtra facile reducitur ſub formam Newtonianæ; propterea etſi ambæ plurimum inter ſe differre prima fronte videntur, inter ſe jam egregie conſpirare apparent. Reſiſtentiæ aëris in cycloide, imò in qualibet data curva, aliter adhuc determinari poſſunt, vel potius celeritates acquiſitæ in quolibet curvæ puncto conceſſa quadratura cujusdam ſpatii curvilinei ope theorematis ſequentis.

PROPOSITIO LXXIV. Theorema.

Fig. 137. 599. *Inter aſymptotas* AZ, AF *angulum rectum continentes deſcribatur hyperbola quadratica* MO, *cujus ſcilicet quælibet ordinata* MK *ſit ut quadratum abſciſſæ* AK *inverſè*, *ordinataque* FO *gravitatem uniformem exponat*, *ductaque per* F *log-mica* FSQ, *cujus ſubtangens æquet rectam* AF, *atque in hac log-micâ ordinata* ID, *cujus abſciſſa* AD *æqualis ſit arcui curvæ* aB *deſcenſu mobilis deſcripto* AD; *agantur* IM *parallela* AD *&* MZ *parallela* AF, *atque in* MZ *productainfra axem* AT, *ca-*

capiatur ZN *æqualis* GF *in fig.* 134. *eruntque puncta* N *in linea quadam curva* YN. *Eſto porrò rec-lum ex ordinata* AF *aliaque* QR *in log-mica, æquale duplo areæ* AYNP, *& in medio* T *intervalli* AR *ordinatarum* AF *&* RQ, *ducta ordinata* TS, *atque ad diſtantiam* TX *æqualem* AD, *alia ordinata* XV; *hæc* XV *exponet celeritatem acquiſitam mobili in curvæ deſcenſus* ADB *puncto* D *poſt lapſum per ejus arcum* AD: Fig. 134.

Ductis ordinatis aliisve lineis, videlicet *pn*, *nm*, *mi*, *id*, *st*, *ux*, & *qr* lineis cognominis PN, NM, &c. parallelis & indefinite vicinis, item per puncta Q, V & S lineolis Q*e*, V*υ*, & S*σ* axi AR parallelis.

I. Conſtructio, quæ præbet 2.AYNP = AF. QR & 2.AY*np* = AF. *qr*, etiam efficiet 2NP. P*p* = AF. *qe* (§. 491. num. 11.) QR. R*r*.

II. Quia (conſtr:) AT = TR & A*t* = *tr*, erit R*r* = 2.T*t*, atque adeò ST. T*t* : QR. R*r* = ST : 2.QR (ſeu, propter continue proportionales AF, TS & RQ ob æqualia harum ordinatarum log-micæ intervalla AT & TR, erit etiam) = AF : 2.TS = AF. *sσ* : 2.ST. *sσ* = ST. T*t* : 2ST. *sσ*; ergo 2.ST. *σs* = QR. R*r* (num. 1. hujus) = 2.NP. P*p*, ergo etiam ST. *sσ* = NP. P*p*; vel P*p* : *sσ* = ST : NP.

III. Hyperbola verò MO præbet $AF^2 : AK^2$ (aut, quia ob æqualia intervalla AD & TX ordinatæ AF, ID, ſeu AK, ST ac VX per naturam log-micæ proportionales ſunt) $= ST^2 : VX^2$ (= MK : OF) = AF. MK : AF. OF, erit, permutando, ST^2 : AF. MK = VX^2 : AF. OF, ſed (num. 11. hujus) erat P*p* : *sσ* = ST : MK, vel NP; & log-mica exhibet *sσ* : T*t* = ST : AF, ergo ex æquo P*p* : T*t* = ST^2 : AF. MK = VX^2 : AF. OF, & VX^2. T*t* = AF. OF. P*p*.

IV. Cum (conſtr.) ſit AD = TX, & A*d* = *tx* = *t*T + TX − X*x*, erit D*d* = T*t* − X*x*, vel X*x* = T*t* − D*d*, id eſt, VX^2. X*x* = VX^2. T*t* − VX^2. D*d*; atqui, loco VX. X*x* ſubſtituendo (§. 491. num. 11.) æquale AF. *uυ*, locoque VX^2. T*t* (num. 111. hujus) æquale ſolidum AF. OF. P*p*, ac denique faciendo VX^2 = R. AF, fiet AF. VX. *uυ* = AF. OF. P*p* − AF. R. D*d*, vel, applicando omnia ad AF, reperietur VX. *uυ* = OF. P*p* − R. D*d* (ſeu ponendo T. D*d* æquale OF. P*p*) = VX. *uυ* = T. D*d* − R. D*d* = (T − R). D*d*. Jam, quoniam D*d* eſt elementum ſpatii AD, ſi T − R ſit ſolicitatio quæcunque acceleratrix, erit momentum hujus ſolicitationis æquale momento velocitatis acquiſitæ in curvæ puncto D, & cum idem ſolicitationis momentum repertum ſit æquale momento ordinatæ XV, ſequitur hanc ordinatam exponere celeritatem in D acquiſitam. Atqui, quoniam Fig. 134.

(ſe-

(ſecundùm hypotheſin) T. Dd = OF. Pp, atque OF gravitatem uniformem exponit, & OF. Pp (conſtr.) OF. Ff ſit momentum gravitatis centralis, cui momentum ejusdem tangentialis, ſeu rec-lum ex hac tangentiali & elemento curvæ Dd (§. 133.) æquatur, perinde ac T. Dd, liquet T eſſe ſolicitationem gravitatis tangentialem in curvæ puncto D, &, quia VX, ut jam oſtenſum, eſt celeritas acquiſita in D quæcunque ſit ſolicitatio acceleratrix T − R, atque AF. R = VX^2, id eſt, R ut VX^2; & cum reſiſtentia medii (ſecundùm hypotheſin) etiam ſit ut quadratum celeritatis acquiſitæ, magnitudo R exponet reſiſtentiam aëris in curvæ puncto D, atque adeò T − R detracta ſcilicet reſiſtentia aëris à ſolicitatione gravitatis tangentiali, exponit ſolicitationem acceleratricem mobili deſcendenti continue applicatam, cui vigore ejusmodi ſolicitationum acquiritur in D celeritas XV. Quod erat demonſtrandum.

600. Si grave in altera curvæ parte BEC, fig. 134. aſcendit; curva YN ſemper magis magisque ad AP accedit, ut ab eadem recedit in caſu deſcenſus, conſtructio vero eadem eſt utroque caſu, hac ſola cum differentia, quod in caſu deſcenſus hyperbolæ portio OM, quæ eſt ſubter ordinatam OF, in conſtructione illa adhiberi debet, & portio, quæ ſupra ordinatam OF, in caſu aſcenſus. Quonam vero artificio in præcedentes conſtructiones inciderim, ex demonſtrationis filo facile intelliget perſpicax Lector, propterea, ut brevitati conſulam, eidem explicando non diutius immorabor.

COROLLARIUM.

Fig. 134. 601. Si linea deſcenſus mobilis *a*DB eſt iterum cyclois, area AYNP in figura 137. erit quadrabilis ope logarithmorum; nam inſpiciendo utramque figuram 137, & 134. erit area AYNP = (AB. YZ + ½AF. YZ − AD. AZ). AF : 4*b*B. (conſtr.) = ½AF. QR (ſeu ex natura log-micæ) = ½ST^2. Verùm, quia, ob æqualia intervalla AD & TX, ordinatæ AF, DI vel AK, ST & VX proportiones ſunt, fit $AF^2 : AK^2$ vel (propter hyperbolam OM) = AZ : AY = $ST^2 : VX^2$ = (AB. YZ + ½AF. YZ − AD. AZ). AF : 2*b*B, ad VX^2, ſeu (conſtr.) AF. R. = (AB. YZ + ½AF. YZ − AD. AZ) : 2*b*B ad R; ſeu AB. YZ − ½AF. YZ − AD. AZ ad R. 2*b*B; atque adeò erit reſiſtentia medii, ſeu R = (AB. YZ − ½AF. YZ − AD. AZ). AY : 2*b*B. AZ. Quod præcedentibus determinationibus (§. §. 595, 596, & 597.) probe conſonum eſt.

CA-

CAPUT XX.

De motu projectorum in aëre, qui miſſili in duplicata ratione celeritatum reſiſtit, cum corpus à ſolicitationibus gravitatis non ad aliquod centrum poſitione datum, ut hactenus conſiderari ſolebant, tendentibus, urgetur, ſed ſecundum directiones lineam quamcunque curvam poſitione datam contingentes.

IN præcedenti Capite celeritates mobili in curva quacunque cadenti acquiſitas, vel aſcendenti reſiduas, aſſignavimus, cum ſcilicet à gravitate uniformi recta ad horizontem tendente urgetur in aëre ſecundum duplicatam proportionem celeritatum reſiſtente. In hoc verò Capite examinandi reſtant motus projectilium in ejusmodi aëre reſiſtente, ſed pro gravitate variante, tam ratione ipſarum gravitatis ſolicitationum, quam ratione directionum; quas directiones ad nullum determinatum punctum tendere, ſed quamcunque lineam curvam contingere ſupponemus. Ab omnibus, quotquot de viribus centralibus ſcripſerunt, geometris, harum virium centralium, vel ut nos eas vocare ſolemus, ſolicitationum gravitatis centralium meta vel centrum poſitione datum & immutabile, conſiderari conſuevit, veluti id nomen ipſum hisce viribus inditum ſatis ſuperque declarat. Nos verò rem generaliſſime pertractaturi, ſolicitationum illarum centrum in una eademque curva mutabile aſſumemus, ita quidem, ut mobile in ſingulis curvæ percurrendæ punctis ad aliud atque aliud centrum ſolicitationum urgeatur. Hoc modo centra omnia poſita erunt in quadam linea curva, quam ſolicitationum gravitatis directiones contingunt. Problema harum virium, pro centris, quæ dixi, variabilibus, prima fronte difficillimum, ſi non prorſus intractabile, videtur. Veruntamen, principiis in primo libro jam expoſitis inſiſtentes, ſolutionem non minus ſimplicem quam facilem trademus, ex qua deinceps omnia inſtar corollariorum deducentur, quæ ſolicitationes ad unicum tantum centrum directas reſpiciunt ſymptomata, aut ſaltem eorum præcipua.

602. Adeoque, ſi AM*m* ſit curva, quam projectile M data cum celeritate exiens ex puncto A ſecundum directionem tangentis AC Fig. 138.

 deſcri-

deſcribat in aëre ſecundum rationem duplicatam ipſi reſiſtente, cum ſcilicet directiones ſolicitationum gravitatis AB, MN, *mn*, ubique ad diverſa puncta ſeu centra B, N, *n* reſpiciunt, atque adeo curvam quamcunque BN*n* in præfatis punctis B, N, *n*, &c. contingunt. Solicitationem mobilis M ad punctum N directam deinceps repræſentabimus per MX, in ejus directione MN ſumptam, ductaque MR normali ad curvam AM in puncto M, & per X parallela XZ tangenti curvæ MP in dicto curvæ puncto, exponetque XZ (§. 118.) ſolicitationem gravitatis tangentialem in M.

603. Talis ſolicitationes gravitatis conſiderandi modus jam continet ſub ſe caſum, quo corpus M in curva AM incedens ad plura
Fig. 139. diverſa centra poſitione data ω, 2ω, 3ω, 4ω, &c. urgetur ſolicitationibus M*y*, M2*y*, M3*y*, M4*y*; &c. Nam exiſtente Ω centro gravitatis punctorum *y*, 2*y*, 3*y*, 4*y*, &c. quorum numerus ſit *n*, ſolicitatio ex omnibus lateralibus M*y*, M2*y*, &c. reſultans (§. 49.) erit $n.M\Omega$, cui æqualem faciamus MX. Hæc MX erit ſolicitatio gravitatis centralis, quâ mobile in puncto curvæ M afficietur, & centrum, ad quod hæc ſolicitatio MX dirigitur, erit punctum N, in quo media directio omnium M*y*, M2*y*, M3*y*, M4*y*, &c. curvam quandam N*n* (quam proinde curvam mediarum directionum nominare licet) contingit. Propterea, loco omnium illarum ſolicitationum lateralium M*y*, M2*y*, &c. unicam illarum mediam ſolicitationem $MX = n.M\Omega$ conſiderare convenit, ut adeò tota res reducatur ad caſum articuli præcedentis.

HYPOTHESIS.

604. In hiſce autem ſupponendum, reſiſtentiam aëris tantum exſeri in motum corporis M in curva AM incedentis, non verò in gravitatis impreſſiones juxta directiones MN.

PROPOSITIO LXXV. Lemma.

605. *Si in hyperbola* TKΘ *inter aſymptotas* SB, BΦ, *ductis ordinatis* IK, GH, AD *&* ST *ad aſymptotam* SB, *ad alteram verò* BΦ; *ordinatis* $\Delta\Pi$, $\Theta\Phi$, *&* WV; *quadrilineum* $\Theta\Phi$VW *æquaverit exceſſum, quo quadrilineum* $\Phi\Theta\Delta\Pi$ *ſuperat duo ſimul quadrilinea* GHKI *&* ADTS, *ratio* BV *ad* BΦ *componetur ex tribus rationibus* BΦ *ad* BΠ, IB *ad* GB, *&* AB *ad* BS. *Hoc eſt, erit* BV *ad* BΦ, *ut* BΦ.IB.AB, *ad ſolidum ex* BΠ.GB.BS.

Facta

Facta Bh tertia proportionali ad BΠ & BΦ, erectaque ordinata gh, ſit inſuper quadrilineum $g\sigma\theta h$ = GHIK, eritque WV$\theta\sigma$ = SADT. Nam, quia ΘΦVW = ΘΦΠΔ − GHIK − SADT (conſtr.) = ΘΦhg − $\theta\sigma gh$ − SADT = ΘΦ$\theta\sigma$ − SADT = ΘΦ$\theta\sigma$ − WV$\theta\sigma$, erit omninò WV$\theta\sigma$ = SADT.

Atqui ratio BV ad BΦ componitur ex rationibus BV ad Bθ, Bθ ad Bh, & Bh ad BΦ, (ſeu, quia propter quadrilinea æqualia WV$\theta\sigma$, SADT; BV eſt ad Bθ, ut BA ad BS; propter $\sigma\theta hg$ = GIKH habetur Bθ : Bh = BI : BG, ac denique propter ΘΦhg = ΘΦΠΔ, eſt Bh : BΦ = BΦ : BΠ) ex rationibus BA ad BS, BI ad BG & BΦ ad BΠ; atque adeò BV : BΦ = BΦ. BI. BA : BΠ. BG. BS. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

606. Sed, ſi quadrilineum ΘΦVW fuerit æquale ΘΦΠΔ − GHKI + ADTS, erit BV : BΦ = BΦ. BI. BS : BΠ. BG. BA. Demonſtratio eadem ferme eſt.

Propositio LXXVI. Problema.

607. *Si mobile in directione* AC *datâ cum celeritate ex puncto* A *exiens, & ſolicitationibus acceleratricibus* MX *ſecundum directiones* MN, *curvam quamcunque* BNn *contingentes, citatum, in aëre ſecundum rationem compoſitam ex rationibus denſitatum medii & duplicatæ velocitatum mobilis reſiſtente, curvam* AMm *deſcribat, definire proportionem celeritatis mobilis in quolibet curvæ puncto* M *acquiſitæ ad celeritatem initialem in* A, *ac proportionem ſolicitationum acceleratricium in iiſdem curvæ punctis* M *&* A.

I. Sunto Mm elementum curvæ AM, per cujus elementi terminos transeant tangentes MN, mn curvæ BNn ſeſe interſecantes in puncto o; MP & mp tangentes curvæ AMm in punctis M, m convenientes in c, ſuper quas tangentes demittantur ex punctis N, o & n normales NP, oa (tangentem interiorem cb ſecans in α) ob & np, ac denique MR, mR perpendiculares curvæ AM in punctis M & m, adeò ut, coeuntibus his punctis, hæ perpendiculares curvæ futuræ ſint radius circuli oſculatoris curvi in puncto M vel m, ſeu circuli æque curvi in his punctis. Sint porrò curvæ MF, $m\mu f$ evolutæ arcuum BN, BNn; rectæ verò BΦ & BV in linea indefinita

BQ ipſi BA normali abſciſſæ exponant velocitates mobilis in punctis A & M, & Vu elementum ipſius BV; extenſaque curva AM in rectam BQ, erectaque QY perpendiculari ad BQ, ac denſitati aëris in omni curvæ AM termino proportionali, orietur figura, vel potius curva βY, quam ſcalam denſitatum aëris deinceps vocabo. Denique aſſumtis D & R pro nominibus denſitatis & reſiſtentiæ aëris, ponatur ubique R ut $D . BV^2$, vel, ad complenda homogenea, adſcito $AB . AD$ rectangulo dato, ſit ubique $AB . AD . R = D . BV^2$. Ac fiant $BI = MN$, $Bi = mn$, $B\Phi = BC$, $B\Pi = NP$ & $B\pi = np$, ducanturque ordinatæ IK, ik, $\Phi\Theta$, $\Pi\Delta$ ac $\pi\delta$ in hyperbola intra aſymptotas AB, BQ per punctum D deſcripta. Hiſce omnibus præparatis ſequitur

II. *Analyſis Geometrica.* Cum (§. 602.) ZX ſolicitatio ſit tangentialis ex centrali MX derivata, erit (§. 481.) $ZX - R$ ſolicitatio acceleratrix mobilis in puncto M curvæ AM deſcenſu deſcriptæ, & $ZX + R$ reſiſtentia totalis mobilis ex puncto M ſuper curva MA aſcendentis: ſed ſepoſito tantiſper caſu aſcenſionis, examinabimus alterum, qui eſt deſcenſus: Erit igitur (§. 484.) momentum ſolicitationis acceleratricis $ZX - R$ æquale momento celeritatis creſcentis BV, id eſt $(ZX - R) . Mm = BV . Vu = ZX . Mm - R . Mm$, vel ducendo omnia in datum rec-lum BAD, habetur $BA . AD . ZX . Mm - AB . AD . R . Mm = AB . AD . BV . Vu$, & quia (ſecundum hypotheſin) $AB . AD . R = D . BV^2$, ac $BAD = BVW$, erit $AB . AD . ZX . Mm - D . BV^2 . Mm = BV^2 . WV . Vu$. Et, quia (§. 604.) aër gravitatis ſolicitationibus non reſiſtit, habetur (§. 154.) $BV^2 = MZ . MR$; idcirco, applicando æqualitatem præcedentem ad hanc poſtremam, proveniet $AB . AD . ZX . Mm : MZ . MR, - QY . Qq = VW . Vu$. Cum (num. 1. hujus) $QY = D$ & $Qq = Mm$.

III. At, quia triangula ſimilia Moa, BZX præbent $ZX : MZ = Ma : ao$, & ſectores ſimiles $ca\alpha$ ac RMm; $Mm : MR = a\alpha : ac$ (& quia, coeuntibus punctis M, m, ratio Ma ad ca in rationem æqualitatis deſinit) $= a\alpha : Ma$, erit ex æquo $ZX . Mm : MZ . RM = a\alpha : ao = a\alpha : PN$ (conſtr.) $= a\alpha : B\Pi$, ergo $AB . AD . ZX . Mm : MZ . MR = AB . AD . a\alpha : B\Pi$, hoc eſt (propter omnia rectangula in hyperbola æqualia) $= \Pi\Delta . a\alpha$.

IV. Ducantur porrò per punctum o lineola $o1$ parallela tangenti MP, & per punctum n lineolæ 34, $n2$ parallelæ reſpective tangentibus MP, mp, & coeuntibus punctis n, o, N, lineolæ evaneſcentes O2, 14 & N3 ac arculus Nn in rationes æqualitatis deſinent, per-

perinde ac $o\alpha$ & ob. Quo poſito, quia NP $-np$ (conſtr.) $=$ BΠ $-$ Bπ $=$ Ππ $=$ PN $- ao, + ao - \alpha o + bo$ (ſeu αo ipſi æqualis) $- pn =$ N1 $+$ $a\alpha +$ 14 (vel 02) $= a\alpha +$ N4, erit $a\alpha =$ Ππ $-$ N4, & ΠΔ. $a\alpha =$ ΠΔ. Ππ $-$ ΠΔ: N4.

Triangula verò ſimilia N43 & NPM, præbent N4 : NP $=$ N3 : NM $=$ Nn : NM $=$ Ii $-$ Ff : NM. Nam $mn + n$N $=$ MN $-$ Mμ $=$ BI $-$ Ff; ergo nN $=$ BI $-$ Bi $-$ Ff $=$ Ii $-$ Ff. Hinc, quia BI. IK $=$ BΠ.ΠΔ, erit BΠ.ΠΔ. N4 : BΠ, vel NP $=$ ΠΔ. N4 $=$ (BI. IK. Ii $-$ BI. IK. Ff) : BI, $=$ IK. Ii $-$ IK. Ff (ſeu ductis per ſingula hyperbolæ puncta K, k parallelis KE, ke rectæ AB, lineis FE, fe eidem AB normalibus, occurrentes in punctis E, e alicujus curvæ DE) $=$ IK. Ii $-$ FE. Ff, erit ΠΔ. $a\alpha$ ($=$ ΠΔ. Ππ $-$ ΠΔ. N4) $=$ ΠΔ. Ππ $-$ IK. Ii $+$ FE. Ff.

V. Hinc cum ſupra (num. II. hujus) reperta ſit VW. Vu $=$ AB. AD. ZX. Mm : MZ. MR $-$ QY. Qq (num. III. hujus) $=$ ΠΔ. $a\alpha$ $-$ QY. Qq; erit (num. IV.) WV. Vu $=$ ΠΔ. Ππ $-$ IK. Ii $+$ FE. Ff $-$ QY. Qq, & ſic ubique; ergo omnia WV. Vu $=$ omn. ΠΔ. Ππ $-$ omn. IK. Ii $+$ omn. FE. Ff $-$ omn. QY. Qq. Hoc eſt, ΘΦVW $=$ ΘΦΠΔ $-$ AIKD $+$ AFED $-$ BβYQ; nam, ſi punctum M eſt in A, omnes hæ areæ ſimul à nihilo incipient. Arëis AFED & BβYQ capiantur æqualia quadrilinea hyperbolica AGHD & ASTD, eritque ΘΦVW $=$ ΘΦΠΔ $-$ GIKH $-$ ASTD, ac per conſequens (§. 605.) BV : BΦ $=$ BΦ. BI. BA : BΠ. GB. SB (vel reſtitutis BC, MN, NP loco BΦ, BI, & BΠ) $=$ BC. MN. AB : NP. GB. SB. Jam, quia BC : AB $=$ ſinus anguli BAC : radium vel ſinum totum, & NP : MN $=$ ſNMP : rad., erit BV : BΦ, id eſt, celeritas mobilis in M ad celeritatem initialem in A, ſicut AB^2 in ſBAC ad GB. SB in ſNMP. Unde, ſi vA ſignificet velocitatem in A, erit BV, ſeu celeritas in M, quam etiam exprimam per vM $=$ AB^2. vA. ſBAC : GB. SB. ſNMP.

VI. Porrò, quia MX. MR : MZ. MR, ſeu MX : MZ $=$ rad. : ſMXZ vel ſNMP, & (§. 154.) MZ. MR $= v$M^2; erit ex æquo MX. MR : vM^2 $=$ rad. : ſNMP; atqui (num. V.) vM^2 : vA^2 $=$ AB^4. ſBAC^2 : GB^2. SB^2. ſNMP^2, & (ponendo AR & A pro radio oſculi, & ſolicitatione centrali initio motus in curvæ puncto A) vA^2 : A. AR $=$ ſBAC : rad. Ergo ex æquo & per compoſitionem rationum MX. MR : A. AR $=$ AB^4. $\overline{\text{ſBAC}}^3$: SB^2. GB^2. $\overline{\text{ſNMP}}^3$. Aſſumatur quædam magnitudo M, talis, ut M. MR ſit ad A. AR, ſicut AB^2. $\overline{\text{ſBAC}}^3$ ad GB^2. $\overline{\text{ſNMP}}^3$, ſeu M $=$ A. AR. AB^2. ſBAC^3 : MR. GB^2.

$GB^2.\int\overline{NMP^3}$, & reperietur $MX:M = AB^2:SB^2$, id eſt, ſolicitatio centralis in aëre reſiſtente eſt in quolibet curvæ puncto M, $= M.AB^2:SB^2$, cum ſcilicet mobile ex A profectum curvæ arcum AM deſcendendo, ſeu ad curvam *n*NB accedendo deſcribit.

VII. Sin verò aſcendat ſuper arcum MA ex M verſus A, id eſt à curva *n*NB recedendo, invenietur hoc caſu $\Theta\Phi VW = \Theta\Phi\Pi\Delta - GIKH + ASTD$, atque adeò, vi paragraphi 606, & eorum quæ in præcedentibus numeris hujus oſtenſa ſunt, $MX = M.SB^2:AB^2$. Quæ omnia erant invenienda.

608. Notandum autem literam $\int$ in hac propoſitione eſſe notam characteriſticam ſinuum illorum angulorum, quibus præfigitur, & $\int\overline{BAC^3}$, $\int\overline{NMP^3}$ ſignificare cubos ex ſinubus angulorum BAC, NMP, & reliqua ſigna, ſcilicet A, denotare ſolicitationem gravitatis centralem in curvæ puncto initiali A, & AR (quam in figura confuſionis vitandæ gratia non expreſſi) radium circuli oſculatoris, ſeu ejusdem curvitatis cum curva in eodem puncto A. Ratio verò SB ad AB, in qua SB ſemper major ponitur quam AB, eadem eſt cum ratione abſciſſarum alicujus quadrilinei hyperbolici ASTD (conſtr.) æqualis areæ BβYQ ſcalæ denſitatum aëris. Propterea termini ipſi rationis SB ad AB, ad nullam determinatam magnitudinem reſtricti ſunt, ſed, pro re nata, modò majores minoresve accipi poſſunt, dummodo ratio inter hos terminos ea maneat, quæ eſt inter abſciſſas cujuscunque trapezii hyperbolici prædictæ areæ in ſcala denſitatum aëris æqualis.

Corollarium I.

609. Adeoque in medio nullius denſitatis, id eſt, in vacuo evaneſcent areæ BβYQ vel ASTD, atque adeò ratio SB ad AB mutabitur in rationem æqualitatis, fietque $vM:vA = AB.\int BAC:GB.\int NMP$. Et MX ($= M.AB^2:SB^2$, vel $M.SB^2:AB^2$) $= M$. Idcirco M, cujus valor jam (§. 607. num. VI.) determinatus eſt, exponit generaliſſime ſolicitationem gravitatis centralem in vacuo.

Corollarium II.

Fig. 139. 610. Si mobile M ſolicitationibus quotcunque lateralibus, M*y*, M2*y*, M3*y*, M4*y*, &c. ad diverſa centra ω, 2ω, 3ω, 4ω, &c. ſimul agentibus urgetur; earum media directio MN, quæ (§. 603. & 49.) per

per centrum gravitatis Ω omnium punctorum y, $2y$, $3y$, $4y$, &c. transibit, continget aliquam curvam NN, quam proinde curvam mediarum directionum ſolicitationum lateralium vocare licet. Idcirco, quia (§. 603.) MX $= n$. MΩ (§. 607. num. VI. & VII.) $=$ M. AB²: SB² vel $=$ M. SB² : AB²; hoc in caſu aſcenſionis, illud verò in caſu deſcenſus mobilis in curva AM, erit MΩ : M $=$ AB² : n. SB² in primo caſu, qui eſt deſcenſus, vel MΩ : M $=$ SB² : n. AB². Adeoque circumſtantia problematis, ſolicitationum acceleratricium vel retardatricium ad plura diverſa centra ſimul agentium, continetur jam in problemate harum ſolicitationum, ſi earum meta ſeu centrum in quolibet mobili deſcribendæ curvæ puncto variabile eſt.

Corollarium III.

611. Quia (§. 607. num. I.) aſſumſimus AB. AD. R $=$ D. BV², & (§. 154.) BV² $=$ MZ. MR, erit R : MZ $=$ D. MR : AB. AD. Atqui MZ : MX $=$ NP : NM $= ſ$NMP : rad. ergo ex æquo reſiſt. R, ad ſolicit. centr. MX $=$ D. MR. $ſ$NMP : AB. AD. radium.

Item quia MX : ZX $=$ MN : MP $=$ rad. : $ſ$MNP, erit iterum ex æquo reſiſtentia R ad ſolicitat. gravitatis tangentialem ZX $=$ D. MR. $ſ$NMP : AB. AD. $ſ$MNP $=$ D. MR. tang. NMP : AB. AD. radium.

Corollarium IV.

612. Si ſolicitationes gravitatis MX diriguntur ad centrum poſitione datum B, qui eſt caſus harum ſolicitationum ſeu virium centripetarum, qualis hactenus geometris conſiderari conſuevit, tota curva NB contrahetur in punctum B, ejusque evolutæ MF, $m\mu f$ abibunt in arcus circulares concentricos ex centro B deſcriptos, propterea ſingulæ NM, BI & BF, immò & GB, æquales fient, coincidente tunc curva DE reſpectivo arcui hyperbolico DK. Adeoque formula numeri VI. §. 607. etiam mutabitur in M $=$ A. AR. AB². $\sqrt{\text{BAC}^3}$: MR. MN². $\sqrt{\text{NMP}^3}$ $=$ A. AR. BC³. MN : AB. MR. NP³ $=$ BC². vA². MN : MR. NP³, quia quadratum velocitatis in A, ſeu vA² $=$ A. BC. AR : AB. Hæc poſtrema formula pro ſolicitationibus centralibus in vacuo, & uno duntaxat exiſtente centro ſolicitationum, egregie conſpirat cum eâ, quam ſupra (§. 156.) jam demonſtratam dedi, ſimulque retuli citato loco Clariſſimos Geometras Joh. Bernoullium, Abr. Moyvræum, & Guid. Grandum in ſimilem canonem incidiſſe, Fig. 138. & 140.

ſed

ſed alia via. In figura enim 37., lineæ $N\alpha$, AI, DR, DN, nZ, Dq, idem ſignificant ac in figura 138. litteræ A, vA, & lineæ reſpectivæ BC, NM, MR & NP.

SCHOLION I.

Fig. 140. 613. Sit nunc curva AM ſpiralis logarithmica, in qua ſolicitationes gravitatis MX ad polum B dirigantur, ita ut puncta N, B unum idemque ſint, unde, quia ſinguli anguli BAC, NMP, æquales ſunt, ratio linearum MP, MN & NP ubique data erit. Ponatur denſitas aëris in M, ut $h.MP:MN^2$, ubi h quemlibet numerum ſignificat, adeòque erit, propter rationem datam, MP ad MN reciproce, ut MN, diſtantia mobilis à centro N vel B; poſitâ itaque $D=h.AB.AD.MP:MN^2$, invenietur $D.Mm=QY.Qq=ST.Ss=h.IK.Ii$, & conſequenter $ASTD=h.AIKD$, ac propterea $AB:SB=BI^h:AB^h=MN^h:AB^h$, & $AB^2:SB^2=MN^2:AB^{2h}$.

Porrò, quia ſinguli anguli BAC, NMP, &c. & per conſequens eorum ſinus, æquales ſunt, & radii oſculi AR, MR in A, M diſtantiis AB, MN proportionales, erit nunc (§. 612.) $M:A(=AR.AB^2.\int\overline{BAC^3}:MR.MN^2.\int\overline{NMP^3})=AB^3:MN^3$. Atqui (§.607. num. VI.) erat $MX:M(=AB^2:BS^2)=MN^{2h}:AB^{2h}$; ergo ex æquo $MX:A=MN^{2h-3}:AB^{2h-3}$. Eſt propterea vis centripeta, id eſt, ſolicitatio centralis MX in logarithmica ſpirali ubique, ut MN^{2h-3}. ſi corpus deſcendendo arcum AM deſcribit; & reciproce, ut MN^{2h+3} ſi aſcendendo incedit per M verſus A ſuper arcum MA.

Hinc, quia generaliter eſt (§. 611.) $R:MX=D.MR.\int NMP:AB.AD.\,\text{rad.}$ & D (ſecundùm hypotheſin) $=h.AB.AD.MP:MN^2$; erit $R:MX=h.MR.MP.\int NMP:MN^2.\,\text{rad.}$ (vel, quia NP eſt ad NM, ut $\int NMP:\text{rad.}$ & rec-lum NP. MR æquale MN^2) $=h.MP:MN$, id eſt, ratio R ad MX erit ubique conſtans ſeu data.

Ergo, ſi $h=\frac{1}{2}$, erit MX reciproce in duplicata ratione diſtantiæ MN, & reſiſtentia R ad ſolicitationem centralem MX, ſicut $\frac{1}{2}$MP ad MN.

Sin verò h fuerit $=1-\frac{1}{2}n$, reperietur MX reciproce, ut MN^{n+1}; & $R:MX=(1-\frac{1}{2}n).MP:MN$.

C o-

Corollarium V.

614. Si ſolicitationes centrales diriguntur ad centrum infinite diſtans, ut in fig. 141. ita ut directiones AB, MN parallelæ, axique EF curvæ EMA perpendiculares ſint, rectæ MN, AB hoc caſu infinitæ atque adeò æquales erunt, eliſis ergo AB^2, MN^2 ex canone paragraphi 612. habebitur $M : A = AR.\int\overline{BAC}^3 : MR.\int\overline{NMP}^3$, vel $M = A.\,AR.\int\overline{BAC}^3 : MR.\int\overline{NMP}^3$. Fig. 141.

Sed ſi directiones ſolicitationum MX axi EF æquidiſtantes ſunt, reperietur eo caſu $M : A = AR.\int\overline{DAa}^3 : MR.\int\overline{QMO}^3$; ducta ſcilicet MO parallela EF.

Et quia (§. 607. num. VI.) generaliter inveniebatur $MX : M = AB^2 : SB^2$ in caſu deſcenſus vel $MX : M = SB^2 : AB^2$ in caſu aſcenſus mobilis, habebuntur ipſæ MX utroque caſu hujus corollarii, ſcilicet cum earum directiones axi EF normales, & cum eidem parallelæ ſunt.

Corollarium VI.

615. Iisdem poſitis, & gravitate uniformi, facili negotio invenietur ſecundùm quam legem denſitatem aëris variare oporteat, ut projectile datam curvam in medio reſiſtente deſcribat. Sit enim A gravitas uniformis in aëre reſiſtente, atque inter aſymptotas AF, Ff deſcripta hyperbola TDL quacunque, fiat ubique SF^2 ad AF^2 ut $AR.\int\overline{FAC}^3 : MR.\int\overline{NMP}^3$, in caſu deſcenſus, vel $AF^2 : SF^2 = AR.\int\overline{FAC}^3 : MR.\int\overline{NMP}^3$, eritque ubique $D = \pm ST.\,Ss : Mm$. ubi ſignum + eſt pro deſcenſu & — pro aſcenſione. Demonſtratio hujus ex præcedenti corollario facilis eſt. Fig. 142.

Scholium II.

616. Sit AME quadrans circuli cujus centrum in F vel H, adeoque $AR = MR = MF$, & $AR.\int\overline{FAC}^3 : MR.\int\overline{NMP}^3 = AF^3 : MG^3$. Ergo $AF^2 : SF^2 = AF^3 : MG^3$, & per conſequens $2.ASTD = 3.AOLD$, vel $2.ST.\,Ss = 3.OL.\,Oo$, & $D\,(= ST.\,Ss : Mm) = 3OL.\,Oo : 2Mm$, vel (propter triangulorum $Mm\mu$ & MHG ſimilitudinem) $= 3OL.\,GH : 2AF = 3OL.\,OF.\,GH : 2.OF.\,AF = 3AF.\,AD.\,GH : 2OF.\,AF = 3AD.\,GH : 2OF = 3AD.$ tang. $AFM : 2$ rad. Eſt ergo den-

denſitas in M, ut tangens anguli AFM. Vel etiam D = 3AD. rad. : 2. tang. MFE, vel NMP = 3. AF. AD. rad. : 2. AF. tang. NMP.

Eſt verò R : ZX (§. 611.) = D. MR. tang. NMP : AB. AD. rad. (vel hoc loco, ubi AF aſſumenda loco AB in fig. 138.) = D. AF. tang. NMP : AF. AD. rad. (ſeu ſubſtituto valore ipſius D) = 3AF. tang. NMP : 2AF. tang. NMP = 3 : 2. Propterea etiam R : MX = $3\int$MFA : 2 rad. = 3. GH : 2. MF. Quæ omnia inventis Bernoullianis (Act. Lipſ. 1713. menſ. Febr. pag. 93.) & partim Newtonianis conformia ſunt, etſi ex alio fundamento deducta. Loquor de caſu deſcenſus, quandoquidem caſus aſcenſus in circulo impoſſibilis eſt, ut eleganter ab Illuſt. Newtono animadverſum; etenim foret hoc caſu reſiſtentia ad gravitatem, ut − 3GH ad 2MF, id eſt, ut magnitudo privativa ad poſitivam.

Corollarium VII.

617. Corollarium VI. nobis etiam præbet fundamentum inveniendi conſtructionem curvæ projectilium in aëre uniformis denſitatis, ſed reſiſtentis in duplicata ratione celeritatum mobilis, poſita ſcilicet, ut ibi, gravitate etiam uniformi & directiones ejus ſupponendo parallelas. Nam facta quadam $Q = \int - 2dm\sqrt{(1 + mm)} : m^3$, erit $y = AF + \int dm : m^3 Q$, & $FG = x = \int dm : mmQ$.

Scholion III.

618. Problema, quod in particulari tantum hypotheſi reſiſtentiarum aëris ſecundùm compoſitam rationem denſitatum & duplicatæ velocitatis, ſolutum exhibuimus, generalius perfici poterat pro compoſita ratione reſiſtentiarum ex ratione denſitatum & quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata celeritatum mobilis, idque tam levi opera, poſita præcedenti problematis analyſi geometrica, ut nulla mutatio in ea facienda ſit, præterquam in ſola curva Bβ, quæ in hypotheſi generaliori non amplius eſt ſcala denſitatum aëris, ſed curva alterius generis, quod paucis eſt oſtendendum.

Fig. 138. 619. Eſto curva βY ejus naturæ, ut exiſtente ejus abſciſſa BQ æquali ubique arcui curvæ AM, ordinata ejus QY ſit ad R reſiſtentiam aëris in curvæ puncto M, ſicut rectangulum datum AB. AD ad BV^2 quadratum velocitatis acquiſitæ in M, & hæc curva Bβ generaliter uſurpanda eſt loco ſcalæ denſitatum aëris antea in analyſi pro-

problematis adhibita, & reliqua ſunt abſolvenda prorſus ut in §. 607, ſcilicet areæ $B\beta YQ$ novæ curvæ βY æquale faciendum quadrilineum hyperbolicum $ASTD$; eritque etiam nunc celeritas acquiſita in M, ſeu $vM = AB^2 . vA.$ ſin. $BAC : GB. SB. \int NMP$, prorſus ut ſupra (§. 607. num. v.) reperiebatur, hoc ſolo cum diſcrimine quod SB nunc alius magnitudinis quam citato loco futura ſit, quæ adhuc quæratur. Ad abbreviandum aſſumatur $V = AB. vA.$ ſin. $BAC : GB.$ ſin. NMP, eritque V velocitas, quam mobile in vacuo acquiſiviſſet ex deſcenſu ſuper arcu curvæ AM in ejus extremitate M, & vM vel $BV = AB. V : SB.$ in caſu deſcenſus, vel $BV = SB. V : AB$ in caſu aſcenſionis.

620. Jam, quia (conſtr.) $B\beta YQ = ASTD$, & $B\beta yq = AstD$, erit $QY. Qq = ST. Ss$, ſed $QY = AB. AD. R : BV^2$ (vel ſubrogando valorem $AB. V : SB$, ipſius BV) $= AD. R. SB^2 : AB. V^2$, & $Qq = Mm$, erit $AD. R. SB^2. Mm : AB. V^2 = ST. Ss$, vel omnia ducendo in SB, $AD. R. SB^3. Mm : AB. V^2 = SB. ST. Ss = AB. AD. Ss$, atque adeo hinc elicietur $R. Mm : V^2 = AB^2. Ss : SB^3$. Adeoque omnia ($R. Mm : V^2$) = omnibus ($AB^3. Ss : SB^3$) id eſt $= (SB^2 - AB^2) : 2SB^2$, adeoque deſignando omnia ($R. Mm : V^2$) per $\int R. Mm : V^2$, erit $2\int R. Mm : V^2 = (SB^2 - AB^2) : SB^2$. Hinc $SB^2 : AB^2 = 1 : 1 - 2\int R. Mm : V^2$; pro caſu deſcenſus.

621. Pro caſu aſcenſionis loco ipſius BV (§. 619.) ſubſtituere oportet $SB. V : AB$ in QY, quæ pro utroque caſu eſt $= AB. AD. R : BV^2$, fietque $QY. Qq = AB^3. AD. R. Mm : SB^2. V^2 = ST. Ss$, vel ducendo iterum ſingula in SB; $AB^3. AD. R. Mm : SB. V^2 = SB. ST. Ss = AB. BD. Ss$, hinc dividendo per $AB. AD$, invenietur $AB^2. R. Mm \cdot V^2 = SB. Ss$. Propterea omnia $AB^2. R. Mm : V^2 =$ omnibus $SB. Ss = \frac{1}{2}SB^2 - \frac{1}{2}AB^2$, ergo $2AB^2. \int R. Mm : V^2, = SB^2 - AB^2$. Atque adeò $SB^2 : AB^2 = 1 + 2\int R. Mm : V^2$. In caſu aſcenſionis.

Hi ſunt duo generales canones pro quacunque reſiſtentiæ ſpecie, ſive hæc reſiſtentia pendeat à velocitatibus & denſitate aëris, ſive non.

622. Sed, ſi reſiſtentia ſit in compoſita ratione ex denſitate aëris & quacunque multiplicata ratione celeritatis, id eſt, ſi R ſit ut $D. BV^h$, ubi h eſt numerus quilibet pro libitu aſſumptus. Vel, ad ſupplenda homogenea, ſit $R = D. BV^h : AB^h$. Jam, quia (§. 620.) $AB^2 : SB^2 = 1 - 2\int R. Mm : V^2$, pro caſu deſcenſus erit, ſumtis utrinque quantitatum elementis $-2AB^2. Ss : SB^3 = 2R. Mm : V^2$, vel (ſubſtituto valore ipſius R & diviſa æqualitate per -2) proveniet $AB^2.$

 Ss:

$Ss : SB^3 = V^{h-2} D. Mm : SB^h$, atque adeò $SB^{h-3}. Ss = V^{h-2} D. Mm : AB^2$. Ergo omnia $V^{h-2} D. Mm : AB^2$, id eſt, $\int V^{h-2} D. Mm : AB^2, =$ omnibus $SB^{h-3}. Ss$, id eſt, $= \frac{1}{h-2} SB^{h-2} - \frac{1}{h-2} AB^{h-2}$; atque adeò hinc elicitur canon $SB = \sqrt[h-2]{(AB^{h-2}, + \overline{h-2} \int V^{h-2} D. Mm : AB^2)}$. Pro deſcenſu corporis in curva AM. Simili modo reperietur $SB = AB^2 : \sqrt[h-2]{(AB^{h-2}, + \overline{2-h} \int V^{h-2} D. Mm : AB^2)}$ pro caſu aſcenſionis, cum mobile incedit ex M verſus A.

623. Ut ergo, quæ in ſolutione hujus problematis ſparſim inventa ſunt, omnia conjunctim in conſpectum producantur, num. v. §. 607, præbet velocitatem in $M = AB. V : SB$ & $SB. V : AB$, hoc in caſu aſcenſionis illud in deſcenſu mobilis, ubi V eſt (§. 619.) $AB. vA. \int BAC$ applicatum ad $GB. \int NMP$, hoc eſt, expreſſio celeritatis mobilis ad punctum curvæ M delati in vacuo. Propterea eſt celeritas in aëre mobili acquiſita in quolibet curvæ puncto M ad celeritatem ejusdem in vacuo in eodem curvæ puncto, ut AB ad SB; & celeritas mobili reſidua in M à medio reſiſtente ad celeritatem in vacuo, ut SB ad AB, cum in curva aſcendit. Et num. vi. §. 607. Eſt ſolicitatio centralis in aëre ad ſolicitationem gravitatis in vacuo mobili verſante in utroque caſu in quocunque curvæ puncto M, ut AB^2 ad SB^2, cum mobile curvam AM deſcendendo deſcribit, vel, ſicut SB^2 ad AB^2, ſi aſcendendo, eundo per M verſus A. Ipſæ vero V & M, ſcilicet velocitas in vacuo & ſolicitatio centralis reſpectu curvæ puncti M, generaliſſime jam repertæ ſunt, ſcilicet ut paulo ante $V = AB. vA. \int BAC : GB. \int NMP$, & $M = A. AR. AB^2. \int \overline{BAC}^3 : MR. GB^2. \int \overline{NMP}^3$, in qua formula GB, conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, ſemper dantur. Ipſæ vero SB in paragraphis 620, 621 & 622. etiam generaliter exhibitæ ſunt. Ex ſolutione noſtra generaliſſima innumera alia corollaria potuiſſent deduci, quæ tamen brevitatis ſtudio ſuppreſſi.

CAPUT XXI.

De Motu Navium vento impulſarum.

MOtus Navium, hoc eſt eorum celeritates, ſpatia percurſa & tempora lationis, eadem methodo & ex iisdem principiis deduci

duci poſſunt, quibus in præcedentibus capitibus motus corporum in mediis reſiſtentibus definivimus. Eſt enim venti velo allabentis virtus ſpectanda inſtar ſolicitationis acceleratricis navi continue applicatæ, & aquæ, in quibus navis incedit, inſtar medii reſiſtentis. Verumtamen motus navium nonnihil difficilius aſſignantur quam in præcedentibus motus corporum in medio reſiſtenti incedentium, quia præter motus abſolutos etiam directiones, tum ſolicitationum acceleratricium, ſeu lineæ, ſecundùm quas vela impreſſiones venti excipiunt, tum etiam itinera navis permanentia, quæ à figuris navium pendent, primùm determinanda ſunt. Quæ tamen omnia, ut dictum, ex principiis hactenus à nobis explicatis derivari queunt.

DEFINITIONES.

I. Iter navis manens A*a* (Gallis *la Route du Vaiſſeau*) dicatur linea, quam navis BC vento impulſa in mari permanenter deſcribit, absque rotationibus circa ſe ipſam. Fig. 142.

II. Axis navis eſto ſpina carinæ BAC cui inſeritur ſtereobates mali principis (Gallis *la Quille*).

III. Deviatio navis (Gallis *la Derive*) eſt recta *a*K, ex quolibet itineris manentis puncto *a* ad axem navis productum CK perpendiculariter demiſſa.

IV. Angulus deviationis (*l'Angle de la Derive*) eſt angulus *a*AK, quem iter navis permanens A*a* cum axe navis CB continet verſus K.

PROPOSITIO LXXVII. Theorema.

624. *Si navis* ABC *itinere permanenti* Aa *feratur, media directio* AG *impreſſionum venti in velo* DAE, *vel in velis, ſi plura adſint, in directum poſita erit cum directione* AO *aquæ reſiſtentis, & ſecundùm directiones lineæ* Aa *parallelas lateri navis* BDC *clavoque in* C *allabentis.* Fig. 142.

Si negas, ſit media directio impreſſionis venti ſecundum mediam directionem velariæ DAE recta AF diverſa à linea AM, quæ eſt prolongatio mediæ directionis AO aquæ, navi BDC impingentis dum incedit itinere A*a*. Exponat AF impreſſionem venti in hac linea, & AH reſiſtentiam aquæ in directione AO, & demittatur ad OA protractam in M, perpendicularis FG, & in AG ſumatur GI = AH. Quibus poſitis, quia viribus AF æquipollent laterales AG & GF,

& à vi AG auferenda eſt vis aquæ reſiſtentis AH (conſtr.) GI, venti efficacia ad navim movendam æquipollebit duabus viribus reſiduis AI & FG; unde, quia FG nulla contraria vi retunditur, ideo ſuum effectum edet, propterea vi FG, juxta alteram AI, quæ motum navis accelerat, navis circa ſe ipſam convertetur ſecundum ordinem literarum K, F, G, dum ea progreſſivo motu fertur in recta A*a*, ergo hæc linea non eſt iter navis manens, contra hypotheſin.

Corollarium.

625. Adeoque ex media directione impreſſionum venti in velis innoteſcere poteſt media directio aquæ navi reſiſtentis, & vice verſa. Et ex aquæ reſiſtentis media directione ope Propoſ. L. Lib. hujus ſecundi, invenietur iter navis permanens. Mediæ vero directiones venti vela inflantis obtineri poſſunt eo fere modo, quo §. 474. oſtenſum eſt.

Propositio LXXVIII. Problema.

Fig. 142. 626. *Datis directione & celeritate venti velo* DAE *impingentis, atque adeò media directione veli* AM, *definire celeritates navis* BDC *itinere permanente* Aa *in aqua ſtagnante ſeu mari latæ.*

I. Quia (ſecundùm hypotheſin) AM eſt media directio venti velo DAE impingentis, ejus prolongatio AO (§. 624.) dabit mediam directionem aquæ in directione *a*A, vel huic parallela navi BDC allabentis, adeo ut, durante motu navis, angulus MA*a* conſtanter idem maneat.

Sint ergo ratio A*a* : AM, ſeu ſinus compl. anguli MAK ad ſin. compl. ang. *a*AK, ut *b* ad *a*; & celeritas venti, juxta mediam directionem AM initio motus, *a*, celeritas verò navis in termino *a* cujusvis ſpatii emenſi A*a*, *u*; adeoque $au:b$ exponet celeritatem juxta AM, qua ſcilicet navis inſequentis venti velocitati initiali ſeſe ſubducit, ut adeò celeritas, quâcum in velum agit, juxta AM eo momento, quo navis in ſuo itinere velocitatem *u*, acquiſivit, futura ſit $a - , au:b$; adeoque $(a, -au:b)^2$. M exponet impreſſionem venti in velo ſecundum AM, ubi M inveniri poteſt ope §. 474. Aquæ verò reſiſtentis impreſſio, ſecundum directionem AO, eſt Nuu, ubi N per Propoſ. L. etiam inveniri poteſt, ſi non algebraïcè

ſal-

ſaltem tranſcendenter & per approximationes. Propterea eſt $(a, -au:b)^2.M - N.uu$ ſolicitatio acceleratrix navis.

II. Eſto porrò $(a, -au:b)^2.M, - N.uu = N.SL^2$, ubi SL eſt ordinata alicujus curvæ CLP ſequenti modo inveniendæ, exiſtentibus AM, b; MS, u, Mn ipſi AM perpendiculariter inſiſtens, a. His poſitis, & quia $a, -au:b = (b-u).a:b = AS.Mn : AM$ erit $(a, -au:b)^2.M = AS^2.Mn^2.M : AM^2 = AS^2.MN^2.N : AM^2 = N.ST^2$, ſcilicet ſi MN fuerit ad Mn in ſubduplicata ratione M ad N, atque ducta ſit AN, ita ut triangula AST & AMN ſimilia exiſtant. Hinc, $(a, -au:b)^2.M - Nuu = N.ST^2 - N.SM^2 =$ (ſecundùm hypotheſin) $N.SL^2$, atque adeò $ST^2 - SM^2 = SL^2$. Ducatur MD angulum rectum AMN biſecans, & ex D demittatur DC normalis ad AM, & ob angulum ſemirectum CMD erunt æquales DC & CM, perinde ac SM & SV; propterea habetur $SL^2 = ST^2 - SM^2 = ST^2 - SV^2$. Atqui diviſa qualibet intercepta TV bifariam in R ductaque DR, eaque producta uſque ad occurſum B cum recta AM producta itidem quantum opus eſt, & hæc DR etiam per medium O ipſius MN tranſibit; ac $ST^2 - SV^2$ erit $= 4SR.VR$. Ergo etiam $SL^2 = 4SR.RV$. Verùm propter $SR:MO = SB:MB$, & $RV:OM = CS:CM$ erit per compoſitionem rationum $SR.RV:MO^2 = 4SR.RV$, id eſt, $SL^2:NM^2 = SB.SC:MB.MC = SX^2:MQ^2$, deſcripto ſcilicet ſuper diametro CB ſemicirculo CQB; habemus ergo $SL^2:NM^2 = SX^2:MQ^2$; vel permutando $SL^2:SX^2 = NM^2:MQ^2$, ſeu $SL:SX = NM:MQ$; idcirco ordinatæ quæque homologæ curvæ quæſitæ & ſemicirculi ſunt in data ratione, atque adeò curva CLP eſt ellipſis, cujus ordinata MP æquatur MN. Fig. 143.

III. Sint nunc Aa ſpatium certo tempore navi percurrendum, aa elementum illius ſpatii & $MS = u$ celeritas navi acquiſita in termino ſpatii Aa, Ss velocitatis elementum, & quia (num. 1. hujus) invenimus ſolicitationem acceleratricem navis eſſe, ut $N.SL^2$, ponamus eam $= N.SL^2:N.D$, vel $= SL^2:D$, ubi D, ſeu data magnitudo, aſſumitur ad ſupplenda homogenea, eritque (§. 484.) momentum ſolicitationis acceleratricis ſeu rec-lum $SL^2.aa:D$, ex hac ſolicitatione $SL^2:D$ in elementum ſpatii aa, æquale momento celeritatis acquiſitæ MS. Ss ſeu rec-lo ex hac celeritate MS in ſuum elementum Ss. Hinc, cum ſit $SL^2.aa:D = MS.Ss$ vel $SL^2.aa = D.MS.Ss$, erit $MS.Ss:SL^2 = aa:D$. Eſt verò etiam $SL^2:SX^2 = MP^2$ vel $NM^2:MQ^2$, ergò ex æquo $MS.Ss:SX^2 = NM^2.aa:D.MQ^2$;

Et

Et, ſi AK fiat ubique ad Aa, ut MN^2 ad D. MQ, erit $Kk : a\alpha = NM^2 : D. MQ$, & $NM^2 : a\alpha = D. MQ. Kk$, atque $MS. Ss : SX^2 (= NM^2. a\alpha : D. MQ^2) = D. MQ. Kk : D. MQ^2 = Kk : MQ$. Et, ſi denique SX ponatur media proportionalis inter MQ & quandam Z, ita ut Z futura ſit $= SX^2 : MQ$, fiet $MS. Ss : Z. MQ$ (ſeu SX^2) $= Kk : MQ$; atque adeò $Z. Kk = MS. Ss$, & problema præciſe ad caſum propoſitionis LXVII. hujus ſecundi Libri reductum eſt, quandoquidem Z eſt, ut quadratum ordinatæ SX in circulo, & jam AK conſideranda inſtar ſpatii mobili transmittendi. Propterea, ſi juxta præceptum citatæ propoſitionis rectæ $C\beta$ & $C\delta$ ſint tangentes angulorum $CZ\beta$, $CZ\delta$ dimidiorum ipſorum CZX & CZQ, erit (§. 549) $AK = \log. (MQ : SX) - MZ. \log. (C\delta : C\beta) : CZ$. Et, quia (conſtr.) $AK : Aa = MN^2 : D. MQ$, invenietur $Aa = D. MQ. \log. (MQ : SX) : MN^2 - D. MQ. MZ. \log. (C\delta : C\beta) : CZ. MN^2$, in logarithmica, cujus ſubtangens eſt MQ.

Per ſecundam partem propoſitionis ejusdem (§. 549.) erit tempus per ſpatium $AK = \log. (C\delta : C\beta) : CZ$; atqui $tAK : tAa = AK : Aa = MN^2 : D. MQ$, ergo tempus per ſpatium Aa navi transmiſſum erit $D. MQ. \log. (C\delta : C\beta) : CZ. MN^2$. Quæ erant invenienda.

Corollarium I.

627. Quia ſolicitatio acceleratrix navis eſt ubique ut SL^2, & quia SL in puncto C nulla eſt, ipſa MC deſignabit maximam velocitatem, quam navis acquirere queat. Eſt vero propter triangula ſimilia ACD & AMN & propter $CD = CM$; $AC : CM$ (vel DC) $= AM : MN = AM\surd N : MN\surd N$ (aut, quia $nM : NM$ (conſtr.) $= \surd N : \surd M$ atque adeo rec-lum $NM. \surd N$ æquale $nM\surd M$) $= AM\surd N : nM\surd M$, adeoque componendo $AM : CM = AM\surd N + nM\surd M : nM\surd M$, id eſt, $b : CM = b\surd N + a\surd M : a\surd M$, atque adeò $MC = ab\surd M : a\surd M + b\surd N$. Nam (conſtr.) eſt $AM = a$, & $nM = b$.

Corollarium II.

628. Si D eſt finitæ magnitudinis, tempus, quo navi maxima celeritas MC acquiritur, erit infinitum, perinde ac ſpatium Aa hoc tempore percurrendum, ut id jam alibi (§. 550.) quadantenus eſt oſtenſum.

Sed ſi D eſt indefinite parva, cum ſpatium tum etiam tempus, quo

quo id mobile tranſmittens celeritatem maximam MC acquirit, erunt finitæ magnitudinis.

Scholion.

629. Quoniam navi plerunque tempore finito maxima celeritas acquiritur, ideo in hiſce caſibus magnitudo D, ad ſupplenda homogenea aſſumta, ſemper erit indefinite parva; ſed hoc non obſtante proportiones inter ſpatia tranſmiſſa & inter tempora per logarithmos ſemper exhiberi poſſunt.

SECTIO V. ET ULTIMA,

Continens Miſcellanea de motu circulari fluidorum, de motu aëris in producendo ſono, & de motu interno fluidorum.

CAPUT XXII.

De motu circulari fluidorum.

POſteaquam præcipua capita ad motum fluidorum rectilineum attigimus, contemplandus ſupereſt motus circularis eorundem fluidorum, idque tanto magis quanto majori cum cura nonnulli ex præſtantiſſimis philoſophis Geometris difficiliora naturæ phænomena inde derivare conati ſunt.

PROPOSITIO LXXIX. Theorema.

630. *Si globus Terraqueus æquabili motu circa axem ſuum converſus materia fluida in tota ſua ſuperficie circundatus eſſet; fluidi vel potius totius globi aquei ſuperficies ſphærica manere non poſſet, ſed figuram indueret ſphæroïdis cujusdam, cujus axis minor futurus eſſet diametro æquatoris.*

Sit PE*p*A globus fluidus revolvendus circa axem P*p*, cujus poli Fig. 144. ſint P, *p*, & recta AE axi P*p* normalis per centrum C tranſiens diameter æquatoris. Probari debet fore, ut manens corporis fluidi & circa P*p* in gyrum acti ſuperficies ſit ſphæroidea, cujus P*p* axis minor ſit diametro æquatoris AE.

 De-

Demonſtr. Ex centro corporis fluidi C exeant tubi CP, CE & CD ad centrum C inter ſe communicantes & pleni liquoris ſeu fluidi, quorum primus PC axi P*p* congruat, & CE eidem axi perpendicularis ſit, tertius verò CD ad ambos ut libet inclinatus. Si moles fluida in quiete ſtet, conſtat (§. 251.) ejus ſuperficiem ſphæricam fore, atque adeò CE = CD = CP. Sed cogitemus jam eam æquabili motu revolvi circa P*p*, ſingulæ fluidi partes E, I, G, D, &c. ſuas revolutiones ſimul abſolvent, atque adeò earum celeritates radiis CE, CI, HG, FD, &c. proportionales erunt.

Verùm, quia cum omni motu circulari conatus centrifugus mobilis circulantis conjunctus eſt, & ejusmodi conatus centrifugi radiis proportionales ſunt circulorum, quos mobilia in orbem lata pari tempore deſcribunt, conatus centrifugi omnium partium tubi DC minores erunt omnibus conatibus partium tubi EC; unde ii conatus centrifugi conatibus gravitatis contrarii ſunt, atque adeò preſſio cujusque columnæ fluidæ æquivalet exceſſui, quo conatus gravitatis, ſeu pondus abſolutum columnæ, excedit conatum ejus centrifugum, & ſi, exiſtentibus DC & EC æqualibus, exceſſus ponderis EC ſupra ejus conatum centrifugum minor eſt exceſſu ponderis DC ſupra ejus conatum centrifugum, erit preſſio columnæ EC minor preſſione columnæ DC, unde, cum communicantes ſint, non poterunt in æquilibrio conſiſtere, ſed debilior preſſio columnæ EC cedet fortiori DC, atque adeò aqua in columna EC attolletur, adeò ut EC major fiat quam DC. Pari argumento conficitur, columnam DC majorem eſſe quam PC, quandoquidem hæc columna PC utpote axi P*p* congruens, motum revolutionis maſſæ fluidæ non participat, neque adeò ullo conatu centrifugo pollet, pondere ſuo æquat differentiam, qua pondus columnæ DC excedit ejus conatum centrifugum. Sunt ergo CE major quam CD, & hæc major quam CP vel C*p*, ac proinde figura *p*EPA circa P*p* in gyrum acta producit ſphæroidem, cujus P*p* erit axis minor, & maſſa fluida hujus ſphæroidis figuram induet. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

631. Hinc gravia circa ejusmodi ſphæroidem non tendunt ad ejus centrum, ergo nec ad telluris centrum tendunt, ſi in primordiis rerum terra materia fluida & gravi conſtiterit, & in ſe ipſam converti cœperit. Sit enim in altera figura PEA figura telluris flui- Fig. 145.

dæ,

dæ, item filum NM cum annexo ponduſculo M, & hoc filum in N fixum ope ponduſculi M in ſitum ſuperficiei PDE normalem ſeſe componet. Nam corpuſculum M deſcendet quantum poteſt, tantum autem deſcendere poteſt, usque dum ſuperficie PDE viciniſſimum ejusque directio NM eidem ſuperficiei perpendicularis fuerit. Atqui NM, vel ei parallela RDQ curvæ perpendicularis in D, angulo DNM à recta DC ex puncto ſuſpenſionis N ad centrum C ducta, deflectit, ut adeò hinc appareat ponduſculum M non tendere ad centrum ſphæroidis EPA.

Corollarium II.

632. Propterea ND erit ad lineolam DM æquatoris diametro CE parallelam, ſicut pondus abſolutum corporis M ad ejus conatum centrifugum in D. Nam ſi ND exponit pondus corporis, lineola DM exponet vim, qua à directione ND retrahitur detineturque in directione NM. Vi enim ND æquipollent laterales NM & DM, & ceſſante motu converſionis circa axem P*p* pendulum NM ſe componet in ſitum ND, unde, ut detineatur in poſitione NM, ad id alia vi laterali juxta DM agente opus eſt; hæc verò vis lateralis eſt conatus centrifugus ex circulari motu ſphæroidis oriundus, qui ſe in mobile exſerit, ſecundùm directionem LDM radii illius circuli, quem ſphæroidis punctum D una converſione circa P*p* deſcribit; ac, per conſequens, gravitas corpuſculi M ſe habet ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in D, ſicut ND ad DM.

Corollarium III.

633. Si pondus corpuſculi M ſit ad conatum ejus centrifugum ſub æquatore in E, ut P ad N, & recta DQO curvæ PDE perpendicularis in D, erit $LO : CO = P.EC : N.DC$. Nam gravitas eſt ad vim centrifugam in E, ſicut P ad N, & conatus centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, ut EC ad DL, ergo ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, id eſt (§. 632.) $ND : DM$, vel $DC : CQ = P.EC : N.DL$, adeoque etiam $N.DC : N.CQ = P.EC : N.DL$, vel permutando $N.DC : P.EC = N.CQ : N.DL = CQ : DL$ (vel propter parallelas EC, DL) $= CO : LO$, ergo invertendo fit $LO : CO = P.EC : N.DC$.

PRO-

PROPOSITIO LXXX. Problema.

Fig. 146. 634. *Poſita proprietate curvæ* PDE *corollario præcedente* (§. 633.) *elicita, conſtruere curvam, ejusque ſpeciem definire.*

I. Sit PDE curva quæſita, & CB rectangulum ei circumſcriptum, & hujus rectanguli latera producantur in A & M, ita ut BA = BP = EC, & PM = PC, & jungantur PA ac CM. Dein in AE producta ſumatur EF ad EC in data ratione P ad N, ductaque per F recta FT parallela EC protendatur EF in G, ita ut FG = FT = EC. Sumto poſtea ubilibet curvæ elemento D*d*, ac centro C per elementi D*d* terminos deſcriptis arcubus circularibus DK, *dk*, agantur per K, *k* parallelæ KS, *ks* ipſi PT. Quibus præparatis & ducta TG, erunt

II. Propter quadrata DL, LC æqualia quadrato DC vel TR, etiam triangula, quæ ſunt quadratorum dimidia, ſcilicet PIH & CLN ſimul æqualia triangulo TRS, & triangula P*ih*, C*ln* ſimul æqualia triangulo T*rs*; idcirco, facta ſubductione minorum ex majoribus, erit trapez. *h*I — trapez. N*l* = trapez. R*s*, vel etiam rec-lum *g*I — rec-lo N*l* = rec-lo S*r*, quia coeuntibus punctis D, *d* recenſita trapezia & reſpondentia rectangula in rationes æqualitatis evaneſcunt.

III. Quia (ſecundùm hypotheſin) DO curvæ normalis eſt, triangula elementaria D*de* & DLO ſimilia erunt, atque adeò LO : LD (= *de* : D*e*) = I*i* : L*l*, & LD : LC = HI : LN, ergo ex æquo, LO : LC = HI. I*i* : LN. L*l*, vel convertendo LO : CO = HI. I*i* : HI. I*i* — LN. L*l* (ſeu num. 11. hujus) = HI. I*i* : RS. R*r*. Atqui (§. 633.) LO : CO = P. EC : N. DC, ergo P. EC : N. DC = rec-lum H*i* : rec-lum R*t*, ſed, quia EF : FG (ſecundùm hypotheſin) = P : N, atque adeo P. FG = P. EC = N. EF; erit N. EF : N. DC = EF : DC (RT) = rec-lum K*r* : rec-lo R*t*, ac per conſequens etiam H*i* : R*t* = K*r* : R*t*, hinc rec-lum HI. I*i*, ſeu H*i* æquatur ubique rec-lo KR. R*r* ſeu K*r*; ergo omnia H*i*, quæ in trapezio AHIB continentur, æquantur omnibus K*r*, quæ in rec-lo EKRF; id eſt, trapezium AHIB = rec-lo EKRF. Hinc aſſumto quolibet trapezio AHIB in triangulo APB, eique rec-lum EKRF æquale fiat, & arcus KD centro C intervalloque CK deſcriptus ordinatæ HI productæ ad partes I occurret in curvæ quæſitæ puncto D; ut adeò hinc conſtet, curvam PDE algebraïcam eſſe, cum omnia ejus puncta geometrice inveniri queant. Quod erat inveniendum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXI. Problema.

635. *Deducere conſtructionem curvæ* PDE *præcedente propoſitione exhibitam ex principio æquilibrii canalium, ſeu columnarum fluidi* DC, PC *ſecundum explicationem propoſitione* LXXIX. *traditam.*

Poſita conſtructione propoſitionis præcedentis, quia EF ad FG vel AB eſt ut P ad N, ſeu ut gravitas ad conatum centrifugum in E, conatus vero centrifugus in E ad conatum centrifugum in D, ſicut EC ad DL, ſeu BP ad IP, id eſt, ſicut AB ad HI; erit ex æquo gravitas ad conatum centrifugum in D, ſicut EF ad HI, adeò ut HI ſemper ſignificet conatum centrifugum particulæ D in canali DL vel DC, adeoque omnes ordinatæ HI, quæ in triangulo HIP continentur, ſeu hoc ipſum triangulum, exponet conatum centrifugum totius canalis DL vel DC. Atqui exceſſus ponderis columnæ DC ſupra pondus columnæ PC æquivalet conatui centrifugo columnæ DC vel DL (harum enim duarum conatus centrifugi in ſingulis punctis ab axe PC æqualiter diſtantibus æquales, atque adeò ipſarum columnarum DC & DL conatus centrifugi æquabuntur), ergo rec-lum KVXR æquale eſt triangulo HIP, quandoquidem EF vel KR exponit gravitatis ſolicitationem, & facta CV = CP recta KV, differentiam, quâ columna DC excedit alteram PC & (§. 31.) volumen KV in gravitatem EF ſeu KR ductum, exponit ejus pondus, id eſt, exceſſum ponderum DC & PC. Propterea erit etiam totum triangulum PAB æquale rec-lo VF, ac per conſequens ablatis ex hisce ſpatiis æqualibus PHI & VX, remanebit trapezium AHIB = rec-lo EKRF, ut in propoſitione antecedenti reperiebatur.

Corollarium I.

636. Quoniam ergo triang. PBA = EKRF, erit EF : $\frac{1}{2}$AB (= P : $\frac{1}{2}$N) = EC : EV = CE : CE − CP, erit convertendo CE : CP = P : P − $\frac{1}{2}$N.

Corollarium II.

637. Si dicantur CE, a; PC, b; CL, x; LD, y, & EF erit $ap:n$, quam vocabimus cum Hugenio f, & quia (§. §. 634, & 635.) $\frac{1}{2}$AB² = EV. EF, fiet analytice $af - f\sqrt{(xx + yy)} = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}yy$, quæ

ab

ab aſymmetria liberata præbet $y^4 = 4ffyy - 4afyy + 2aayy - 4aaff + 4a^3f - a^4 + 4ffxx$. Quæ ipſiſſima eſt æquatio, in quam Illuſtr. Hugenius incidit, calculum ſuum fundans in æquilibrio canalium DC & EC, non verò, ut nos fecimus in præſenti propoſitione, in æquilibrio columnarum PC & DC, quo calculus nonnihil ſimplicior emerſiſſet. Vid. *Diſcours de la Cauſe de la Peſanteur par Mr. Huygens* pag. 157.

Scholion.

638. Suppoſuimus verò in hiſce cum laudato Hugenio gravitatem corporum uniformem ſeu ubique æqualem. Quod ſi verò gravitates ponantur in directa ratione diſtantiarum à centro C, curva PDE diverſa erit ab ea, quam in duabus poſtremis propoſitionibus exhibuimus. Nam,

Propositio LXXXII. Theorema.

639. *Si gravitas corporum diſtantiis locorum* D *à centro* C *proportionalis eſt, curva* PDE *erit ellipſis conica, cujus ſemiaxis* PC *erit ad radium æquatoris* EC *in ſubduplicata proportione* P — N *ad* P, *ubi* P *ad* N *eſt etiamnunc, ut gravitas ſub æquatore in* E *ad vim centrifugam in eodem puncto.*

Fig. 145. Eſt (§. 632.) ND ad DM, vel DC ad CQ, ut gravitas in D ad vim centr. in D, at (ſecundùm hypotheſin) grav. in D : grav. in E = DC : CE, & grav. in E ad conat. centr. in E (ſecundùm hypotheſin) = P : N, ergo ex æquo grav. in D ad conat. centr. in E = P.DC : N.CE, & conat. centr. in E ad conat. in D = EC : DL = N.EC : N.DL, ergo denuo ex æquo gravit. in D ad conat. centrif. in D. DC : CQ vel P.DC ad P.CQ = P.DC : N.DL, ergo P.CQ = N.DL; atque adeò DL : CQ = LO : CO = P : N, eſtque adeò ratio LO ad CO ubique eadem ſeu data.

Fig. 146. Poſita ergo conſtr. §. 634. num. I. eritque (num. III. §. 634.) LO : CO = H*i* : R*t* (id eſt num. præc. hujus) = P : N, ergo omn. H*i*, ſeu AHIB ad omnia R*t* ſeu RFGS = P : N, vel 2.AHIB : 2.RFGS = $EC^2 - DL^2 : EC^2 - DC^2$ = P : N, & convertendo $EC^2 - DL^2 : CL^2$ = P : P — N. Ex quo conſtat, curvam PDE hoc caſu eſſe ellipſin conicam, cujus ſemiaxes conjugati PC, CE ſint ad ſe invicem in ſubduplicata proportione P — N ad P. Quod erat demonſtrandum.

Ali-

Aliter ex Principio Æquilibrii canalium DC; PC.

640. Ducatur CF, &, quia EF : FG (conſtr.) = P : N; recta EF gravitatem in E exponere poteſt, & quoniam gravitas eſt diſtantiis à centro proportionalis, KY exponet gravitatem in D, & reliquæ ordinatæ in triangulo CKY exponent gravitatem in reliquis locis canalis DC, ergo gravitas totius canalis DC exponetur triangulo CKY. Pari argumento, ſi CV fuerit = CP, exponet triangulum CVZ pondus ſeu gravitas canalis PC; differentia verò ponderum DC & PC, quæ exponitur per trapezium VKYZ, æquivalet conatui centrifugo totius canalis DL vel DC (§. 635.) exponendo per triangulum PHI, ergo KYZV = triang. PIH, adeoque $2.KYZV = DL^2$. Atqui $2.KYZV$ eſt ad $KC^2 - VC^2$ ſeu ad $DC^2 - PC^2$, vel quod idem eſt, ad $LC^2 + DL^2 - PC^2$, ut EF ad FG, ſeu P ad N. Ergo $DL^2 : DL^2 + LC^2 - PC^2 = P : N$, & convertendo $DL^2 : PC^2 - LC^2 = P : P - N$. Ex quo nunc iterum liquet id, quod præcedenti paragrapho oſtenſum, ſcilicet curvam PDE ellipſin conicam eſſe, cujus ſemiaxis PC ſit ad EC in ſubduplicata ratione P − N ad P. Quod erat demonſtrandum.

Scholion.

641. Supereſt, ut rationem gravitatis abſolutæ ad conatum centrifugum ſub æquatore, id eſt, rationem P ad N numeris expreſſam exhibeamus, quod log-morum beneficio facile præſtabitur. Sit A altitudo, quam grave à quiete caſum incipiens motu naturaliter accelerato tempore unius minuti ſecundi in linea verticali & in vacuo perlabitur, quam Hugenius reperit eſſe 15. ped. 1. lineæ; atque R ſignificet radium æquatoris terreſtris, retentisque P & N pro nominibus gravitatis & conatus centrifugi ſed æquatore. Per (§. 151.) $\sqrt{(2A : P)}$ exponit tempus, quo altitudo A motu naturaliter accelerato conficitur, quod tempus, (ſecundùm hypotheſin) eſt unius minuti ſecundi; &, quia una revolutio diurna telluris, reſpectu fixarum, eſt 23. hor. 56. min. ſeu 86160. ſecundorum, nominetur hic numerus n, eritque $n\sqrt{(2A : P)}$ expreſſio unius revolutionis diurnæ in minutis ſecundis, & quia hoc idem tempus (§. 183.) etiam exponitur per $p\sqrt{(R : N)}$, uti p eſt exponens rationis circumferentiæ ad radium, habebimus æquationem $n\sqrt{(2A : P)} = p\sqrt{(R : N)}$, atque adeò $P : N = 2nnA : ppR$. Jam, quia n ſignificat 86160″; A, 15. ped. 1. lin. $p = 2.355 : 113 = 710 : 113$, & quia, ſecundum Piccarti dimenſionem, terræ

terræ unus gradus in Meridiano eſt 57060. hexapedarum, totius terræ ambitus log-us facile habebitur log-mo ex 57060. addendo log-um numeri 360; atque exinde etiam innoteſcet nullo ferme negotio log-us radii æquatoris R. Subſtitutis igitur numerorum logarithmis, erit log-us ex $2nnA = 10.5720475$, & log. $ppR = 8.1108142$; ergo differentia horum log-morum, id eſt, log-us rationis $2nnA : ppR = 2.4612333$. cui log-mo in tabulis proxime convenit numerus 289. Propterea eſt $2nnA : ppR$, vel $P : N = 289 : 1$. Quod erat inveniendum.

642. Hæc ratio $P : N = 289 : 1$, eadem eſt cum ea, quam primùm Hugenius in tractatu De Cauſſâ Gravitatis, pag. 146. & poſtea Illuſtris Newtonns in noviſſima editione Cantabrigienſi ſuorum Princ. Phil. Nat. Math. pag. 379, exhibuerunt. Quoniam igitur in caſu propoſ. LXXX. & LXXXI, CE (§. 636.) eſt ad PC, ut P ad $P - \frac{1}{2}N$, erit $CE : CP = 578 : 577$. etiam ut Hugenius reperit pag. 156. citati libri. In caſu vero propoſitionis LXXXII. erat $PC : EC = \sqrt{P - N} : \sqrt{P}$, ſeu $= \sqrt{288} : \sqrt{289}$, quæ etiam æquatur rationi $577 : 578$. Nam ratio $\sqrt{P - N} : \sqrt{P} = \sqrt{(PP - PN)} : P$, atqui $\sqrt{(PP - PN)} = P - \frac{PN}{2P} + \&c. = P - \frac{1}{2}N$ proxime, ergo $\sqrt{(P - N)} : \sqrt{P} = P - \frac{1}{2}N : P = 577 : 578$. Verùm Newtonus non determinata curvæ ſuæ PAQB, ſeu ſectionis telluris per axem PQ, ſpecie, & multiplici uſus calculo in prima editione Princ. Phil. Nat. pag. 424. invenit diametrum terræ ſecundùm æquatorem ad diametrum per polos, ut 692. ad 689; in noviſſima vero invenit illam ad hanc ut 230. ad 229. Utraque multum abludit ab Hugeniana & noſtra determinationibus; nec mirum, cum calculum ſuum in principiis à noſtris diverſis fundarit, attractionibus illis uſus, quarum leges, elegantibus theorematis in primo libro traditis, complexus eſt. In Propoſ. XX. Lib. III. diſerte ponit, pondera corporum æqualium in ſuperficie telluris collocatorum, diſtantiis eorundem à centro reciproce proportionalia exiſtere, idque ex eo
Fig. 145. deducit, quòd canales EC & PC æquiponderantes ſint, atque adeò earum particulæ quælibet ſimiles & ſimiliter poſitæ etiam ejusdem ſint ponderis. Nam, quia pondera corporum ſunt ut maſſæ & ſolicitationes gravitatis conjunctim, erunt ſolicitationes gravitatis omninò in reciproca ratione maſſarum; unde, cum maſſæ ipſis EC & PC proportionales ſint, erit ſolicitatio acceleratrix in E ad ſolicitationem acceleratricem in P, ut PC ad EC, & ſic de reliquis.

Huic

Huic eidem proprietati etiam inſtitit Clar. David Gregorius in ſuis Elem. Aſtr. Phyſ. Propoſ. LII. fol. 269. ſed nec ipſe figuram ſectionis terræ per axem definire curavit.

643. Hac verò proprietate poſita, quod ſcilicet ſolicitationes gravitatis acceleratrices in E & D figuræ E*Pp* circa *Pp* revolventis, diſtantiis à centro EC, DC reciproce proportionales ſunt, quis crediderit gravitates abſolutas corporum in iisdem punctis E & D eorum diſtantiis EC & DC directe proportionales eſſe? Id tamen ita eſt; nam ſolicitationes illæ acceleratrices diſtantiis locorum à centro reciproce proportionales, ſunt gravitates corporum abſolutæ in iis locis de quibus agitur, demtis conatibus centrifugis eorundem corporum, quatenus hi conatus exeruntur in corpora ſecundum illas directiones, ſecundus quas gravitas, ſed contrario ſenſu, agit. Id eſt, ſi gravitas in E, demta vi centrifuga in eodem puncto, fuerit ad gravitatem in D, demta pariter vi centrifuga in hoc puncto D, ſed ea, quæ in corpus exeritur ſecundum directionem CD eandem, ſecundum quam gravitas in corpus agit, ut DC ad EC, erit vis abſoluta gravitatis in E ad vim abſolutam in D, ut EC ad DC. Ad hoc demonſtrandum oportet prius ſpeciem curvæ PDE definire, cuius analyſis ſic eſt ineunda. Gravitates abſolutæ in E & D indicentur per *g*E, *g*D, & conatus centrifugi juxta directiones CE, CD in iisdem punctis per *c*E, *c*D. Eritque ex hypotheſi $gE - cE : gD - cD = DC : EC$, atqui eſt $gE : gE - cE = P : P - N$, & $cE : gE = N : P$, item conatus centrifugus in D ſecundum directionem DM eſt ad conatum centrifugum in E, ut DL ad EC, ac denique conatus centr. in D ſecundum DN eſt, ad conatum centr. ſecundum DM, ut DL ad DC; ergo ex æquo, id eſt, ductis omnibus antecedentibus in antecedentes ac conſequentibus in conſequentes, atque eliſis elidendis, habebitur $cD : gD - cD = N . DL^2 : (P - N.) EC^2$, vel invertendo & componendo $gD : cD = (P - N) . EC^2 + N . DL^2 : N . DL^2$, ſed $cD : gE = N . DL^2 : P . DC . EC$, ergo denuo ex æquo fiet $gD : gE = (P - N.) EC^2 + N . DL^2 : P . DC . EC$. Eſt ergo gravitas in D ut hæc fractio $(P - N) . EC^2 + N . DL^2 : P . DC . EC$, adeoque, juxta methodum ſupra §. 633. expoſitam, eſt gravitas in D ad conatum centrifugum in D juxta DM, id eſt, $DC : CQ = (P - N) . EC^2 + N . DL^2 : N . DC . DL = (EF - EC) . EC + DL^2 : DC . DL$, quia (conſtr.) in fig. 146. $EF : EC = P : N$, ſeu in ratione gravitatis ſub æquatore in E ad conatum centrifugum. Hinc $DL : CQ$, vel $LO : CO = (EF - EC) . EC + DL^2 : DC^2$ (§. 634. num. III.) = rec-lum H*i* : rec-lum R*t*. Fig. 145. & 146.

Et permutando ac invertendo $PI . Ii : (EF - EC) . EC + DL^2 = CK . Kk : CK^2$ (vel CD^2). Hinc ultrò ſequitur $EF . EC : (EF - EC) . EC, + DL^2 = EC^2 : DC^2$, atque inde elicitur $\overline{EF - EC}$ in $\overline{EC^2 - DL^2} = EF . CL^2$ (vel, quia $EF - EC : EF = P - N : P$) æquatio $\overline{P - N} . \overline{EC^2 - DL^2} = P . CL^2$. Quæ eadem eſt cum ea, in quam ſupra (§. 639.) incidimus; unde, quia in inquiſitione curvæ PDE, quam citato loco ellipſin conicam eſſe vidimus, ſuppoſuimus gravitates abſolutas in E, D, &c. diſtantiis EC, DC proportionales eſſe, nunc illud ipſum, quod illic ſuppoſitio vel hypotheſis erat, tanquam concluſio potuiſſet derivari ex principio, quod ſolicitationes acceleratrices in E & D diſtantiis EC, DC horum punctorum à centro C reciproce proportionales ſint. Sed hac indirecta deductione non eſt opus, cum res directe probari poſſit. Nam, quia invenimus $(P - N) . EC^2 - DL^2 . (P - N) = P . CL^2$, erit $(P - N) . EC^2, + N . DL^2 = P . DL^2 + P . CL^2 = P . DC^2$; &, quia ſupra habuimus $gD : gE = (P - N) . EC^2, + N . DL^2 : P . DC . EC$, erit omnino $gD : gE = P . DC^2 : P . DC . EC = DC : EC$. Quod erat demonſtrandum.

644. Idcirco inſiſtendo principiis Illuſtris Newtoni, atque Celeb. Gregorii, ſectio telluris per axem erit ellipſis conica, quam Propoſ. LXXXII. determinavimus, eritque adeò diameter terræ ſecundum æquatorem ad diametrum per polos in ſubduplicata ratione P ad $P - N$, id eſt (§. 642.) $= P : P - \frac{1}{2}N$, id eſt, $= 578 : 577$. Quæ ellipſis perparum differt à curva Hugeniana, quam propoſitionibus LXXX. & LXXXI. duabus diverſis viis demonſtratam dedimus.

645. Facta iterum $CV = CP$, ductaque Vb æquali longitudini penduli in polo P ſecunda minuta notantis, atque per punctum b deſcripta hyperbola bc inter aſymptotas CE, CT, ejus ordinatæ Ka, EF præbebunt longitudines pendulorum iſochronorum, atque vibrationibus ſuis ſecunda minuta indicantium in locis D & E. Nam (§. 178.) vires centrales, quibus pendula iſochrona agitantur, ſunt pendulorum longitudinibus directe proportionales, unde cum (ſecundùm hypotheſin) ſolicitationes acceleratrices in P, D & E diſtantiis horum punctorum à centro C reciproce proportionales ſint vel ex natura hyperbolæ Fab, directe, ordinatis reſpectivis Vb, Ka, Ef; & cum ordinata Vb jam repræſentet longitudinem penduli in polo P ſecunda notantis, reliquæ Ka, Ef, &c. omninò indicabunt longitudines pendulorum iſochronorum in locis D, E, &c.

Hoc

Hoc igitur principio haud difficulter tabulam conſtruere liceret, qua penduli ſecunda minuta vibrationibus ſuis notantis longitudo ad ſingulos gradus latitudinis definiretur, ſi modo ſatis otii ad hunc ineundum calculum nobis ſuppeteret, & niſi ſummus Newtonus nos labore iſto ſublevaſſet, qui talem in propoſitione XX. Lib. III. Princ. Phil. Nat. noviſſimæ editionis exhibuit.

646. In hypotheſi verò Hugeniana gravitatis uniformis, qualem in propoſitionibus LXXX. & LXXXI. ſequuti ſumus, longitudo penduli in polo P ſe habebit ad longitudinem penduli iſochroni in quolibet loco D, ut $EF.PC + \frac{1}{2}DL^2$ ad $EF.PC - \frac{1}{2}DL^2$. Cujus demonſtratio ex antecedentibus facilis eſt. Nam in quolibet loco longitudo penduli eſt proportionalis ſolicitationi acceleratrici penduli in eo loco, & hæc ſolicitatio acceleratrix ſemper eſt exceſſus gravitatis abſolutæ ſupra conatum centrifugum in eodem loco, ſumtum in directione gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIII. Theorema.

647. *Si tubus* ABDE *aquæ plenus usque ad* H *circa axem* FP *æquabili motu converti intelligatur, aqua hoc motu circulari ad latera tubi* BA, DE *attolletur, in medio vero deprimetur ad* M; *adeò ut ſuperficies ejus, quæ in tubo quieſcente ſenſibiliter plana erat, in ſuperficiem cavam* LMN *abeat, quam retinebit quousque motus aquæ eodem tenore perſeveraverit.* Fig. 147.

Nam, quia aquæ partes in gyrum actæ conatus habent recedendi à centro, & eo majores habet conatus à centro recedendi, quo majores fuerint circulationis celeritates, majores autem ſunt prope latera vaſis quam in medio velocitates aquæ in orbem actæ, ergo & majores conatus centrifugi, qui, quoniam à lateribus iſtis impediuntur & aqua fluida eſt, exeruntur ſecundum directiones plano baſis perpendiculares, ac per conſequens, cum in lineis baſi perpendicularibus prope latera conatus centrifugi maximi ſint, ſequitur illic aquam altiorem eſſe debere quam in medio, ad id ut exceſſus preſſionis à gravitate aquæ ſupra conatum centrifugum in ea linea æqualis manere queat preſſioni aquæ in medio cylindri, alioqui aqua non poſſet in ſtatu manenti conſiſtere; propterea liquet, quod cum lineæ *bl*, lateribus vaſis BL propiores, majores ſint mediâ MP, ſuperficies aquæ LMN cava futura ſit.

648. Ductis itaque ad axem PM ordinatis LI, *li*, abſciſſæ MI,

Mi exponent conatus centrifugos filamentorum aqueorum BL, *bl* circa axem PM revolventium, unde, ſi velocitates circulationis fuerint, ut dignitas quælibet *m* radiorum PB, P*b* &c. erit $MI : Mi = PB^{2m-1} : Pb^{2m-1}$, atque adeò curva M*l*L una ex infinitis parabolis. Nam eſt generaliter quadratum circulationis in compoſita ratione conatus centrifugi & radii circulationis per formulam primam, §. 183. adeoque conatus centrifugi MI erunt, ut quadrata celeritatum, ſeu (ſecundum hypotheſin) ut PB^{2m} applicata ad radios PB circulationis, atque adeò ſunt directè, ut reſpectivæ quantitates PB^{2m-1}. Hinc, ſi $m = \frac{3}{2}$, id eſt, celeritates circulationum ſint in ſeſquiplicata ratione radiorum, curva M*l*L erit parabola conica.

Scholion I.

649. Præſens propoſitio etiam experimento facili probari poteſt. Nam ſi ſitula ex fune prælongo pendens & aquæ ſemiplena, eo usque in orbem vertatur, dum funis valde rigeſcat; tum ſitula, ſibi relicta vel derepente in contrarium ſenſum dextre impulſa, magna pernicitate motum circularem ſequetur, talemque etiam aquæ imprimet; hoc proinde motu verticoſo aquæ in ſitula impreſſo, ſtatim contingere obſervabitur, ut aqua ad parietes ſitulæ attollatur & in medio ſubſidat, atque adeò ejus ſuperficies figuram cavam induat loco planæ ſuperficiei, qualis prius erat.

Scholion II.

650. Quin imo ex propoſitione hac noſtra facilis modus deduci poteſt explicandi, cur in quolibet vertice corpora ſolidiora quam verticis partes ad verticis centrum pellantur. Nam, quia in vaſe cylindrico AD aqua HBDK in gyrum acta ad parietes vaſis nonnihil ſe attollit, adeò ut ſuperficiem cavam LMN induat; ideo manifeſtum eſſe poteſt cuique, quod, ſi aqua operculo rigido KH operta eſſet, ſingula puncta operimenti rigidi excepto medio O ab aqua circulante ac propterea ſeſe attollere conante preſſiones diverſas ſint ſubitura, ſcilicet eo majores quo remotiora fuerint puncta à centro operimenti O. Atqui ea vi, qua puncta operimenti ab aqua ſeſe attollere conante premuntur, eadem vi reactione ſua in aquam aget, quod ſane etiam de ſuperficie cava cylindrica itidem eſt intelligendum; id eſt, qua vi hæc ſuperficies cylindrica ab aqua HD in gyrum

rum acta atque adeò axem MP fugiente, premitur, tanta etiam eſt ejus reactio, cujus vi verſus axem MP aqua repellitur; adeò ut, ſi corpus aliquod in aqua ſit, ut *b*, id pellendum ſit verſus P in directione BP ſuperficiei cylindri perpendiculari.

Sic etiam, in vorticibus magna pernicitate in gyrum actis, fluidum elabendi conatum habens à vorticum ſuperficiebus repellitur, & à repulſo fluido corpora ſolida, quæ in vortice ſunt, ſecundum directiones ſuperficiei vorticum normales, atque hoc modo gravitas in hypotheſi vorticum utcunque adumbratur. Utinam verò reliqua gravitatis phænomena eadem facilitate in hoc vorticum ſyſtemate explicare liceret!

CAPUT XXIII.

De Agitatione aëris in productione ſoni.

651. Ante Illuſtrem Newtonum nemo theoriam ſonorum geometrice tractare auſus eſt, nec mirum, cum ejusmodi disquiſitio iis difficultatibus circumſepta ſit, quæ non niſi à ſagaciſſimo Viro aliisve ſimilibus geometris ſuperari poſſe videbantur. Veruntamen elegantiſſimum nobis exhibuit theorema ſummus Geometra accelerationes pulſuum in aëre elaſtico concernens Propoſ. XLVIII. Lib. Sec. Princ. Phil. Nat. Math. in veteri & Propoſ. XLVII. in noviſſ. editione, poſteaquam ſuam hypotheſin de productione ſonorum Propoſ. XLIII. expoſuit. Ejus doctrina, ni fallor, huc redit.

652. Scilicet intelligit vibrationibus partium corporis ſonori alternis circumjectum aërem elaſticum propelli atque adeo denſari nonnihil, dehinc relaxari & in partes contrarias regredi. Nam itu partium corporis tremuli contiguæ aëris partes propulſæ denſabuntur, regreſſu verò, atque adeo amota vi comprimente, denſatus aër iterum ſeſe in omnes partes, quantum poteſt, elatere ſuo expandet, ita ut itu partium corporis tremuli aër condenſetur & in reditu atque regreſſu iterum rareſcat. Quod partes corporis tremuli in aëre ipſis contiguo efficiunt, idem etiam præſtabunt aëris partes jam propulſæ in aëre ipſis contiguo, & hic in ſibi proximo atque ſic deinceps, ſed non eadem ubique harmonia, ita ut, ſi quædam aëris partes propulſæ ſint, propellantur & omnes reliquæ atque progrediantur, ſed cum unæ propellantur atque denſentur, aliæ redeant

atque poſteaquam denſatæ erant, iterum rareſcant & regrediantur, idque vicibus permutatis. Ejusmodi motus partium aëris propulſarum atque iterum, unde venerant, regredientium, ſeu intervalla progreſſus atque regreſſus, vocentur pulſus aëris, quæ intervalla ob æqualia temporis intervalla præterpropter æqualia exiſtent. Hisce poſitis ſequens ſolvendum occurrit problema.

PROPOSITIO LXXXIV. Problema.

Fig. 148. 653. *Si elaſticitates aëris denſitatibus reſpectivis proportionales fuerint, determinare celeritates aëris elaſtici in uno ejus pulſu à vibratione corporis tremuli vel alia ratione excitato.*

I. Sit EF latitudo unius pulſus, ſcilicet intelligatur uno itu vibrationis corporis tremuli contiguum aërem propulſum redactum eſſe in ſpatium AB, ex cujus puncto medio E excitata ſit perpendicularis EP, atque in ea recta ME exponat elaſticitatem aëris condenſati AB. Regrediente parte corporis tremuli, vel potius remota vi comprimente, quæ aëri AB denſitatem naturali majorem induxit, aër AB ſui juris factus, in utramque partem (§. 652.) æqualiter ſe diffundere conabitur; ſed conſiderando ejus dilatationem tantum quæ verſus D fit, aërem BC ante ſe propellet, atque eum condenſando rediget in volumen CD ipſi AB circiter æquale. Intervallum EF, inter puncta media portionum aëris denſarum AB, CD, eſt intervallum unius pulſus, quoniam æquivalet itineri, quod eundo & redeundo conficitur. Ut innoteſcant celeritates aëris in ſingulis punctis intervalli EF, procedendum porrò ut ſequitur:

II. Dividatur EF bifariam in O, jungatur OM, ductaque per quodlibet punctum G intervalli EF rectâ GH parallela EP lineæ OM occurrente in H, fiat denique $Fg = EG$. Ponatur aërem EB ſe extendiſſe in EG: quæritur vis acceleratrix puncti progredientis G; hæc verò vis eſt virtus elaſtica aëris EG demta virtute elaſtica aëris FG, qui progredienti reſiſtit. Jam aëris progredientis EG raritas eſt ut EG, & reſiſtentis raritas ut FG, & quia denſitates raritatibus ſunt reciproce proportionales, & elaſticitates directe denſitatibus; elaſticitates aëris raritatibus ejus erunt reciproce proportionales, unde, cum (ſecundùm hypotheſin) aëris AB elaſticitas ſit EM, aëris expanſi EG elaſticitas erit $EM.EB : EG$, aërisque expanſi FG elaſticitas $EM.EB : FG$. Ergo vis acceleratrix puncti G ſeu differentia elaſticitatum $= EM.EB : EG, - EM.EB : FG$ (vel quia gF & EG æquales) $= EM.$

EB.

EB. Gg : EG. FG. Jam, ſi ob anguſtiam pulſuum eorumque partium rec-lum EGF aſſumere licet æquale dato rec-lo BEF, erit vis acceleratrix puncti progredientis G = EM. EB. Gg : EB. EF = EM. Gg : EF = EM. GO : EO, ſeu (propter triangula ſimilia OEM & OGH) = GH. Eſt igitur vis acceleratrix puncti G circiter ut ordinata GH trianguli rectanguli OEM, hoc eſt, ut diſtantia ejus GO à medio vibrationis, ut Celeb. Newtonus, loco ſupra citato, primus invenit. Unde ſi centro O & radio OE deſcriptus ſit ſemicirculus ENF, & EP media proportionalis inter EM & EO. Erit (§. 148.) celeritas puncti G, ut GN. EP : EO. Tempus verò, quo aër EB ſe extendit in ſpatium EG (§. 149.) exponetur arcu EN : EP. Quæ omnia erant invenienda.

Corollarium I.

654. Hinc celeritates pulſuum erunt in compoſita ratione ex ſubduplicata intervallorum pulſuum & ex ſubduplicata denſitatum. Vel brevius, celeritates ſunt ut EP. Nam velocitates punctorum G in diverſis EF ſimiliter poſitorum, ſunt ut homologæ EP, quia ſimilitudo circulorum rationes omnes GN : NO vel EO æquales facit.

Corollarium II.

655. Tempora vero pulſuum ſunt in reciproca ratione celeritatum, ſeu ut EO : EP.

Corollarium III.

656. Pendulum, cujus longitudo ſit tertia proportionalis ad EM & EO, unam oſcillationem ex itu & reditu compoſitam eodem tempore conficiet, quo unus pulſus eundo & redeundo abſolvitur.

Scholion.

657. Præcedentes determinationes circa vim acceleratricem, velocitatem, & tempus lationis puncti progredientis G, non niſi tanquam phyſicè accuratæ haberi debent, non verò mathematicè. Nam quia memorata vis acceleratrix puncti G reperta eſt ſupra propor-

tio-

tionalis quantitati EM. EB. Gg : EG. FG $=$ 2EM. EB. GO : GN^2, erit momentum ſolicitationis acceleratricis, ut 2EM. EB. GO. $-$ dGO : GN^2 $=$ 2EM. BE. GN. dGN : GN^2 $=$ 2EM. EB. dGN : GN proportionale momento celeritatis acquiſitæ, ſeu VdV, vocando hanc celeritatem V, & dV ejus elementum, & $-d$GO ſignificat elementum decreſcens lineæ GO, alterum vero dGN elementum ordinatæ GN. hinc EM. log. (GN^2 : BQ^2) eſt, ut quadratum celeritatis puncti progredientis G.

CAPUT XXIV.

De Motu inteſtino fluidorum.

658. HOc nomine non intelligitur hoc loco internus molecularum motus fluidi cujuscunque in ſuo ſtatu naturali conſiſtentis, ſed is particularum motus, qui in fluidis à cauſis externis & accidentalibus excitari ſolet, quò calor præſertim eſt referendus, qui dubio procul ex concitatiore particularum motu in corpore calido à cauſis externis producitur. Utut verò ejusmodi motus inteſtinus admodum perturbatus ſit, nihilo tamen minus regula phyſicè ſatis accurata pro ejus menſura media tradi poteſt.

PROPOSITIO LXXXV. Theorema.

659. *Calor, cæteris paribus, eſt in compoſitâ ratione ex denſitate corporis calidi, & duplicatâ ratione agitationis particularum ejusdem.*

Agitatio particularum eſt celeritas media inter celeritates particulares, quibus calidi corporis particulæ agitantur. Vocetur hæc celeritas media V, & corporis denſitas D. Jam, quia calor conſiſtit in concitatiore particularum motu, calor erit, ut impreſſiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, ſed hæ impreſſiones ſunt in compoſita ratione ex duplicata celeritatum & ſimpla denſitatum, ſeu, ut D. V^2. Ergo etiam calor eſt ut D. V^2. Quod erat demonſtrandum.

Dictum in propoſitione *cæteris paribus*, id eſt, in corporibus ſimilis texturæ.

Scholion.

660. Ex hac propoſitione jam elicere licebit modum metiendi agitationem particularum aëris. Habeatur tubus ADM inſtar ſiphonis reflexus, cujus crus minus AD capſula vitrea ABC inſtructum ſit, & majus DM hermetice ſigillatum in M non nihil excedat longitudinem fiſtularum in ordinariis barometris adhiberi ſolitarum. Tempore hyberno tubus mercurio impleatur orificio aperto A deorſum ſpectante, atque ramo DM in verticali ſitu detento, parte D ſurſum reſpiciente, quod ope alius tubi inflexi atque aperto orificio A inſerendi rite præſtari poteſt. Totus tubus mercurio plenus inverti debet, ut denuo in ſitum, quem ſchema monſtrat, reducatur, mercuriusque in ramo MD ad conſuetam in ordinariis barometris altitudinem DH, 27. vel 28. digitorum ſe demittet, effluente per apertum orificium A ſuperfluo hydrargyro. Sed, quia capſula ABC adhuc mercurio plena erit, ſuctionis modo tanta ejus copia extrahenda, usque dum reſidui ſuperficies FF ſit circiter in medio capſulæ, vel paulò altior, ita ut BF aut CF ſint $\frac{2}{3}$ totius altitudinis capſulæ BG. Clauſo poſtea orificio A, atque adeò ſublata communicatione aëris in ampulla cum exteriore, inſtrumentum uſui aptum atque paratum erit. Ponamus enim aërem AFF calore extendi in ſpatium AEE, ita ut hydrargyrus in altero tubo ex H aſſurgat in I, columnæ IE preſſio æquivalebit impreſſioni aëris AEE in ſua baſi EE, atqui hæc impreſſio (§. 659.) eſt, ut factum ex quadrato celeritatis mediæ particularum aëris in denſitatem aëris. Vocetur, ut in propoſitionis expoſitione loco citato, velocitas media V, eritque aëris impreſſio in ſuperficiem EE, ut $V^2 : GE$, nam denſitas aëris AEE eſt ut $I : AE$ vel $I : GE$; eſt ergo $IE = V^2 : GE$, vel $IE.\,GE = V^2 = IG.\,GE + GE^2 = V^2$. Hinc $V = \sqrt{(IE.\,GE)}$ aut etiam $= \sqrt{(IG.\,GE + GE^2)}$. Propterea, ſi vocentur $FH = a$, $EE = b$. Diameter tubi $MD = c$, & $GF = e$, ac denique variabilis $HI = x$, invenietur V, ſeu velocitas media particularum aëris, ut $\sqrt{(ab^4c + b^4cx + bbccx + abbccx + bbccxx + c^4xx)} : bb$. Hinc data x in aliqua obſervatione, innoteſcet ultro ipſa V. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 149.

F I N I S.

APPENDIX.

POſtquam præcedens tractatus Typographo jam miſſus eſſet, varia ſubinde in mentem venerunt, quæ tum ad illuſtrationem Operis, tum etiam ad qualemcumque doctrinæ profectum facere videntur. Eorum pauca in hac Appendice præcedentibus libris addere conſtitui, quando temporis anguſtia atque Bibliopolæ feſtinatio non concedunt mihi oportunitatem omnia ad umbilicum deducendi.

I. Circa notiſſimam naturæ legem, quâ *cuilibet actioni æqualis & contraria eſſe dicitur reactio*, quam ex §. 11. derivatam in ſequenti §. 12. retuli, egregii nonnulli viri hærere videntur, exiſtimantes nunquam motum ſequi debere actionem, ſi huic æqualis ſemper & contraria ſit reactio; nam ſi, ut in exemplo à Celeb. Newtono inter alia adducto, equus lapidem funi alligatum trahens æqua vi retrahitur in lapidem, quomodo, inquiunt, progredi equus lapidemque movere poteſt, ſi vis agens ab æquali & contraria reſiſtentia abſorbetur tota atque retunditur? Sed hæc objectio ab æquivocatione circa nomina *vis* & *actionis* nata eſſe videtur, quæ tamen duo accurate debent diſtingui. Vis corporum non eſt actio ipſa; nam actio eſt applicatio vis cujusdam ſubjecto habili, ſeu cui applicari poteſt: illi verò ſoli corpori applicari cenſetur, quod reſiſtit, quod renititur, quod reagit. In rebus materialibus nulla eſt actio proprie ſic dicta, ubi nulla eſt reactio; equus enim, qui corpus *nihil* reſiſtens poſt ſe trahit, *nihil* trahere vel *non* trahere, id eſt, nil aliud agere, quam ſimpliciter incedere, cenſetur. In omni ergo actione corporea eſt colliſio inter vim agentem & renixum corporis patientis, applicatio vis agentis in corpore actionem ſuſcipiente, hoc eſt, actio ipſa æqualis eſt & contraria renixui patientis, qui eſt ejus reactio, quia hic renixus vel hæc vis inertiæ corporis patientis debet tolli ad id ut corpus moveri poſſit ab agente. Non tamen ideo ſequitur *vim totalem* corporis agentis totam impendi ſuperandæ rectioni patientis, ſed ejus partem tantum, & hæc pars vis totalis corporis, quæ tollendæ reſiſtentiæ corporis patientis inſumitur, ea eſt vis, à qua actio proprie manat; *reſiduum* enim ejusdem vis totalis, cum nullam habeat reſiſtentiam vel renixum abſorbendum, in actionem minime influit. Idcirco cum actio quæcunque æqualis & contraria dicitur reactioni corporis patientis, hoc aliud non ſignificat quam iſtud,

iſtud, *in omni actione corporea tantum virium corpori agenti decedere, quantum corpus actionem ſuſcipiens lucratum ſit.*

II. Propoſitio IV. Lib. I. §. 44. facilem ſuppeditat modum demonſtrandi centrum gravitatis *dari* in unoquoque corpore, & hoc centrum *unicum* eſſe, ſi gravium directiones parallelæ fuerint. Nam, ſi fuerint corpuſcula quotcunque quam minima A, B, C, D, &c. Fig. 150.
quomodocunque poſita, & tanquam elementa corporis etiam cujuslibet ſpectata, à quibus demiſſæ ſint ad planum Pc poſitione datum perpendiculares Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & plano Pc aliud parallelum ducatur GH, cujus diſtantia Ee à plano Pc ea ſit, ut factum ex Ee in aggregatum corporum $A+B+C+D+$ *&c.* æquet ſummam factorum $A.Aa+B.Bb+C.Cc+D.Dd+$ *&c.* Corporum A, B, C, D, *&c.* in ſuas reſpectivas à plano Pc diſtantias Aa, Bb, Cc, *&c.* & in Pc ſumatur Pe, talis ut $(A+B+C+D+$ *&c*$).\ Pe$ ſit $=A.Pa+B.Pb+C.Pc+D.Pd+$ &c. ductaque per e recta eE occurret GH in puncto E, quod eſt commune centrum gravitatis corpuſculorum A, B, C, D, *&c.* vel corporis totalis, quod ex hiſce corpuſculis componitur. Hoc punctum E ideo dicitur corporis totalis centrum gravitatis, quia ejus partes ſeu corpuſcula A, B, ex una parte lineæ, vel plani GH, æqualium ſunt momentorum cum corpuſculis C, D, &c. ex altera parte ejuſdem plani vel lineæ GH, & quia hoc idem accidit reſpectu cujuslibet alius lineæ LM, quæ per hoc idem punctum E duci poteſt. Nam ducta per P linea $P\kappa$ parallela LM, & productis Aa, Bb, Cc, Dd, &c. & Ee, in α, β, κ, δ, *&c.* & ε. reperietur $(A+B+C+D+$ *&c*$).\ E\varepsilon=A.A\alpha+B.B\beta+C.C\kappa+D.D\delta+$ &c. & $(A+B+C+D+$ &c$).\ P\varepsilon=A.P\alpha+B.P\beta+C.P\kappa+D.P\delta+$ *&c.* quandoquidem omnia triangula $Pa\alpha$, $P\beta b$, $Pc\kappa$, &c. ſimilia ſunt. Jam ex hiſce duabus æqualitatibus ultrò ſequitur, omnia momenta corporum A, B, C, D, &c. reſpectu utriusque plani $P\kappa$ & PV ejus normalis ſimul æqualia eſſe reſpective factis ex aggregato corporum in diſtantias centri E ab utroque plano vel linea $P\kappa$, PV, quod cum ita ſit, neceſſum etiam eſt ut corpuſcula, quæ ſunt ad unam partem rectæ LM æqualium ſint momentorum cum ponduſculis, quæ ſunt in altera parte ejuſdem LM. Cum itaque omnes lineæ, quæ per punctum E duci poſſunt, ſint axes æquilibrii ponduſculorum A, B, C, D, &c. liquet corporis ex hiſce corpuſculis tanquam ſuis elementis conflati centrum gravitatis *unicum* eſſe in E. Quod erat demonſtrandum.

Hanc eandem propoſitionem Walliſius ex aliis principiis etiam elicuit.

 III. Cir-

III. Circa regulam Guldini, cujus demonſtratio ſupra (§. 47.) allata eſt, duo notanda ſunt. 1°. Eam non ſolum in figuris aut ſolidis rotundis obtinere, ſed generaliter in omnibus aliis, quæ generari poſſunt figuræ genitricis motu hac lege facto, ut figuræ planum ſemper perpendiculare maneat lineæ, quam centrum gravitatis figuræ genitricis motu ejus deſcribit. Hoc enim caſu *ſolidum figuræ motu genitum ſemper æquale eſt facto ex figura in viam centri gravitatis ejusdem.*

Fig. 151. Nam ſi ponatur centrum gravitatis C figuræ cujuslibet AB incedens in curva DEF, cui figura ubique normalis ſit, deſcripſiſſe arculum curvæ C*c*, atque ex ſitu BA veniſſe in ſitum *ba* priori indefinite vicinum, adeo ut rectæ CO & *c*O, quæ ſint in planis figurarum AB, & *ab*, & in plano curvæ DEF, eritque O centrum circuli oſculatoris curvæ datæ DF in ejus puncto C vel ejus proximo *c*. Adeoque ſolidum, quod figura AB deſcribit cum ejus centrum C percurrit arculum C*c*, per §. 47. æquatur facto ex figura AB in arculum C*c*, ergo omnia ejusmodi ſolida vel ſolidum, aut figura, quæ producitur inceſſu figuræ AB per totam curvam DEF, æquabitur facto ex eadem AB in omnes arculos, qui in curva DF continentur, id eſt, facto ex figura AB in curvæ DEF longitudinem. Quod erat demonſtrandum.

2°. Notandum, hæc tantum ita ſe habere, ſi figura genetrix gravitatis ſit uniformis, & fallere Guldini regulam, figura genitrice exiſtente difformiter gravi.

IV. Propoſitio VIII. Lib. I. (§. 59.) etiam deduci poteſt vel ſaltem ipſi æquivalens ex proprietate univerſali vectis recti in ſingulis punctis à potentiis obliquis impulſi, quam hoc loco explicare
Fig. 152. placet. Sit linea recta inflexilis AC, quæ in ſingulis punctis C, C, &c. urgeatur potentiis CD, CD uniformi lege ad ipſam inclinatis, & circa eam tanquam axem conſtitutæ intelligantur figuræ ACGIP, & ACHKA, ea conditione, ut ordinata quælibet CG (CI) ſit ad homologam potentiam CD in duplicata proportione ſinus anguli reſpectivi BCA ad ſinum totum; ac ordinata CH (CK) alterius figuræ ACH ſe habeat ad ordinatam CG (CI) primæ ACGP, ut ſinus complementi anguli BCA ad ejusdem ſinum rectum, & ſic ubique, poſitis hisce, per centrum gravitatis areæ ACGP agatur RS axi AC recta huic lineæ AC occurrens in R, eritque linea RT cum RS angulum TRS continens, cujus ſinus eſt ad ſinum complementi, ut area AHC ad aream ACGP, media directio omnium

po-

potentiarum CD, CD lineæ AC applicatarum, & onus quo hypomochlion in R urgetur, erit ad omnes potentias lineæ AC rectas ex obliquis CD, CD derivatas, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli TRS. Demonſtratio hujus Lectoris induſtriæ relinquitur brevitatis amore. Hoc tamen minime reticendum eſt, in iisdem directionibus BD, BD potentias, curvæ cuilibet AB applicatas, quæ ſint ad homologas CD ad lineam AC pertinentes, ut reſpectivæ CV ad BV (ſupponendo directiones BD, BD tangere curvam quandam CV) eandem habere mediam directionem ZT cum potentiis CD, CD, &c. rectæ AC applicatis, ut demonſtratu id facile eſt. Unde ſi curvæ cuicunque AB potentiæ quæcunque in directionibus BC, BC, &c. applicatæ ſint, facili negotio invenietur earum media directio, ducendo per curvæ verticem A tangentem AC, vel quamlibet aliam rectam, & disquirendo quænam potentiæ CD in directionibus BC huic rectæ AC applicandæ ſint ad id, ut harum potentiarum media directio RT etiam præbeat mediam directionem potentiarum in directionibus BC, BC, &c. datæ curvæ ABB applicatarum; ad id facienda ubique eſt CD ad homologam potentiam curvæ AB applicatam, ſicut BV ad CV.

V. Uſum univerſalem propoſitionis XII. Lib. I. In ſubjunctis ejus corollariis & ſcholio jam utcunque oſtendimus. Ad majorem tamen propoſitionis & applicationis ejusdem illuſtrationem, pauca hæc, quæ ſequuntur, addidiſſe forte juvabit. Præter ſymbola §. 101. jam explicata, firmitatem cujusque curvæ elementi Bb vel $B\beta$ nominabimus t, quæ illic inſigniebatur litera T; potentias juxta BH & BG, dq & dp reſpective, tangentem & ſecantem anguli GBH, h & k, ac denique radium oſculi ſeu curvitatis in B, r; item per a ſinum totum deſignabimus. Hisce poſitis, erit (num. 1. §. 93.) GH $= dt$, & tria elementa dp, dq, & dt, ipſis a, k & h proportionalia erunt, ſic etiam AP : PQ $=$ $r : ds$, atqui (§. 103.) eſt BG (dp) : T(t) $=$ PQ : AP, ergo $dp : t = ds : r$, item $dp : dt = a : h$, ergo $dt : t = hds : ar$, & $log.\ t = \int (hds : ar)$, adeoque ex hisce analogiis quatuor habentur æquationes, quales in hoc adjecto laterculo notantur. Hinc ex quantitatibus dp, dq, dt vel t & h datâ qualibet in indeterminatis curvæ x, y, dx, dy, &c. & quantitatibus conſtantibus, invenientur reliquæ, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter. Fig. 29.

1. $dt = hdp : a = hdq : k.$
2. $t = rdp : ds.$
3. $log.\ t = \int hds : ar.$
4. $h = ardt : tds.$

Exempl. Sit curva data ABZ hyperbola æquilatera, cujus æquatio

tio $yy = xx - aa$, in qua abſciſſæ x ſumantur à centro, ſemilatere transverſo exiſtente $= a$, ſintque tenacitates aut firmitates curvæ proportionales diſtantiis punctorum curvæ à centro, hoc eſt, $t = \sqrt{(xx + yy)}$. Et §. 161. præbebit $r = t^3 : aa$, & $h (= ardt : tds) = \frac{2xy}{a}$, nec non $k = tt : a$; hinc æquatio prima $dt = hdq : k$ præbebit $dq = ttdt : 2xy = 2txdx : 2xy = tdx : y$; atqui $tdx = yds$, ergo $dq (= tdx : y) = yds : y = ds$. Idcirco potentiæ BH, ſeu dq, ſunt ut elementa curvæ Bb, earumque directiones in centro hyperbolæ coëunt, quoniam tangens anguli DBH inventa eſt $= 2xy : a$, & hæc expreſſio etiam tangentem anguli, quem normalis hyperbolæ BD cum recta ex puncto B ad centrum hyperbolæ ducta continet. Propterea eſt hyperbola æquilatera *catenaria*, ſi gravium directiones in centro hyperbolæ concurrere ſupponuntur, ut ſupra circa finem §. 105. ſine demonſtratione dictum eſt. Pariter ſi poſuiſſem $dq = ds$ & $h = 2xy : a$ in hyperbola eadem, inveniſſemus $t = \sqrt{xx + yy}$.

Generalius, ſi directiones gravium convergunt in punctum, abſciſſæque ſumantur in axe ab hoc centro gravium, erit $h = axdx + aydy : xdy - ydx$, & hujus ac alterius $dt = hdq : k$ ope, in ſuppoſitione $dq = ds$ inveniſſemus $t = \sqrt{xx + yy}$ & $yy = xx - aa$.

Si directiones gravium axi AC parallelæ ſunt, erit $h = adx : dy$, ac ſubſtituendo loco dx, & dy earum proportionales n & m, fiet $h (= adx : dy) = an : m$. Item in æquatione quarta, ſurrogando m & dn pro r & ds, quibus proportionales ſunt, fiet $an : m = amdt : tdn$, & $dt : t = ndn : mm$ (aut, quia $mm + nn = aa$, & $ndn = - mdm$) $= - mdm : mm = - dm : m$, ergo $lt = l(aa : m)$, id eſt, $t = aa : m = ads : dy$, ut habet æquatio nona. Subſtituendo igitur valorem inventum ipſius t in æquatione ſecunda invenietur æquatio ſeptima, & ex hâc ope analogiæ $dp : dq = a : k, = dy : ds$, elicietur æquatio octava.

5. $h = adx : dy$
6. $k = ads : dy$
7. $dp = ads^2 : rdy$
8. $dq = ads^3 : rdy^2$
9. $t = ads : dy$

Hinc, ex hisce tribus dp, dq & t una data in indeterminatis curvæ & conſtantibus utlibet invicem permixtis, facile invenientur reliquæ duæ, ſi non algebraice, ſaltem transcendenter.

Si directiones potentiarum BH ſunt curvæ normales, erit $h = 0$, & $k = a$, & ſola æquatio ſecunda ſufficit; hunc caſum particularem Celeb. Joh. Bernoullius ſolutum dedit jam pridem in Commentariis Academiæ Reg. Pariſ. Scientiarum 1706, & nuper adhuc in Li-

Libro cui titulum fecit *Eſſay d'une Nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux.*

VI. *De ſublimitate gravitatis difformis, quâ projectilia ſectiones conicas in vacuo deſcribunt.* Quoniam mobile perimetrum alicujus ſectionis conicæ AQ*a* deſcribens citatur ſolicitationibus, quæ quadratis diſtantiarum mobilis à centro ſunt reciproce proportionales, *ſcala* harum ſolicitationum GB erit hyperbola quadratica, cujus applicatæ HG, AB, quæ ſolicitationem gravitatis in H & A exponunt, quadratis abſciſſarum DH, DA ſunt reciproce proportionales, centro hyperbolæ exiſtente in D. Quæritur jam quantam aſſumere oporteat *ſublimitatem*, hoc eſt, lineam HA talem, ut in ea deſcendens grave motum à quiete in H incipiens, & ſolicitationibus, quas ordinatæ hyperbolæ in quadrilineo HGBA exponunt, celeritatem acquirat in A, cum qua propulſum mobile, ſecundum lineam A*a* alteri BA in directum poſitam, datam ſectionem conicam AQ*a* in vacuo deſcribat. Fig. 153.

Ponitur punctum A pro alterutra apſide, ac propterea DA erit ſectioni perpendicularis in A, atque adeo hoc punctum A alteruter vertex erit ſectionis conicæ AQ*a*, & radius curvitatis in A æquabitur $\frac{1}{2}$L, id eſt, ſemilateri recto ſectionis conicæ, & ſolicitatio curvæ in A normalis ex centrali AB derivata eadem erit cum hac centrali; idcirco indicando celeritatem mobilis in puncto A, per V, vi §. 154. habebitur $V^2 = \frac{1}{2}L.AB$. Atqui eadem velocitas V, ſed (ſecundùm hypotheſin) deſcenſu in HA acquiſita, exponitur etiam (§. 136.) latere quadrato ex duplo areæ HGBA, ergo $V^2 = 2.HGBA$, atqui $AHGB = AD.AB - HD.HG$, ergo etiam $\frac{1}{2}L.AB = 2AD.AB - 2HD.HG$, vel, propter hyperbolam, ſubrogando loco AB & HG earum proportionalia quadrata HD^2, AD^2, fiet $\frac{1}{2}L.HD^2 = 2AD.HD^2 - 2HD.AD^2 = 2HD.AD.HA$, hinc etiam $L.HD = 4.HA.AD$, vel $L.Aa.HD = 4Aa.HA.AD$. Verum ex conicis eſt $4QO^2 = L.Aa = AD.Ad$, ergo $4Aa.HA.AD = 4AD.Ad.HD$, id eſt, $Aa.HA = Ad.HD$, & $HD : HA = Aa : Ad$. & dividendo, $AD : HA = AD$ (vel ad)$: Ad$, propterea eſt $HA = Ad$, atque adeo $HD = Aa$. *Eſt ergo ſublimitas in ſectionibus conicis æqualis diſtantiæ apſidis remotioris à centro ſolicitationum, à foco ejus propiore.* Hinc varia deduci poſſunt, quorum nonnulla ſequuntur.

1°. Uni eidemque ſublimitati HA convenire quidem poſſunt infinitæ ſectiones conicæ AQ*a*; cum eadem manente A*d* diſtantia focorum *d*D poſſit eſſe magnitudinis cujuscunque; ſed non ideò una ea-

eademque omnibus competet celeritas jactus ſecundum Aa. Nam, quia $V^2 = \frac{1}{2}L . AB = \frac{1}{2}L . AD^2 . AB : AD^2$ (ſeu, quia $AD^2 . AB$ eſt ſolidum conſtans) eſt $\frac{1}{2}L : AD^2$, erit V ut $\sqrt{\frac{1}{2}L}, : AD$. Id eſt, in diverſis ſectionibus conicis velocitates mobilis in alterutra apſide erunt in compoſita ratione ex ſubduplicata directa ratione laterum rectorum ſectionum, & reciproca ratione diſtantiarum apſidis à centro ſolicitationum.

2°. Si umbilicorum diſtantia Dd fuerit infinita, ſectio conica AQa eſt parabola focum habens in d, ac proinde ſublimitas $HA = Ad$ fit æqualis quartæ parti lateris recti L, ut Galilæus, aliique poſt ipſum plures ex aliis fundamentis demonſtrarunt. In hoc ergo conſectario continetur univerſa doctrina motus projectorum in hypotheſi gravitatis parallelarum.

3°. Si mobile eadem velocitate V in A acquiſita poſt deſcenſum in HA circulum ex centro I, radiumque $AI = \frac{1}{2}L$ habentem deſcribat, conatus centrifugus mobilis in circulo eadem erit cum ſolicitatione centrali AB in apſide A ſectionis conicæ AQa.

4°. Gravitas uniformis, qualis apud nos eſt, ſe habet ad conatum centrifugum in dicto circulo, ſeu ad ſolicitationem centralem AB in A, ut $\frac{1}{2}AI$ ſeu $\frac{1}{4}L$ ad HA ſeu Ad. Adeoque in parabola ex foco d & vertice A deſcriptâ miſſilis gravitas in vertice ejus A, æquabitur conatui centrifugo in circulo prædicto.

VII. *De tempore Periodico in Sectionibus Conicis.* Vocentur tempus unius circuitus in ſectione AQa, T, diameter Aa, D; ejus conjugatus Qq, d; latus rectum l, diſtantia ſeu altitudo AD, A, ſolicitatio centralis AB in apſide A, G. Eruntque $d = \sqrt{lD}$, & area totius ellipſeos, hoc eſt, $2 . AQa = \frac{1}{4}pDd$, ubi p eſt exponens rationis circumferentiæ circuli ad radium. Eſt verò (§. 157.) $T = 2 . AQaA : \frac{1}{2}AD . V$, ergo ſubſtituendo valores analyticos loco areæ & linearum AD, V; habebitur $T = pDd : Au$, ſeu $T^2 = ppD^2d^2 : A^2uu$, eſt vero $dd = lD$, & $uu = \frac{1}{2}lG$, ergo $T^2 (= ppD^3l : \frac{1}{2}lA^2G) = 2ppD^3 : A^2 . G$. Hinc *quadratum ex tempore periodico eſt in compoſita ratione ex directa triplicata ratione lateris transverſi, & reciproca compoſita ratione duplicatæ diſtantiæ apſidis à foco, ſeu centro ſolicitationis, & ſimplæ ſolicitationis* G *in apſide.* Unde, quia ſolicitationes gravitatis ſunt in reciproca duplicata ratione diſtantiarum mobilis à centro, rationes compoſitæ ex duplicata diſtantiæ apſidum à centro & ſimpla gravitatis in apſidibus ſunt rationes æqualitatis, propterea ſunt quadrata temporum periodicorum, ut cubi diametrorum principalium in ſectio-

ſectionibus conicis. Et hæc eſt demonſtratio Celebris Kepleri canonis.

VIII. *De Centro Oſcillationis.* In theoria centri oſcillationis Cap. V. Lib. I. expoſita brevitatis tantum gratia poſui, non verò ex neceſſitate, centrum oſcillationis reperiri in linea centri, hoc eſt, in recta ex puncto ſuſpenſionis per centrum gravitatis figuræ oſcillantis ducta. Methodus enim noſtra perinde valet quæcunque linea accipiatur per punctum ſuſpenſionis, in qua centrum oſcillationis exiſtat, invenietur ſemper hanc lineam per centrum gravitatis figuræ oſcillantis tranſire debere, prorſus ut idem etiam Celeb. Joh. Bernoullius in eleganti ſuo Schediaſmate Act. Lipſ. 1714. menſ. Junii §. 28. oſtendit. Nam ſi in fig. 46. pendulum ſimplex CN compoſito iſochronum per aliud punctum *m* quam per centrum gravitatis M figuræ oſcillantis tranſire ponatur, quod tamen ita comparatum, ſeu poſitum, eſſe debet, ut linea ex hoc puncto *m* (in figura quidem non ſignato ſed calamo aut mente facile ſupplendo) per centrum gravitatis M ducta horizontali CY ad angulos rectos ſemper occurrat, invenietur, ſemper, ut in §. 206, $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.).G:M.mC$, ubi M, ut in citato loco, ſignificat $E.P + F.Q + \&c.$ ſeu aggregatum ponderum omnium figuræ oſcillantis partium. Jam verò, mutato utlibet angulo YCN, mutabitur ſimul magnitudo ipſius *m*C, ac propterea quantitas $NC = (P.PC^2 + Q.QC^2 + \&c.).G:M.mC$ conſtans & invariata fieri nequit, niſi coincidente *m*C, cum MC, atque adeò puncta *m* & M ubique confundantur, adeò ut hinc appareat centrum oſcillationis neceſſariò in linea centri exiſtere. Quod erat demonſtrandum. Fig. 46.

IX. Applicatio hujus novæ theoriæ centri oſcillationis nunc paulò uberius declaranda eſt, quam in §. 208, ubi formula tantum exhibetur pro figuris uniformis gravitatis. Deſignando particulas P, Q, &c. ut ibi per dp, earumque pondus per βdp, ita ut β gradum gravitatis denotet, &, ſi g ſignificet gravitatem, qua ſimplex pendulum agitatur, & z diſtantiam particulæ oſcillantis ab axe oſcillationis, canon §. 206. $CN = (P.PC^2 + \&c.).G:M.MC$ præbebit $t = g\int zzdp : \int \beta x dp$. Hinc, ſi $\beta = gzz:ax$, fiet $t = ag\int zzdp : g\int zzdp = a$.

Oſcilletur jam figura BAD in *planum*, ſeu ita ut axis oſcillationis ſemper maneat in plano figuræ oſcillantis, atque adeò ordinatæ figuræ BD axi oſcillationis QQ conſtanter parallelæ ſint; erunt hoc caſu ipſæ z, ſeu diſtantiæ punctorum ordinatæ, $BD = QC = x$, atque adeò $\int zzdp = \int xxdp$, &, quia $dp = BC.Cc = ydx$, erit $\int zzdp = \int xxydx$, Fig. 154.

$\int xxydx$; & $t(=g\int zzdp : \int \beta xdp) = \int gxxydx : \int \beta xdp$, vel, ſi omnes partes ordinatæ BD ſint uniformis gravitatis, $= g\int xxydx : \int \beta xydx$.

Si eadem figura movetur in latus, id eſt, ſi planum figuræ oſcillationis axi oſcillationis rectum eſt; ſit quælibet in ordinata BC ejus portio CI $= u$, & $dp = dudx$, erit $z = \sqrt{(QC^2 + CI^2)} = \sqrt{xx + uu}$, hinc $zzdp = xxdudx + uududx$, & integrando, poſitis x & dx conſtantibus, invenietur $\int zzdp = uxxdx + \frac{1}{3}u^3dx$, vel (facta $u = y$) $= xxydx + \frac{1}{3}y^3dx$, ſed hoc eſt tantum elementum reſpectu totius figuræ ABD. Et $\int \beta xdp = \int \beta xydx$, adeoque $t(= \int gzzdp : \int \beta xydx) = (\int xxydx + \int \frac{1}{3}y^3dx).g : \int \beta xydx$.

Fig. 154. Pro ſolidis rotundis ſic eſt indaganda formula: ſit BEAD ejusmodi ſolidum, cujus baſis ſit circulus BEDH, cujus diameter EF axi oſcillationis QQ parallelus ſupponitur. Ad hanc diametrum EF demiſſis perpendiculis GL, gl, fiant CL $= t$, & ut antea LG ſeu CI $= u$, requiruntur primum omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl continentur. Quia omnia $zzdp$, quæ in ordinata GL reperta ſunt $xxu + \frac{1}{3}u^3$, omnia $zzdp$, quæ in rectangulo GLl ſunt, erunt $= xxudt + \frac{1}{3}u^3dt$. Ponantur jam $udt = d\alpha$, & $u^3t = \omega$, atque adeo $d\omega = u^3dt + 3uutdu$. Sed circulus EBF præbet $tt + uu = yy$, vel ducendo hanc in udt, fiet $ttudt + u^3dt$, ſeu (ob $tdt = -udu$) $= -uutdu + u^3dt = yyudt = yyd\alpha$, vel etiam $3u^3dt - 3uutdu = 3yyd\alpha$, & addatur hæc æquatio ad alteram $u^3dt + 3uutdu = d\omega$, fietque $4u^3dt = 3yyd\alpha + d\omega$, vel $u^3dt = \frac{3}{4}yyd\alpha + \frac{1}{4}d\omega$, qui valor ſubſtituatur in $xxudt + \frac{1}{3}u^3dt$, atque $d\alpha$ pro udt, fietque $zzdp (= xxudt + \frac{1}{3}u^3dt) = xxd\alpha + \frac{1}{4}yyd\alpha + \frac{1}{12}d\omega$. Adeoque omnia $zzdp$, quæ in ſegmento circulari CBGL, ſeu α, continentur ſunt $= xx\alpha + \frac{1}{4}yy\alpha + \frac{1}{12}\omega$, nam ipſæ QC, CB invariatæ, ſeu conſtantes, manent, utlibet variatis ipſis CL & GL, ſeu t ac u, adeo ut iſtarum reſpectu indeterminatæ x, y conſtantes ſint. Jam, quia α ſignificat ſegmentum CBGL, & ω factum CL. GL^3; erunt omnia $zzdp$ quæ in quadrante CBE continentur $= (xx + \frac{1}{4}yy)$. CBEC, cum evaneſcente GL in E, etiam factum CL. GL^3 ſeu ω evaneſcat. Hinc, ſi π deſignet exponentem rationis peripheriæ cujusque circuli ad radium, reperietur CBEC $= \frac{1}{8}\pi yy$, ac ſolidum CBEC. Cc $= \frac{1}{8}\pi yydx$, adeoque $\int zzdp$ in hoc ſolido, $= (\frac{1}{8}xxyydx + \frac{1}{32}y^4dx).\pi g$. Propterea erit $t = (\frac{1}{2}\int xxyydx + \frac{1}{8}\int y^4dx,).\pi g : \int \beta xdp$. Atque ex hiſce jam omnibus emergent canones generaliſſimi, quales ſequens tabella exhibet:

ſi po-

ſi ponantur $A = \int y dx$, $I = \int xyy dx$.
$B = \int xy dx$, $K = \int xxyy dx$.
$C = \int xxy dx$, $L = \int y^4 dx$.
$D = \int y^3 dx$. $N = y^3 x$.

In figuris agitatis in $\begin{cases} \text{Planum } t = gC : \int \beta x dp. \\ \text{Latus } t = (gC + \frac{1}{3} gD) : \int \beta x dp. \end{cases}$

In ſolidis rotundis $t = (\frac{1}{2}\pi g K + \frac{1}{8}\pi g L) : \int \beta x dp$.

Hi canones ſunt generales, quia deſerviunt in omni caſu gravitatis uniformis aut pro libitu variabilis, nam, ut jam ſupra dictum, βdp generaliter indicat pondus abſolutum cujusque elementi dp figuræ oſcillantis, unde cum β infinitis modis variare poſſit, exinde ſatis in propatulo eſt, hos canones infinities infinitos diverſos caſus omnes complecti.

Si β eſt conſtans, præcedentes canones mutabuntur in eos, quos hæc altera tabella repræſentat.

$t = gC : \beta B$ - - - - - - - $\left.\begin{matrix}\text{Planum} \\ \text{Latus}\end{matrix}\right\}$ agitatis.
$t = (gC + \frac{1}{3} gD) : \beta B$ pro figuris in
$t = (gK + \frac{1}{4} gL) : \beta I$. Pro ſolidis rotundis.

Ut ſaltem uſum horum poſteriorum canonum oſtendam, eſto figura BAD circa axem QQ oſcillans ſectio conica, cujus æquatio generalis ſit $\pm aa \mp ee \pm 2ex \mp xx = \frac{aa}{bb} yy$, in qua a deſignat ſemilatus transverſum, b ſemiaxem conjugatum, e diſtantiam puncti ſuſpenſionis Q à centro ſectionis, ac denique x, y coordinatas QC, CB. Si æquatio curvæ differentialis $\pm edx \mp xdx = \frac{aa}{bb} ydy$, ducatur in y, habebitur $\pm edx \mp xdx$ in $y = \frac{aa}{bb} yydy = \pm eydx \mp xydx = \frac{aa}{bb} yydy = \pm edA \mp dB$, &

per antitheſin - - - - - - $\pm dB = \mp edA - \frac{aa}{bb} yydy$. Et

integrando - - - - - - - $\pm B = \pm eA - \frac{aa}{3bb} y^3$.

Porro, quia (ſecundùm hypotheſin) $N = y^3 x$, cujus differentialis ducta in $\frac{aa}{bb}$ præbet - - - $\frac{aa}{bb} dN = \frac{aa}{bb} y^3 dx + \frac{3aa}{bb} xyydy$.

Ducatur æquatio curvæ in ydx, & fiet $\frac{aa}{bb}y^3dx = (\pm aa \mp ee).$
$dA - \frac{2aae}{bb}yydy \mp dC$ } Add.
Aqu. verò differentialis in $3xy$ ducta præbet $\frac{3aa}{bb}xyydy =$
$\pm 3eedA - \frac{3aae}{bb}yydy \mp 3dC$

Eritque ſumma $\frac{aa}{bb}y^3dx + \frac{3aa}{bb}xyydy = \frac{aa}{bb}dN = (\pm aa \pm 4ee).\ dA - \frac{5aae}{bb}yydy \mp 4dC.$ Hujus integralis diviſa per 4. præbebit $C = (ee + \frac{1}{4}aa).\ A \mp \frac{5aae}{12bb}y^3 \mp \frac{aa}{4bb}xy^3$ (vel N).

Atqui B ſupra inventa eſt, ſcilicet $B = eA \mp \frac{aa}{3bb}y^3.$

Supra verò erat $\frac{aa}{bb}dD\ (= \frac{aa}{bb}y^3dx) = (\pm aa \pm ee).\ dA - \frac{2aae}{bb}yydy \mp dC.$

Et integrando reperietur $\frac{aa}{bb}D = (\pm aa \pm ee).\ A - \frac{2aa}{3bb}y^3 \mp C$ (vel ſubſtituendo hujus C valorem inventum) $= \pm \frac{3}{4}aaA - \frac{aae}{4bb}y^3\ \frac{aa}{4bb}xy^3.$ Atque adeo multiplicando æquationem per $\frac{bb}{aa}$, invenietur $D = \pm \frac{3}{4}bbA - \frac{1}{4}ey^3 - \frac{1}{4}xy^3.$

In hiſce formulis omnibus A ſignificat aream ABC, unde, ſi valores reperti literarum B, C, D ſubſtituantur in duabus primis æquationibus poſterioris tabellæ, habebitur valor incognitæ t pro omni ſectione conica in planum & in latus agitata tam in aëre vel in vacuo, quam intra quemlibet liquorem; ſi in vacuo, erit $g = \beta$, & ſi in aliquo liquore, cujus gravitas ſpecifica ſit ad gravitatem ſpecificam figuræ oſcillantis, ut 1 ad n, erit $\beta = \frac{n-1}{n}g$.

Ex hiſce repertis facili negotio deduci poſſunt omnia, quæ Celeb. Jac. Bernoulli tribus tabellis complexus eſt in Actis Acad. Reg. Pariſ. Scient. 1703. ad 1. Dec. cui propterea non diutius immorabor, nec etiam oſtendere neceſſum duco, quomodo in ſectionibus conicis valores literarum I, K, L, inveniri debeant, cum hæc res ne tyronibus quidem negotium faceſſere poſſit, quandoquidem y in harum quantitatum elementis ubique ad duas dimenſiones aſcendit, adeo ut

ut quantitates inde reſultent, quæ abſque ulla alia reductione integrabiles exiſtant.

IX. *De Curvis Algebraicis per quotlibet data puncta ducendis.* Circa finem capitis VII. Lib. II. §. 283. mentionem feci problematis ducendæ curvæ algebraicæ per quotcunque puncta poſitione data, cujus ſolutionem Summus Newtonus primus invenit: ejus tamen ſolutionem mihi videre non contigit, excepta ea, quam in Lemmate V. Lib. III. Princ. Phil. Natur. ſine omni analyſi & demonſtratione tradit, ubi lineam parabolici generis per quotlibet data puncta ducere docet. Hujus problematis ego ſolutionem annis 1704. & 1705. aggreſſus ſum & obtinui, quam cum Illuſt. Leibnitio per literas communicavi, quæ ſolutio ſummo viro non prorſus diſplicuit, ut ex literis ejus annis 1705. & 1706. perhumaniter ad me datis colligi poteſt. Occaſionem de hoc problemate cogitandi mihi præbuit epiſtola Newtoni ad Oldenburgium, in quâ hujus problematis meminit, & ex pulcherrimis id prædicat eorum, quæ ſolvere deſideraſſet. Sed ad rem:

Si ergo per puncta quotcunque A, 1A, 2A, 3A, &c. & C ducenda ſit curva algebraica, ſeu analytici generis, CDA, per alterutrum C extremorum punctorum linea duci poteſt quæcunque CB, quæ inſtar axis ſit, ad quem ex ſingulis datis punctis ordinatæ AB, 1A1B, 2A2B, &c. demittantur, producendæ ſubter axem in L, 1L, 2L, &c. & ad alteram axis partem ſint curvæ quæcunque CFL, CGM, CHN, CIO, CKP, &c. Conſiderentur jam ſingulæ AL, 1A1L, 2A2L, &c. tanquam totidem vectes ponduſculis A, L, M, N, O, P, &c. in punctis, hiſce literis indicatis, onuſti, ſed quorum centra æquilibrii ſingula reperiantur in axe CB, ſcilicet in punctis ejus B, 1B, 2B, 3B, &c. & ſequetur, quòd, ducta qualibet DF reliquis AL, &c. parallela, atque curvis ſubter axem occurrente in punctis F, G, H, I, K, &c. axique in E, hujus lineæ ſeu vectis DF, in punctis D, F, G, H, I, K, &c. ponduſcula eadem ac prius A, L, M, N, O, P, &c. appenſa habentis, & centrum æquilibrii horum ponduſculorum in E, brachium ED futurum ſit ordinata curvæ regularis CDA per ſingula puncta A, 1A, 2A, 3A, &c. C tranſeuntis, perinde ac brachia EF, EG, EH, &c. ordinatæ ſunt curvarum CL, CM, CN, &c. Atqui ex datis EF, EG, EH, EI, EK, &c. & ponderibus A, L, M, N, O, P, &c. invenietur ordinata ED in curva quæſita CDA. Tota ergo difficultas reducitur ad inventionem ponderum A, L, M, N, O, P, &c. Fig. 155.

 vel

vel proportionis horum. Atqui principium vectis præbet ſequentes æquationes

1. $A.AB = L.LB + M.MB + N.NB + O.OB + P.PB.$
2. $A.1A1B = L.1L1B + M.1M1B + N.1N1B + O.1O1B + P.1P1B.$
3. $A.2A2B = L.2L2B + M.2M2B + N.2N2B + O.2O2B + P.2P2B.$
4. $A.3A3B = L.3L3B + M.3M3B + N.3N3B + O.3O3B + P.3P3B.$
5. $A.4A4B = L.4L4B + M.4M4B + N.4N4B + O.4O4B + P.4P4B.$
6. $A.5A5B = L.5L5B + M.5M5B + N.5N5B + O.5O5B + P.5P5B.$

Hæ æquationes continuò à ſe invicem ſubductæ, ſcilicet ſecunda à prima, tertia à ſecunda, quarta à tertia & ſic deinceps, atque reſiduæ diviſæ per reſpectivas differentias ordinatarum AB, 1A1B; 1A1B, 2A2B; 2A2B, 3A3B, &c. habebuntur quinque æquationes, in quibus ſingulis A erit ex una parte ſola, & ſi in reliquis membris, pro ſingulis $BL - 1B1L$; $BM - 1B1M$; $BN - 1B1N$, & ſic deinceps, diviſis per $AB - 1A1B$, ſcribantur Q, R, S, T, V, in quinque reſiduis æquationibus, & eæ eodem modo tractentur ac ſex primæ, ſequentes ſcilicet ab antecedentibus ſubducendo, relinquentur quatuor novæ, quæ per reſpectivas $Q - Q1$, $Q1 - Q2$, $Q2 - Q3$, $Q3 - Q4$ dividantur & pro $R - R1 : Q - Q1$; $S - S1 : Q - Q1$; $T - T1 : Q - Q1$; $V - V1 : Q - Q1$; ſcribantur r, s, t, u; item pro $R1 - R2 : Q1 - Q2$; $S1 - S2 : Q1 - Q2$, &c. $r1, s1, t1, u1$. Pro $R2 - R3 : Q2 - Q3$; $S2 - S3 : Q2 - Q3$, &c. $r2, s2, t2, u2$; & ſic porro eodem ordine, & hæ ſubductiones ac diviſiones continuentur usque dum unica tantum ſuperſit æquatio, poterunt in quantitatibus datis omnes A, L, M, N, O, P, &c. exhiberi, aut ſaltem omnes excepta ultima P, quæ arbitrariæ magnitudinis eſt, nam factis debitis reductionibus invenietur

$O = -P\omega.$
$N = -O\tau - P\eta.$
$M = -N\sigma - O\theta - Pv.$
$L = -Mr - Ns - Ot - Pu.$
$A = LQ + MR + NS + OT + PV.$ In his æquationibus eſt $dLB : dAB = Q$; $dMB : dAB = R$; $dNB : dAB = S$, $dOB : dAB = T$; $dPB : dAB = V$. Sic $d1L1B : d1A1B = Q1$; $d1M1B : d1A1B = R1$; $d1N1B : d1A1B = S1$, &c. Nec non $d2L2B : d2A2B = Q2$; $d2M2B : d2A2B = Q2$; &c. Ubi notandum literam d cuilibet ordinatæ præpoſitam ſignificare differentiam, inter hanc ordinatam ipſique proximam verſus

ſus C in eadem curva; reliquæ quantitates ſic etiam facile definiuntur, ſcilicet:

$r = dR : dQ; r1 = dR1 : dQ1$, &c.			
$s = dS : dQ; s1 = dS1 : dQ1$, &c.	$\sigma = ds : dr; \sigma 1 = ds1 : dr1$ &c.		
$t = dT : dQ; t1 = dT1 : dQ1$; &c.	$\theta = dt : dr; \theta 1 = dt1 : dr1$ &c.	$\tau = d\theta : d\sigma; \tau 1 = d\theta 1 : d\sigma 1$	
$u = dV : dQ; u1 = dV1 : dQ1$; &c.	$\upsilon = du : dr; \upsilon 1 = du1 : dr1$ &c.	$\eta = d\upsilon : d\sigma; \eta 1 = d\upsilon 1 : d\sigma 1$	$\omega = d\eta : d\tau$.

Hoc loco litera *d* ſignificat differentiam inter magnitudinem, cui præfigitur & alteram eadem litera, ſed cum unitate adſcripta indicatam, ſic $dR = R - R1$, $dQ = Q - Q1$; $dR1 = R1 - R2$, & ſic de reliquis. Inventis ita valoribus ponderum A, L, M, N, O, &c. iidem ſubſtituendi ſunt in æqualitate A. DE = L. FE + M. GE + N. HE + O. IE + P. KE, atque ſic per ordinatas FE, GE, HE, IE, KE, &c. & alias datas quantitates aſſignari poteſt ubique ordinata DE curvæ CDA per data puncta A, 1A, 2A, &c. tranſeuntis. Quod erat inveniendum.

Coroll. I. Curva genita CDA ejuſdem ſemper eſt gradus cum curva gradus altiſſimi ex generatricibus CFL, CGM, CHN, &c.

Coroll. II. Area genitæ CDA ex areis generatricium ſemper inveniri poteſt. Eſt enim generaliter A. CDE = L. CFE + M. CGE + N. CHE + O. CIE + P. CKE. Unde, ſi hæ areæ curvarum generatricium ſint quadrabiles, etiam figura genita quadrabilis erit.

Coroll. III. Si curvæ genitrices ſunt generis parabolici, earum areæ ſunt quadrabiles, ac proinde etiam genita quadrabilis exiſtet: cum igitur pro generatricibus curvæ quæcunque eligi poſſint, atque adeò curvæ quadrabiles, inde clarum eſt omnes curvas per appropinquationem quadrabiles eſſe, tot enim, quot libuerit, in ea poſſunt puncta aſſumi, & per ea curva quadrabilis duci, cujus area curvæ propoſitæ areæ quam proxime æqualis erit.

Coroll. IV. Imò omnis curva per appropinquationem rectificari poteſt. Curvarum enim rectificatio ad quadraturas reducitur, quæ per præcedens corollarium, per appropinquationem, ſemper habentur. Idem intelligendum de centris gravitatis figurarum & ſolidorum, tum etiam de hiſce ſolidis ipſis aliiſque. Hæc enim omnia quam proxime vero haberi queunt.

Coroll. V. Ex hiſce etiam cognoſcitur *maximus* punctorum datorum numerus, per quæ curva dati gradus duci poteſt. Hic enim numerus *eſt ſemiſſis producti ex exponente gradus curvæ in eundem exponentem ternario auctum.* Hoc modo ſcimus lineam primi gradus, ſeu rectam, non niſi per 2. puncta, poſitione ut libet data, duci poſſe; eſt enim

enim $2=\frac{1.4}{2}$, ſectionem conicam per quinque, nam $5=\frac{2.5}{2}$. Curvam tertii gradus per novem, nam $9=\frac{3.6}{2}$.

Fig. 156. *Aliter*. Loco generatricium aſſumi poſſunt lineæ rectæ AF, 1A1F, 2A2F, &c. inter ſe parallelæ, & quemlibet angulum cum axe CA continentes atque, neceſſitate ita poſtulante, ſupra axem producendæ, ut ſchema oſtendit. Sint ergo puncta, per quæ curva duci debet B, 1B, 2B, &c. C. Per B agatur BN æquidiſtans AC, & ex ſingulis punctis datis B agantur perpendicula BA, 1B1A, &c. producenda ſurſum in 1O, 2O, &c. deinde ducta ubilibet recta MG parallela AB obliquas AF ſecante in punctis, G, H, I, K, L, &c. & axem AC in E. Quibus peractis fiat ubilibet MD = G. EG + H. EG. EH + I. EG. EH. EI + K. EG. EH. EI. EK − L. EG ... EL, in qua valores aſſumtarum G, H, I, K, L ſunt definiendi ſequenti ratione. Si punctum E cadit in A, linea EG evaneſcet, & reliquæ HE, IE, &c. ſupra axem erunt, verum quoniam EG jam in punctum A contracta nulleſcit, & in omnia reliqua membra influit, erit MD in BA nulla. Sin vero E cadit in punctum 1A, fiet EG tunc = 1A1P, & EH = 0, adeoque eo caſu, quo MD fit 1O1B, erit 1O1B = G. 1A1P, ſeu G = 1O1B : 1A1P. dicatur GI = 2O2B : 2A2P, G2 = 3O3B : 3A3P, &c. Porrò ſi punctum E cadit in 2A, fiet MD = 2O2B, & EG = 2A2P, HE = 2A2Q, & IE = 0, ergo 2O2B = G. 2A2P + H. 2A2P. 2A2Q, 3O3B = G. 3A3P + H. 3A3P. 3A3Q + I. 3A3P. 3A3Q. 3A3R, atque ita deinceps; ex quibus omnibus ſequens reſultat tabella, poſtquam ſcilicet ſingulæ æquationes ad reſpectivas AP applicatæ fuerunt:

G(= 1O1B : 1A1P) = G
G1(= 2O2B : 2A2P) = G + H. 2A2Q
G2(= 3O3B : 3A3P) = G + H. 3A3Q + I. 3A3Q. 3A3R
G3(= 4O4B : 4A4P) = G + H. 4A4Q + I. 4A4Q. 4A4R + K. 4A4Q. [4A4R. 4A4S
&c. &c. &c. &c.

Si porro prima à ſecunda, ſecunda à tertia, tertia à quarta, atque ita porro ſubducantur, erit G1 − G = H. 2A2Q; G2 − GI = H. 3A3R + I. 3A3Q. 3A3R; &c. Et ponendo *d*G, *d*G1, *d*G2 pro G1 − G, G2 − G1, G3 − G2, &c. fient H = *d*G : 2A2Q; H1 = *d*G1 : 3A3R; H2 = *d*G2 : 4A4S; &c. & I = *d*H : 3A3Q; I1 = *d*H1 : 4A4R; &c. ac denique K = *d*I = 4A4Q. Et ſic porrò; nam ex hiſce continuationis lex ſatis patet. Inventi valores magnitudinum G, H, I, K, &c.

K, &c. in ſuperiori æqualitate MD = G.GE + H.GE.HE + I.GE.HE.IE + K.GE.HE.IE.KE, &c. ſubſtituantur, dabitur ſic ipſa MD in lineis GE, HE, IE, KE, LE, &c. & magnitudinibus datis, atque adeò punctum D in curva quæſita. Quod erat ſecundo inveniendum.

Coroll. I. Si rectæ AF, 1A1F, &c. angulo ſemirecto ad AC inclinatæ ſunt, provenit caſus ſecundus hujus problematis ab Illuſtr. Newtono ſolutus Lemm. V. Lib. III. Princ. Phil. Nat. in ejus ſolutione enim a, b, c, d, e, f, &c. idem prorſus ſunt cum G, H, I, K, L, &c.

Coroll. II. Iisdem poſitis, quæ in præcedenti corollario, ſi intervalla ſingula A1A, 1A2A, 2A3A, &c. ſint æqualia & dicantur p, & differentiæ ordinatæ AB, prima, ſecunda, tertia, &c. erunt $G = \delta : p$; $H = \delta 2 : 2.pp$; $I = \delta 3 : 2.3.p^3$, &c. quod congruit ſolutioni Newtonianæ primi caſus in Lemmate citato.

Coroll. III. Si inſuper AE vel EG dicatur z, DE, u, & AB $= y$, erit $u = y - Gz - H.(zz - pz) - I.(z^3 - 3pzz + 2ppz) - K.(z^4 - 6pz^3 + 11ppzz - 6p^3z)$ — &c. & area ABDE $= yz - \frac{1}{2}Gzz - H.(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}pzz) - I.(\frac{1}{4}z^4 - pz^3 + ppzz) - K.(\frac{1}{5}z^5 - \frac{3}{2}pz^4 + \frac{11}{3}ppz^3 - 3p^3zz)$ — &c. Hoc loco enim y eſt conſtans, & z ac u ſunt variabiles. Hinc, ſi p ſunt indefinite parvæ, erunt ſingulæ $p = dz$, & ipſæ δ, $\delta 2$, $\delta 3$, &c. hoc caſu fient dy, $-ddy$, $+dddy$, $-d^4y$, &c. & in præcedenti ſerie membra omnia, quæ p continent, evaneſcent, totaque ſeries abibit in $yz - \frac{1}{2}Gzz - \frac{1}{3}Hz^3 - \frac{1}{4}Iz^4 +$ &c. = areæ ABDE, atqui ſunt $G = \frac{dy}{dz}$, $H = \frac{-ddy}{2.dz^2}$, $I = \frac{+dddy}{2.3.dz^2}$; &c. ergo area ABDE $= yz - \frac{zzdy}{2dz} + \frac{z^3ddy}{2.3dz^2} + \frac{z^4dddy}{2.3.4dz^3} +$ &c. Quæ eſt ipſiſſima ſeries univerſalis pro quadraturis, quam Celeb. Joh. Bernoulli in Actis Lipſ. 1694. exhibuit, quamque haud dubie ex alio fundamento elicuit.

Cæterum, loco rectarum transverſalium AF, 1A1F, curvæ quæcunque parallelæ aſſumi poſſunt, vel una eademque curva axem in linea CF, verticem verò ſucceſſive in punctis diverſis ipſius CF habens.

X. *De velocitate liquorum per foramina quæcunque ex vaſis erumpentium.* In Propoſitione XXXII. Lib. II. demonſtravimus quidem poſt Clar. Varignonium aliosque celeritates liquorum ex vaſis effluentium in ſubduplicata eſſe ratione altitudinis liquorum ſupra foramina vaſis aquam emittentia, ſed non demonſtravimus, nec quisquam alius quod ſciam, *aquam aliumve liquorem ea velocitate ex vaſe erumpere,*

pere, eadem conſtanter manente aquæ altitudine ſupra foramen, *quam aquæ guttula orificio proxima acquirere poteſt caſu accelerato ex altitudine liquoris ſupra orificium.* Nam hoc principium, inſtar hypotheſeos, ſuppoſuerunt Torricellius, Borellus, Gulielminus aliique, atque exinde recte deduxerunt, aquas eodem tempore per foramina æqualia effluentes, ſeu etiam celeritates effluxus in ſubduplicata eſſe ratione altitudinis aquarum ſupra foramina. Sed hæc ſuppoſitio tantæ non videtur evidentiæ, ut nulla demonſtratione egeat; nam præterquam quod Celeb. Newtonus, Propoſ. XXXVII. Lib. II. Princ. Math. primæ editionis, demonſtrare conatur, aquam ea cum velocitate erumpere ex vaſis, quâ motu ſuo in altum converſo ad dimidiam altitudinem aquæ ſupra foramen evehi poſſit, ſed quam propoſitionem in noviſſimis editionibus omiſit. Torricellius ſuppoſitioni ſuæ, non propter evidentiam, ſed potius propter conſenſum ejus, cum experientia acquievit.

Fig. 157. Eſto vas quodcunque BFC aquæ vel cujusvis alius liquoris homogenei plenum, F foramen ejus, FA altitudo aquæ ſupra foramen F. Concipio columnam aqueam *Ap* per temporis tractum indefinite parvum *dt*, uniformiter urgere particulam aquæ infiniteſimam *p*F, eo ſcilicet tempuſculo, quo hæc particula, quam *p* nominabimus, proprio pondere ſeu gravitate, longitudinem F*f* particulæ *p*F ſeu *p* æqualem acquirere poteſt celeritatis gradum infiniteſimum *u*. Et ſint *g* ſignum gravitatis naturalis, qua ſingula corpora apud nos agitantur, A altitudinis aquæ AF, & denique V velocitatis, qua per foramen F erumpit; M maſſæ tempuſculo *dt* effluentis, ac *m* maſſa particulæ *p*F. Hisce poſitis per §. 31. pondus columnæ *Ap* vel AF exponetur per A.F.*g*; & pondus elementi *p*F per *p*.F.*g*. Sed hæc facta ſunt ut ſolicitationes acceleratrices motus M.V & *m.u*, tempuſculo *dt* generantes; idcirco habemus (§. 130.) $A.F.g.dt : p.F.gdt = M.V : m.u$, id eſt, $A.g : p.q = M.V : m.u$; atqui $M : m = \frac{1}{2}Vdt : \frac{1}{2}udt = V : u$ ex natura motus accelerati in fluidis, ergo $Ag : pg = VV : uu$, atqui $2pg$ (§. 150.) $= uu$, ergo $VV = 2.A.g$; hoc, eſt velocitas V, quâcum aqua per foramen F erumpit (§. 150.) ea eſt, quam particula infiniteſima aquæ *p*F acquirere poſſet motu naturaliter accelerato per deſcenſum ex altitudine A ſeu AF. Quod erat demonſtrandum.

Atque hinc jam tutiſſime deducitur, *quantitates aquæ per idem vel æqualia foramina effluentis, vel etiam celeritates ejus, eſſe in ſubduplicata proportione altitudinum.*

XI. Ca-

XI. Capite XX. Lib. II. expoſui generalem theoriam gravitatis variabilis, cum ſcilicet corpora ſolicitantur ſecundum directiones quaſcunque uniformi tamen lege procedentes, propterea conſideravi has directiones contingere curvam quamlibet, vel, quod eodem recidit, ſuppoſui eaſdem directiones curvæ cuicunque pro libitu aſſumtæ normales eſſe, ad id ut lex continuitatis in hiſce obſervaretur. Sed, quia ſolutio problematis in propoſitione LXXVI. evoluti ea eſt, in quam primum incidi, ideo, quod plerumque accidere ſolet, ejus analyſis geometrica paulo longior atque difficilior evaſit. Verùm poſteaquam hoc opuſculum jam ſub prælo eſſet, faciliorem paulo &, ni fallor, elegantiorem ejuſdem problematis nactus ſum ſolutionem, quam cum analyſi ipſa vel potius demonſtratione cum Benevolo Lectore hoc loco communicare placet. Eſto curva quæcunque AMΩ mobili deſcribenda, ac ſolicitationum gravitatis MX directiones MN ubique normales ſint curvæ cuicunque AY*y* deſcriptæ evolutione BN, quam proinde directiones MN ubique contingent. Tangenti AB ſurſum productæ in Δ curvæ BN in B, agatur per A perpendicularis indefinita CAV, & in quadrante CKΦ centro A & radio quocunque deſcripto ductis AI & AK radiis cum AC angulos CAI, CAK continentibus æquales angulis BA*α*, NMP, in quibus lineæ AB, MN curvæ AMΩ occurrunt, agantur rectæ I*a*, KQ parallelæ AC & producantur usque ad occurſum in *d* & L cum hyperbola O*d*T inter aſymptotas ΔA, AV deſcripta. Circa axem verò AB deſcripta ſit curva quædam DE hâc lege, ut abſciſſa ejus AF æquet ubique homologam interceptam YM inter curvam AY & datam curvam AM mobili deſcribendam, ordinatæ verò FE ordinatam ΔO in hyperbola abſciſſa ejus AΔ poſita = MN. Et, ſi mobile incedat in medio reſiſtente, cujus reſiſtentiæ ſint in compoſita ratione denſitatum & duplicatæ celeritatum, fiat in hyperbola quadrilineum *d*DST vel *d*DΣΘ æquale ſuperficiei cylindricæ, cujus baſis arcus AM curvæ deſcribendæ, quæ cylindrica ſuperficies oritur, ſi in ſingulis punctis arcus AM ad ejus planum perpendiculares erigantur proportionales denſitati medii D, in reſpectivis curvæ punctis, inſervietque quadrilineum *d*S deſcenſui mobilis ex A in M, alterumque *d*Σ aſcenſui ejuſdem mobilis ex M in A. Hiſce præparatis, Fig. 158.

Dico velocitatem mobili in M *acquiſitam poſt deſcenſum per arcum* AM *fore ad celeritatem initialem in* A *in compoſita ratione, ex hiſce tribus* Aa *ad* AQ, *ſeu reciproca ſinus anguli* NMP *ad ſinum anguli* BA*α*, *ex* Aa *ad* AG, *ſeu abſciſſæ minoris ad majorem quadrilinei hyper-*

 bolici

bolici aGHd *æqualis areæ* DEFA, *ac denique ratione* AD *ad* AS *vel* AΣ.

Demonſtr. 1°. Exponant, ſicut in §. 607. MR vel *m*R radium evolutæ curvæ AM in puncto M vel *m* & MX ſolicitationem gravitatis mobile ſecundum MN urgentem, & agatur XZ parallela tangenti curvæ MP in puncto M, eruntque triangula AKQ, MXZ & M*μm* ſimilia, poſteaquam centro *v* arculus *mμ* deſcriptus fuerit, cum in triangulis rectangulis AKQ, MXZ, angulus AKQ alternus ipſius KAC (conſtr.) æqualis ſit angulo PMX, vel ejus alterno MXZ; hinc ZX : MZ = KQ : AQ.

2°. Ducta per *m* alia tangente *mp*, anguli recti RMP & R*mp* præbent *nmp* + *nm*R = NMP + NMR, & KA*k* (= *nmp* − NMP) = NMR − *nm*R = R*ωv* − *nm*R, R*ωv* + NMR = M*vm* − MR*m*. Ergo (§. 129.) $\frac{Kk}{KA}$ (vel propter triangulorum AKQ & K*kκ* ſimilitudinem) $\frac{Qq}{KQ} = \frac{m\mu}{mv} - \frac{Mm}{RM}$, atque adeò $\frac{Mm}{MR} = \frac{m\mu}{MN} - \frac{Qq}{KQ}$. Ducantur rationes M*m* : MR; *mμ* : MN, & Q*q* : KQ in ſequentes, quæ (num. 1. hujus) omnes inter ſe æquales ſunt ZX : MZ; M*μ* : *mμ* & KQ : AQ, prima in priman, ſecunda in ſecundam, &c. fietque ZX. M*m* : MZ. MR = M*μ* : MN, − Q*q* : AQ. Hæ verò poſtremæ rationes ducantur etiam pari ordine in hæc ſequentia rectangula A*a*. *ad*; AΔ. ΔO; AQ. QL, quæ in hyperbola omnia inter ſe æquantur, eritque A*a*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR = ΔO. M*μ* − QL. Q*q* (conſtr.) = FE. F*f* − QL. Q*q*.

3°. Significent porrò AV celeritatem in M acquiſitam, V*u* ejus elementum, R verò reſiſtentiam medii in M & D, ut antea ejus denſitatem; & hisce poſitis (§. 607. num. 11.) habetur, AV. V*u* = ZX. M*m* ∓ R. M*m*, ſeu ducendo unam partem in A*a*. *ad*, alteramque in AV. VW, reperietur A*a*. *ad*. ZX. M*m* ∓ A*a*. *ad*. R. M*m* = AV². WV. V*u*. Verùm, cum (ſecundùm hypotheſin) R ſit ut D. AV², fiat A*a*. *ad*. R = D. AV²; eritque AV². WV. V*u* = A*a*. *ad*. ZX. M*m* ∓ D. AV². M*m*, quia verò (§. 154.) AV² = MZ. MR, applicando præcedentem æquationem ad hanc alteram, ſcilicet membra ejus AV² continentia ad hoc quadratum AV², & reliquum ad MZ. MR, fiet WV. V*u* = A*a*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR, ∓ D. M*m*. Atqui num. 2. in fine reperimus jam A*a*. *ad*. ZX. M*m* : MZ. MR = FE. F*f* − QL. Q*q*; ergo WV. V*u* = FE. F*f* − QL. Q*q* ∓ D. M*m* (vel, quia D. M*m* per conſtr. æquatur vel S*s*. ST ut in deſcenſu, aut − ΣΘ. Σσ, ut in caſu aſcenſionis, cum quadrilinea *d*S & *d*Σ ſingula æquentur, (conſtr.) omnibus D, M*m*, quæ in arcu curvæ deſcribendæ AM continentur)

WV.

WV. Vu = FE. Ff − QL. Qq − ST. Ss (vel ΣΘ.Σσ). Unde, cum hoc idem eveniat reſpectu cujusvis alius curvæ elementi, erit dDVW = AFED − aQLd = dDST (dDΣΘ), vel, quia (conſtr.) quadrilineum aGHd æquatur areæ AFED, = aGHd − aQLd − dDST (dDΣΘ). Hæc enim quadrilinea omnia evaneſcunt cum punctum M cadit in A, vel punctum K in I. Idcirco ratio AV ad AD (§§. 605, 606.) componetur ex directa aA ad GA & duabus reciprocis rationum QA ad aA, & AS vel AΣ ad AD, ac propterea velocitas acquiſita in M eſt ad velocitatem in A ſeu AV : AD = aA. aA. AD : GA. QA. SA (ΣA). Quod erat demonſtrandum.

Iisdem poſitis *erit ſolicitatio gravitatis* MX *ſecundum* MN *ad ſolicitationem* AX *in puncto* A *ſecundum* AB *in compoſita ratione ex directa duplicata ratione* AV *ad* AD, *& inverſa rectanguli ex* MR *in ſinum anguli* NMP *ad rectangulum ex* AR *in ſinum anguli* BAA, *id eſt*, MX : AX = (AV^2 : MR. AQ) : (AD^2 : AR. Aa).

Nam, quia (§. 154.) AV^2 = MZ. MR, vel AK. AV^2 = AK. MZ. MR (vel propter triangula ſimilia AKQ & MXZ rectangulum AQ. MX. æquatur rec-lo AK. MZ) = AQ. MX. MR, & AK. AD^2 = Aa. AX. AR, erit omnino AQ. MR. MX : Aa. AR. AX = AV^2 : AD^2; atque adeo MX : AX = (AV^2 : MR. AQ) : (AD^2 : AR. Aa). Idcirco erit etiam MX : AX = Aa^5. AD^2. AR : AQ^3. AG^2. AS^2 ($A\Sigma^2$). MR. Qui eſt canon generalis, quoties reſiſtentiæ ſunt ut D in AV^2, ſin verò hæ reſiſtentiæ ſint generaliores, ut D. AV^h, exiſtente *h* numero quolibet rationali, ratio AD ad AS obtinebitur methodo jam §. 622. expoſita. In vacuo fit hæc ratio AD ad AS æqualitatis, eoque caſu erit MX : AX = Aa^5. AR : AQ^3. AG^2. MR.

XII. *Iisdem adhuc poſitis* D *eſt generaliter, ut* (3KQ : 2AQ. MR) − (QK : 2AK. MN) − (P : 2MX) − (Rr : $2MR^2$) *& reſiſtentia ad gravitatem, ſeu* ± R : MX = (3KQ : 2AK) − (Rr. AQ : 2AK. MR) − (KQ. AQ. MR : $2AK^2$. MN) − (P. AQ. MR : 2AK. MX). In quibus formulis Rr ſignificat radium oſculi in puncto R curvæ RR, cujus evolutione curva data AM deſcribitur, & P ſignificat exponentem rationis, quam elementum magnitudinis MX gravitatis in M ſecundum MN, habet ad elementum Mm curvæ mobili deſcribendæ. Fig. 158.

Demonſtrationem horum duorum canonum non addo, cum ea ad præcedentium imitationem & normam facile haberi queat. Sed, ut eorum conſenſus cum aliorum inventis appareat, eos caſibus particularibus nonnullis Celeberrimorum virorum Newtoni & Joh. Bernoullii applicabimus.

1°. Sit curva AM ipſe circulus ΦKC mobili deſcribendus à gravitate uniformiter agente ſecundum directiones ipſi AQ parallelas, quo caſu P, & Rr evaneſcunt, MN fit infinita, & MR = AK, propterea erit D, ut 3KQ : 2AQ. AK, hoc eſt, ſicut tangens anguli KAQ & reſiſtentia ad gravitatem, ut 3KQ ad 2AK, plane ut laudatiſſimi Autores invenerunt.

2°. Si loco curvæ AM ſumatur curva, in quâ directiones gravitatis uniformis MN parallelæ ſint inter ſe, erit D ut (3KQ : 2AQ. MR) − (Rr : 2MR²), & $\frac{\pm R}{MX}$ = (3KQ : 2AK) − (Rr.AQ : 2AK.MR). Nam, quia MN in hiſce ſuppoſitionibus ſunt infinitæ, ſingulæ fractiones, in quarum denominatoribus hæ MN reperiuntur, evaneſcent. Vocentur itaque ordinatæ curvæ datæ y, ſecundum quas gravitas uniformis operatur, abſciſſæ reſpectivæ x, radius curvaturæ in M ſeu MR = r, exiſtentibus Mμ = dy & $m\mu$ = dx, poſitis ſcilicet omnibus MN inter ſe parallelis, ratio vero Rr : MR = $dr : ds$, facto elemento curvæ Mm = ds. Adeoque in hiſce ſymbolis erit D ut $\frac{3dy}{2rdx} - \frac{dr}{2rds}$, & $\frac{\pm R}{G} = \frac{3dy}{2ds} - \frac{drdx}{2ds^2}$. Sed exiſtentibus dx conſtantibus erit $r = ds^3 : dxddy$, & $dr = \frac{3dsdy}{dx} - \frac{ds^3dddy}{dxddy^2}$, quibus valoribus in formulis ſubſtitutis reſultat D, ut $dddy : 2dsddy$; & $\pm$ R : G = $dsdddy : 2ddy^2$ qui duo poſtremi canones ad amuſſim conſpirant cum formulis Celeb. Newtoni Propoſ. X. Lib. II. Edit. noviſſimæ Princip. Phil. Nat. Nam, ſi in hiſce noſtris loco dy, ds, ddy & $dddy$ ordine ſubſtituantur Qo, $o\sqrt{1+QQ}$, 2Roo, & 6So^3, quæ in expreſſionibus Newtonianis elementis illis æqualia ſunt, erit omninò D, ut $\frac{3S}{2R\sqrt{1+QQ}}$, & $\frac{\pm \text{Res.}}{\text{Grav.}} = \frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Prorſus ut habet Newtonus loco citato.

Fig. 38. XIII. In demonſtratione Propoſ. XXV. Lib. I. §. 167. irrepſit error, dum elementum ordinatæ ΛE tanquam poſitivum ſpectavimus, idcirco in progreſſu demonſtrationis illius ſigna ipſius Λξ ubique ſunt invertenda, quo facto invenietur $G = \frac{1}{DE^3} + \frac{(-DE.E\Delta.MG^2 + 2.E\Omega.E\Delta.MG^2 + DE.E\Omega.AL^2).nn.\Delta E}{E\Omega.AG^2.DE^5}$. Ponendoque HE = A ∓ e, atque adeo ΔE = ΛE = HE : B, & EΩ = B.HE : B² − C.

HE,

HE, ubi $B = dA : dz$; $C = dB : dz$ & $DE = z$, item $AL = r$, ac $rr - ee = ss$, hæc appoſita formula factis in ea ſubſtitutionibus valorum linearum DE, EΔ. EΩ, prodibit æquatio circa finem §. 169. exhibita. Verum, quia nonnihil elegantior, ut mihi videtur, ſolutio ejuſdem problematis ſeſe mihi obtulit, eam hoc loco apponere placet. Circa rectam AC, tanquam axem, deſcripta ſit curva quæcunque ΠB, radioque etiam pro lubitu ſumto AC, atque adeo centro C circulus AG, cujus tangens in A erit linea recta indefinita OAΠ, ac per quodlibet punctum B curvæ ΠB ductis tangente BV ordinataque BR producenda usque ad occurſum ejus cum circulo in G, dividatur ſubtangens RV in S, ut RS ſit ad totam RV ut 1 ad numerum quemcumque rationalem n, ac jungatur SG, tum ducatur per A recta AL cum CAa continens angulum PAQ æqualem, ubique reſpectivo angulo GSR, atque hoc idem ſi factum fuerit cum tangente & ſubtangente ad punctum curvæ Π, reſultet recta Aλ, quemadmodum in ordine ad punctum B curvæ ΠB provenit AL. Exponat AI celeritatem mobilis curvam AN deſcribentis in puncto A exiſtente centro ſolicitationum centralium D, per punctum I ducta indefinita IK parallela AC, ſumatur in Aλ ſegmentum Aα = AΠ & per α agatur αK parallela AI, rectæ IK conveniens in K, per quod punctum deſcripta intelligatur hyperbola KM inter aſymptotas Aa & AI. Porro in AL ſumta AQ æquali reſpectivæ ordinatæ RB curvæ ΠB ducatur QP parallela AΠ, quæ producta occurrat hyperbolæ in M, ac denique in ordinata MO per hoc punctum M ad aſymptotam AO ducta ac deorſum producta, fiat OF æqualis differentiæ ordinatarum AΠ, RB & punctum F erit in ſcala celeritatum mobilis in curva altera AN incedentis. Hæc autem curva AN ita comparata eſt, ut radii vectores AD = AΠ, & ND = RB, per ejus terminos ducti, angulum ADN contineat, qui ſit ad angulum in circulo ACG, ut 1 ad numerum qui antea n. Eſto Nq curvæ AN tangens in N, ſuper quam cadat perpendicularis Dq, ac centro D deſcripti ſint arcus EN arculusque np, poſitoque in fig. 159. angulo GCg ad ang. NDn = n : 1 agatur gb parallela GB. Fig. 160.

Demonſtr. Quia angulus infiniteſimus NDn eſt ad GCg ut 1 ad n, ſeu (conſtr.) = RS : RV, & (§. 129.) arculus pn ad Gg in compoſita ratione anguli NDn ad angulum GCq, vel 1 ad n, ſeu RS ad RV, & radii DN vel ordinatæ RB ad radium GC, erit pn : Gg = RS. RB : GC. RV; atqui eſt Gg : $b\beta$ (= GC : GR) = GC. RV : GR. RV;

RV; & $b\beta$:Np (vel Bβ) = RV : RB = GR. RV : GR. RB. Ergo ex æquo pn : Np = RS. RB : GR. RB = RS : GR, vel (quia PAQ angulo GSR æqualis factus eſt) = AP : PQ, eſt verò etiam pn : Np = Dq : Nq, ergo AP : PQ = Dq : Nq. hinc, quia AQ (conſtr.) = DN, erit AP vel MO = Dq, & Aa = IK = Dδ. Unde, cum (§. 155.) Dq ſit ad Dδ, ut velocitas in A repræſentata per AI ad velocitatem in N, & in hyperbola KM, ordinata MO ſit ad KI ut AI ad AO, hæc AO omnino exponit celeritatem in N, & cum OF vel AE (conſtr.) æquet differentiam ordinatarum Aπ, RB, id eſt, ordinatarum AD, ND, in utraque figura erunt æquales ipſæ AE, atque adeo curva HIF erit ſcala celeritatum mobilis in curva AN deſcendentis vel aſcendentis, adeoque ducta ejus normali ET exponet ſubnormalis ET (§. 134.) ſolicitationem gravitatis ſecundum ND in curvæ AN puncto N. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. Si D fuerit origo abſciſſarum DR, atque hæ abſciſſæ dicantur A, ordinatæ reſpectivæ RB, z, radius AC, r, diſtantia originis abſciſſarum curvæ πB à centro circuli AH, ſeu DC, e; erit CR = e + A, ſi punctum D cadit inter C & R, ut in figura, vel e = A, ſi inter A & R, ac denique A − e, ſi punctum D cadit extra radium AC; ponamus ergo CR = $e \pm$ A, eritque GR = $\sqrt{(ss \mp 2e\mathrm{A} - \mathrm{A}^2)}$ ubi $ss = rr - ee$, dicatur pariter elementum abſciſſæ DR ſeu Rr = B.dz, eritque RV = Bz, & RS = $\frac{1}{n}$ Bz, ſubſtitutisque omnibus hisce ſymbolis in præcedenti conſtructione, reperietur $\mathrm{AO}^2 = \mathrm{FE}^2 = \frac{1}{zz} + \frac{(ss \mp 2e\mathrm{A} - \mathrm{A}^2).nn}{\mathrm{B}^2 z^4}$, & ex hac elicietur ipſiſſima formula circa finem §. 169. Patet ergo hanc poſteriorem cum priori egregie conſentire.

Hinc, ſi puncta D, C coincidunt, curvaque πB eſt hyperbola inter aſymptotas orthogonales in C convenientes, quarum AC una, erit in curvæ AN puncto N gravitas, ſecundum ND, ut $\frac{1 - nn}{z^3}$ & ipſa curva AN erit ea, cujus Newtonus & Joh. Bernoullius conſtructiones diverſas in ſpeciem, re vera tamen conſpirantes, exhibuerunt, hic in Act. Lipſ. 1713. pag. 129. ille verò Propoſ. XLIV. Lib. I. Princ. Phil. Nat., ut ſupra pag. 80. indicavimus. Hæc curva AN duas aſymptotas habet à centro virium D æqualiter diſtantes; & quidem diſtantia quælibet eſſe debet $\frac{1}{n}$ radii AC in fig. 159, & 160. vel $\frac{1}{n}$ DP

in

in fig. 37. ac proinde altera aſymptota per centrum ire non poteſt, ut per inadvertentiam pag. 81. ſcripſeram. Reliquæ proprietates ejusdem curvæ AN fig. 160. à Bernoullio commemoratæ nullo negotio ex noſtris conſtructionibus eliciuntur, propterea iisdem fuſius explicandis ſuperſedeo.

Cæterum, quæ pag. 80. num. 4. habetur exceptio ipſius caſus, quo p eſt -1, prorſus inutilis eſt, & propoſitio illic memorata absque hac exceptione generaliter obtinet, ſi e vel s ſunt o, ſed hæc exceptio tantum valet in contradictoria ejusdem propoſitionis, ſcilicet non niſi hoc caſu $p = -$, duobusque reliquis $p = +1$, ac $= -2$ exceptis, curvam AN unquam fieri poſſe algebraicam in hypotheſi quod G ut z^p, neutra ex duabus e vel s evaneſcente.

Conſtructio præcedens adhuc elegantior reddi poteſt ducendo RW parallelam GS, & demittendo ſuper eam ex puncto B perpendicularem BW, tum ductis per B & Π parallelis axi AC, ut BΦ & ΠΘ, ſumendoque in priore ſegmentum ΔΦ æquale perpendiculo BW, orieturque curva ΘΦ, in cujus ordinatis, ſi Ππ = AI fuerit ad ΔΩ ut ΦΔ ad ΘΠ, ita ut curva πΩ reciproca fuerit alterius ΘΦ. Hæc reciproca πΩ erit etiam nunc ſcala celeritatum, atque adeo eadem cum curva HIF, ſed ad axem AΠ relata, loco axis HE, ad quem altera HIF exſtructa eſt. In hac conſtructione neque lineis *Al* neque hyperbola KM opus eſt, atque adeo nonnihil ſimplicior facta eſt.

FINIS.

EMENDANDA.

Cum, propter abſentiam à Typographica officina & locorum intervallum typorum correctioni egomet attendere non potuerim, quod in hujus generis operibus vitari vix poteſt, accidit, ut nonnulla ſphalmata in hanc editionem irrepſerint, quorum ea, quæ ſenſum turbare poſſent, ut calamo ſaltem corrigere velit Benev. Lector etiam atque etiam rogo priusquam Opuſculi lectionem incipiat. Reliquos vero minoris momenti errores, qui forte contra dictionis puritatem mihi materiis ipſis magis attento exciderunt, Lector ipſe facile emendabit me non monente, eosque proinde ejus humanitati corrigendos relinquo.

Pag. 9. lin. 23. Molis lege Motus.
Pag. 10. lin. 9. leg. rectæ AE à ſolicitationibus &c.
Pag. 16. lin. 13. PR leg PA.
Pag. 19. lin. 31. leg. trahente.
Pag. 26. lin. 4. BF leg. BT.
Pag. 31. l. 15. leg. ſuperficiem componentes in *ty* incurvatam.
Pag. 39. l. 32. minor. leg. major. Ibid. l. ult. leg. $A = aa : \sqrt{aa+mm}$ fiet $\sqrt{aa+mm} = a$.
Pag. 40. lin. 2. leg. $x^{\alpha}y = 1$. lin. 4. leg. $ydx = x^{-\alpha}dx$. Et lin. 25. poſt *tenacitatem fili in* A, adde, *per* A.
Pag. 43. l. 19. A : BC. leg. A : B*b*. lin. 24. $\int bf - \int Mm$ leg. $\int bf = \int Mm$. Ibid. lin. 25. Z*y* — Nβ, leg. Z*z* — Nβ.
Pag. 45. lin. 4. $m^3dx = aamdm$ leg. $m^3dx = - aamdm$.
Pag. 46. lin. 2. — *anndm* leg. — *nndm*.
Pag. 55. l. 2. Si lege Sic. Pag. 58. l. 9. Nβ.E*e*, leg. Nα. E*e*.
Pag. 66. lin. 8. αL leg. αD. Ibid. l. 23. ang. FA*f* leg. FD*f*.
Pag. 71. lin. 9. Secundi leg. Primi. Pag. 75. l. 28. leg. æquidiſtantes.
Pag. 78. l. 15. $+ AB^3z$ leg. AB^2z. Pag. 80. l. penult. MAD leg. MAL.
Pag. 85. l. 22. leg. Prop. 24. Pag. 94. l. 28. E*e* leg. E*b*.
Pag. 98. l. 23. leg. ſupra ſolicitationem in B.
Pag. 110. l. 19. l. *Corporum.*
Pag. 114. l. 7. leg. *quæ erat communis ipſorum centri gravitatis ante occurſum.*
Pag. 119. Propoſ. XLII, ſcrib. in margine Fig. 53.
Pag. 121. l. 16. A+X+B. leg. A+X+Y+B.
Ibid. l. 24. leg. quam idem B à corpore A celeritate AD ipſum immediate impellente, accepiſſet.
Pag. 132. l. 4. EF leg. ET. Pag. 140. l. 16. leg gravitationis.
Pag. 145. l. 7. leg. Dani. Pag. 159. l. 20. leg. ampleƈtenti.
Pag. 157. Prop. XIII. ſcrib. ad marg. Fig. 66.
Pag. 161. l. 20. in fin. QN, leg. PN. & lin. 28. leg. centro P.
Pag. 167. l. 23, 24 & 28. NE, leg. DE. Pag. 179. l. ult. quia, leg. cum.
Pag. 184. l. 12. dele, hians, l. 13. ſubtili, leg. ſubdiali ſeu externo
Ibid. l. 19. ad margines, leg. in circumferentia ejus.
Ibid. l. 37. marginum, leg. arginum.
Pag 190. l. 2. denſitatis, leg. poteſtatis. Ibid. l. 19. permuta EF & GF.
Pag. 191. l. 13. dele poſteriorem, & lin. 14. dele vel.
Pag. 195. lin. 27. ut denſitates, lege proportionales.
Pag. 197. l. 3. lege, altitudini. Pag. 200. l. 26, $-\frac{2}{3}$ leg. $-\frac{3}{2}$.
Pag. 201. l. 6. leg. Quadrilinea, & lin. 7. leg. æqualia.
Pag. ead. l. 26. leg. Nam quia OA^{1-n}, $O1A^{1-n}$, $O2A^{1-n}$, &c. proportionales ſunt rec-lis OA. AC, O1A1C, O2A2C, &c. ideo hæc rec-la erunt in progreſſione arithmetica, atque adeo &c. ſequendo ut habetur linea 30. poſt, atque adeo &c.
Pag. 203. l. pen. & leg. ut. Pag. 205. l. 5. leg. altitudo.
Pag. 209. l. 16. leg. *d*δ. Pag. 213. l. 14. leg. conſtructionem, *ef*, l. 14. demonſtratam.
Pag. 218. l. 11. leg. FT. Pag. 219. l. 3. leg. datam rationem habebunt, quam &c.
Pag. 224. l. 27. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} - \frac{2}{3}x\sqrt{x})$ leg. $(\frac{2}{3}z\sqrt{z} : \frac{2}{3}x\sqrt{x})$. Pag. 225. l. 28. leg. $m : 1$.
Pag. 228. l. 3. dele quam. Pag. 230. l. 21. ABC leg. ADC.
Pag. 233. l. 21. leg. incluſum. Pag. 241. l. 13. leg. ELV. l. 17. leg. $LV = (aat - t^3) : aa$.
Pag. 242. l. 18. leg. rectæ AR. Pag. 244. l. 32. RM, leg. RA.
Pag. 245. l. 7. leg. *ſi præcedente modo baſi* BR, *modo vertice* E *in directione* AE *id feratur.*
Pag. 248. l. 3. à fine, lineæ FF, lege Circuli FF.
Pag. 250. l. 28. leg. = conſtanti. Pag. 251. l. 18.

leg.

EMENDANDA.

leg. diametro. Ibid. l. 29. LS leg. Ls. Pag. 269. l. 9. init. leg. yv; $+ effdx : aa + yy$.

Pag. 262. l. 25. leg. + D3. Pag. 266. l. 29. leg. Tangentem Hyperbolæ.

Pag. 267. l. 2. leg. dc. Pag. 269. l. 10. leg. §. 464. lin. 21. leg. $x = aa : \sqrt{(aa - zz)}$.

Pag. 271. l. 1. leg. usP. lin. 4. leg. Mμ. Pag. 273. l. 2. Aq leg. Nq.

Pag. 273. l. 33. leg. curva AC minus abſciſſa ejus.

Pag. 306. l. 5. Mlm leg. Llm, & lin. 6. dele eſt.

Pag. 335. ſubter Fig. 134. in margine ſcribe etiam 135.

Pag. 313. l. 10. (MC = LN) leg. (MC — LN): AM. Pag. 214. l. 10. leg. OM. LN : AM.

Ibid. l. 19. SM. leg. OM; & lineis 23, 24, 27, 28. IM leg. OM.

Pag 319. l. 13. GB leg. GH. Pag. 321. l. 4. TA leg. TM.

Pag. 326. l. 7. ſummi leg. ſuam. Pag. 328. l. 14. $a^3aau : cu$, leg. $a^3 - aau : cu$.

Ibid. l. 24. $\frac{ab}{b} du : u$, leg. $\frac{aa}{b} du : u$. Pag. 330. l. 14. $- t =$, leg. $t = \int(aadu$: &c.

Pag. 332. l. ult. & ſeq. pro BK leg. ωK, in Fig. 132.

Pag. 335. l. 14. leg. In eadem DT producta ſumatur ubique DN, quæ ſolicitationem tangentialem gravitatis in curvæ puncto D ex centrali derivatam ſignificet, exponetque ND — DT, &c. Ibid. l. 30. leg. MNEC + el. areæ CTE.

Pag. 336. lineis 12, 13, + ſcribe —. Pag. 338. ad marginem Prop. 73. ſcribe Fig. 135.

Pag. 348. l. 29. BZX, leg. MZX. Pag. 349. l. 11. leg. occurrentibus.

Pag. 360. l. 2. NM² : aa, leg. NM². aa. Pag. 365. l. ult. leg. ABIH = EKRF.

Pag. 366. l 26. in D. DC : CQ, leg. in D = DC : CQ. Pag. 367. l. 27. ſed, leg. ſub.

Pag. 381. l. 9. CV, leg. OV. Pag. 383. l. 31. AD. Ad, leg. 4AD. Ad.

Pag. 390. l. 12. habebuntur, leg. dabunt. Pag. 392. l. 19. GI, leg. G1.

Pag. 393. l. 13 poſt, tertia, &c. adde δ, $\delta 2$, $\delta 3$, &c. Ibid. l. 26. leg. $- \frac{z^4 dddy}{2.3.4.dz^3}$.

Pag. 395. l. 26. ordinatæ leg. ordinata. Pag. 396. l. 12, $- nm$R, Rωv, lege $- nm$R, — Rωv. Pag. 397. l. 1. leg. $\mp$ ST. Ss, & lin. 3, 4. $\mp d$DST.

Pag. 400. lin. 19. $e =$ A, leg. $e -$ A.

IN FIGURIS SUPPLENDA.

Fig. 33. Interſectio rectarum DV, bf vel arcus EIK ſignetur T.

Fig. 41. Initio lineæ punctis ductæ ſubter ES adſcribatur e.

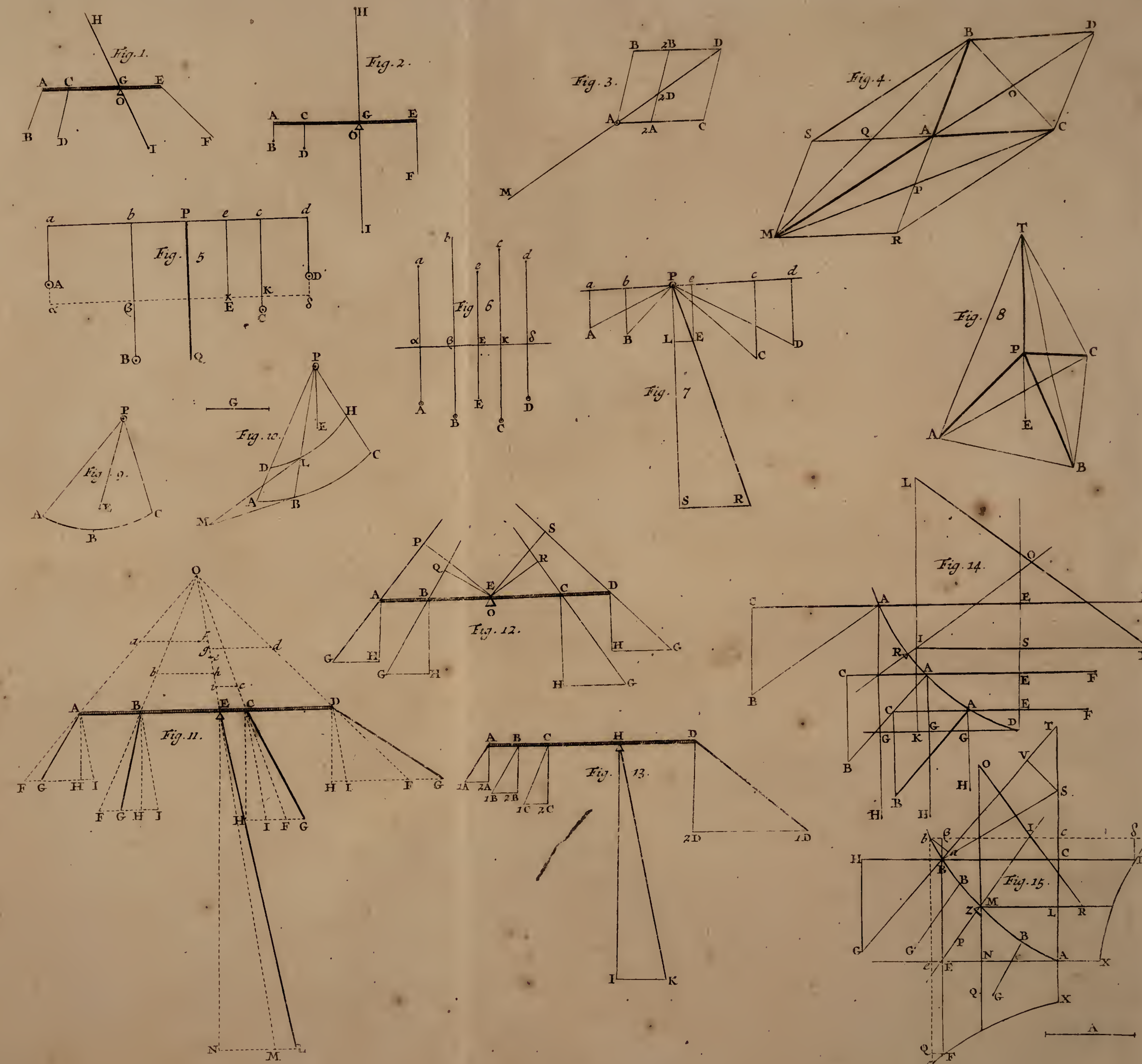
Fig. 117. Interſectio rectarum AP, Oβ notetur f, & linearum fa ac OK litera h. Et jungantur ſi placet, AC, oc.

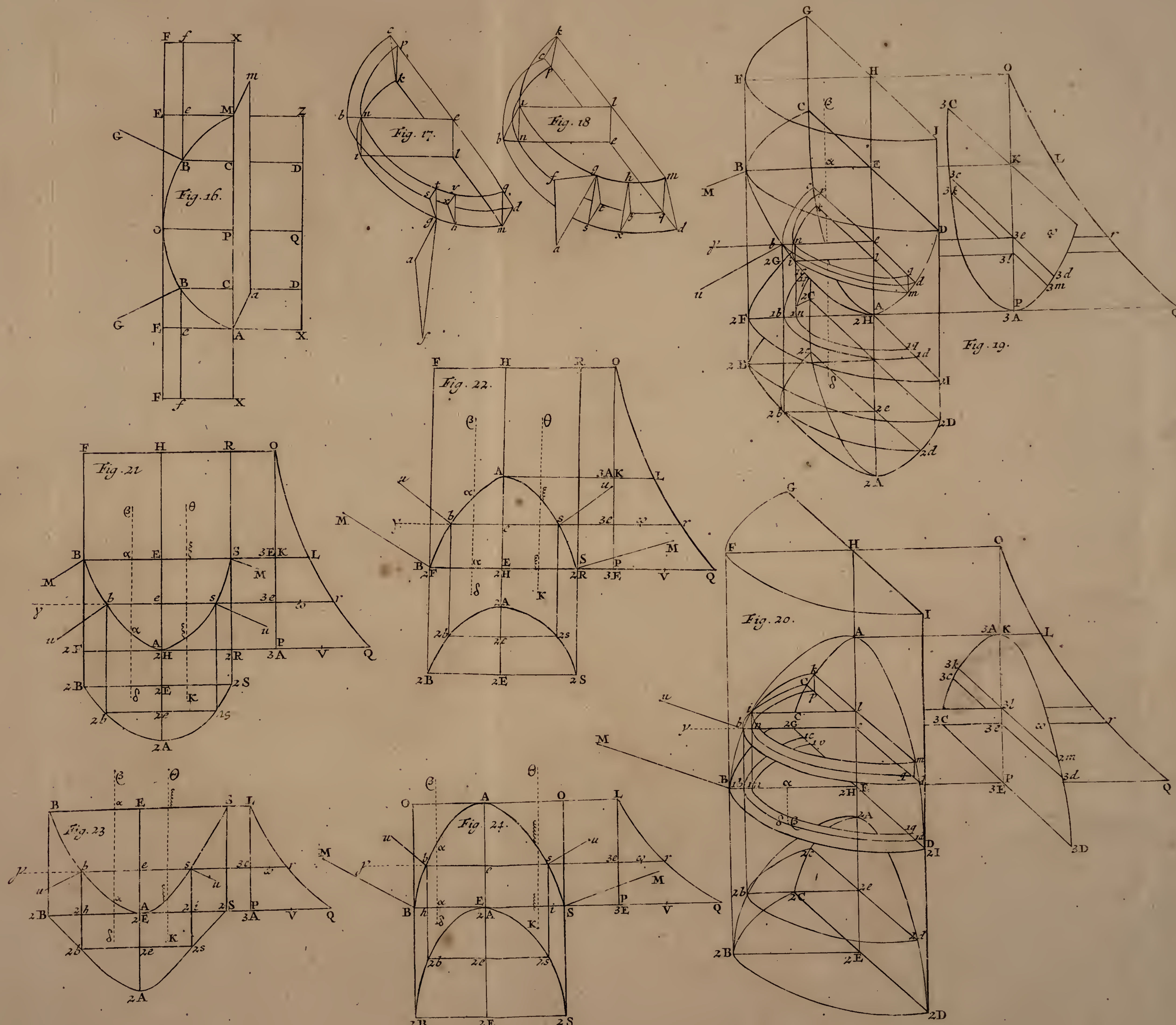
Fig. 125. Jungatur MK.

Fig. 133. Lineæ ſubter DC punctis ſignatæ initio adſcribatur d.

Fig. 138. Accidentale non verò ex rei neceſſitate eſt, quod BC transeat per punctum N, & ordinata IK radio oſculi mR congruat.

Fig. 140. Subter F, G, ſcribatur L, & ſubter E, H, K, ita ut ſigna F, G, I idem punctum axis SB, & EHK idem punctum hyperbolæ TDH deſignent.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.


Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21
Fig. 22.
Fig. 23
Fig. 24.

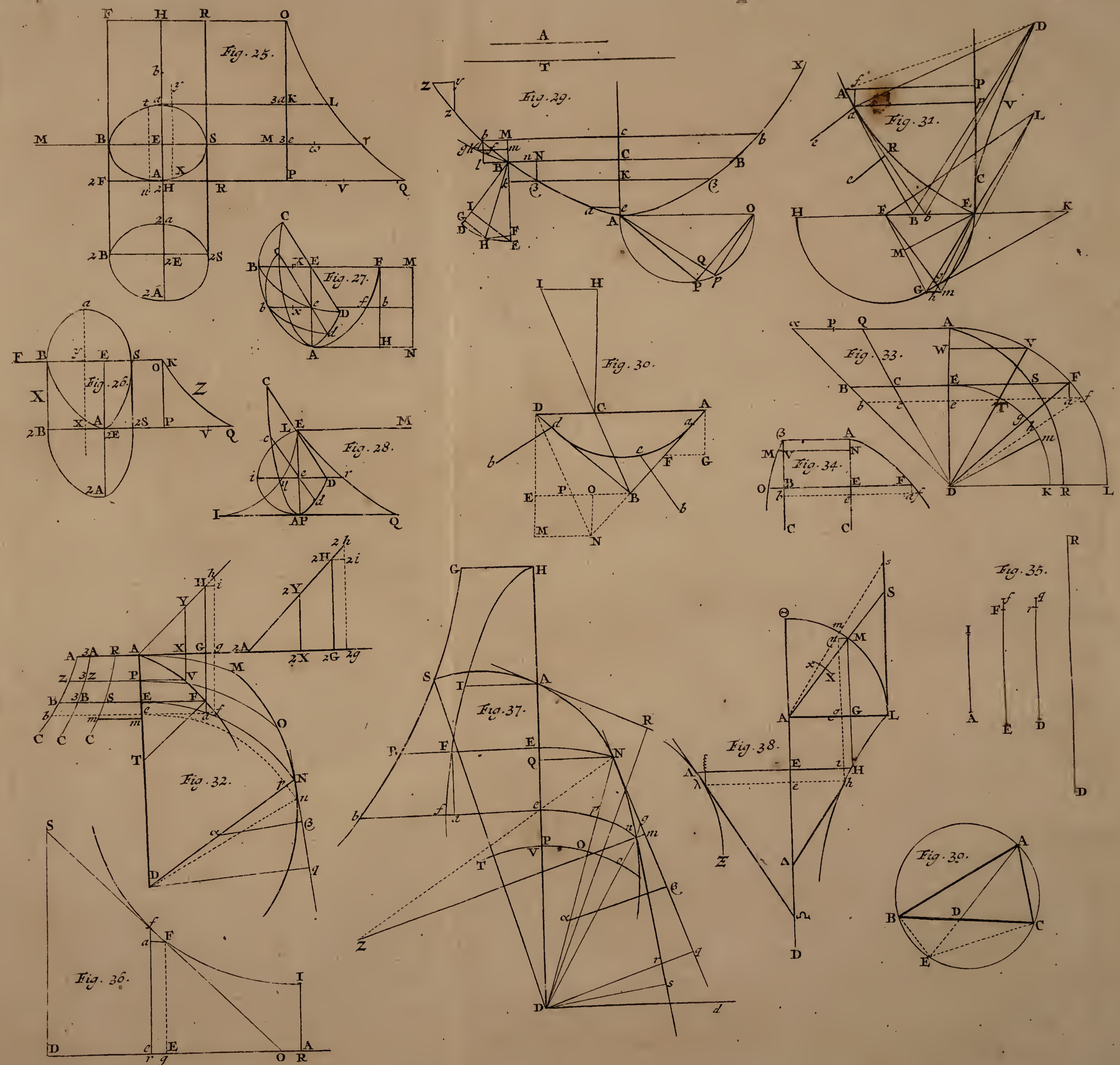
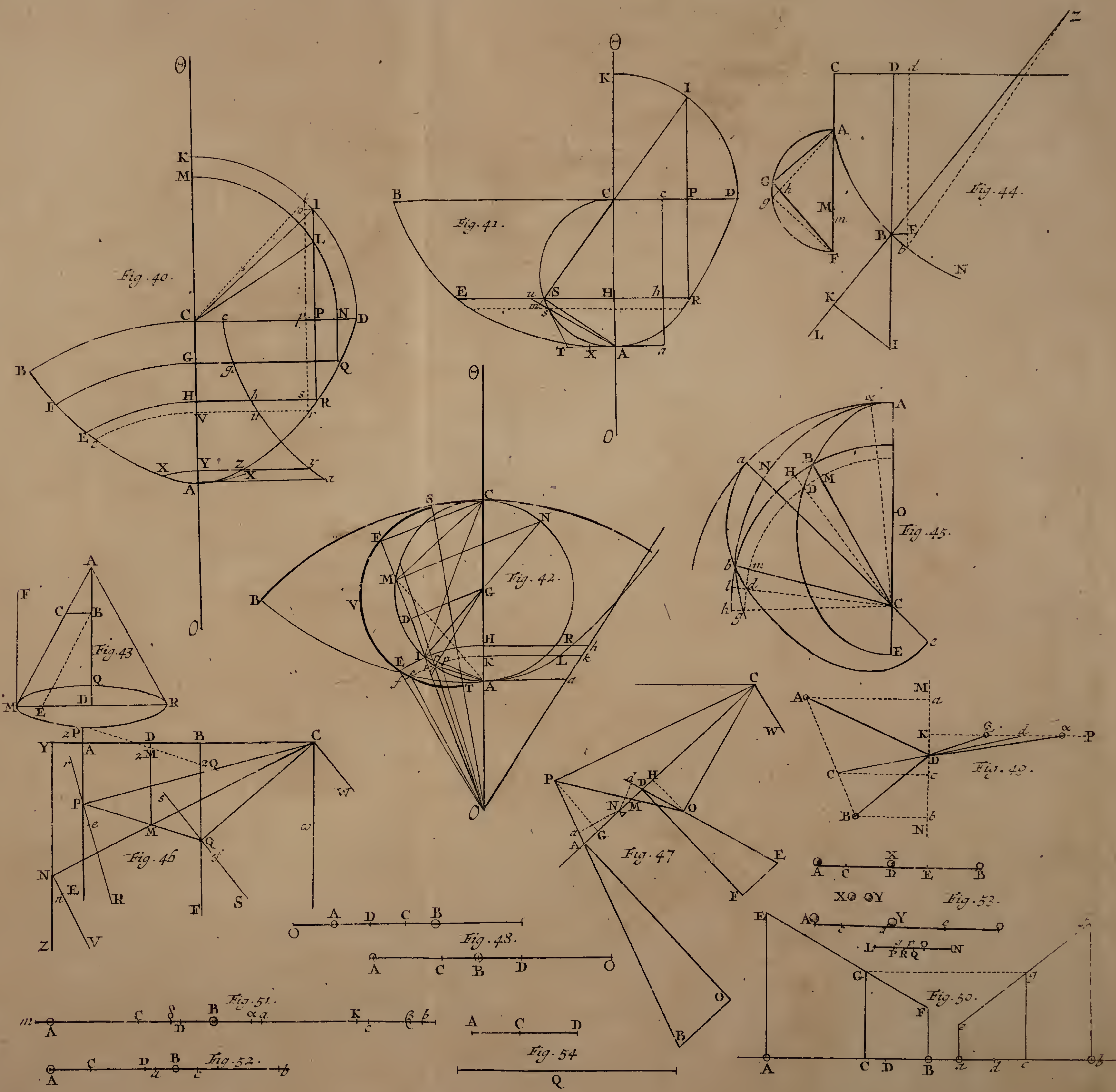
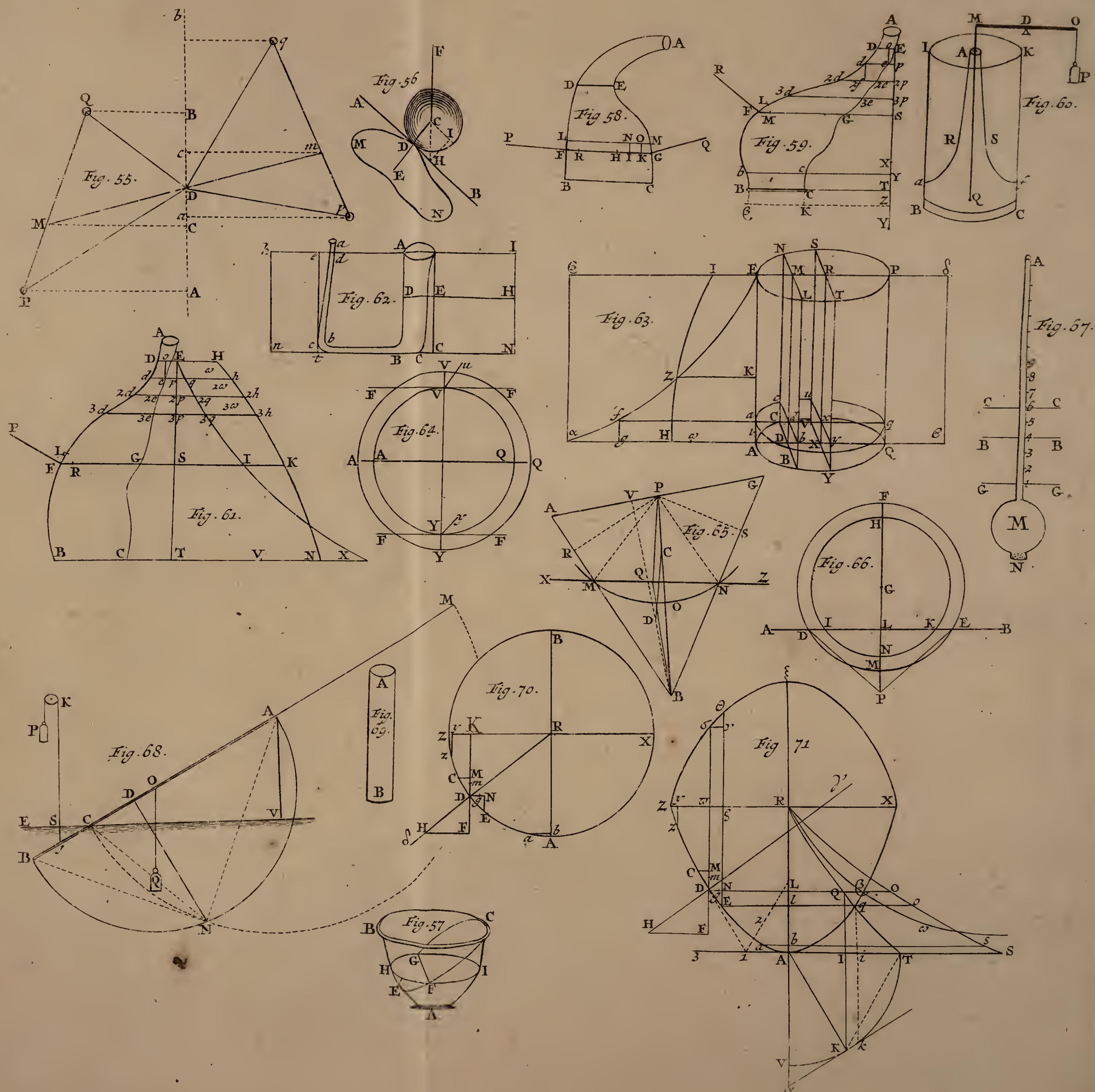
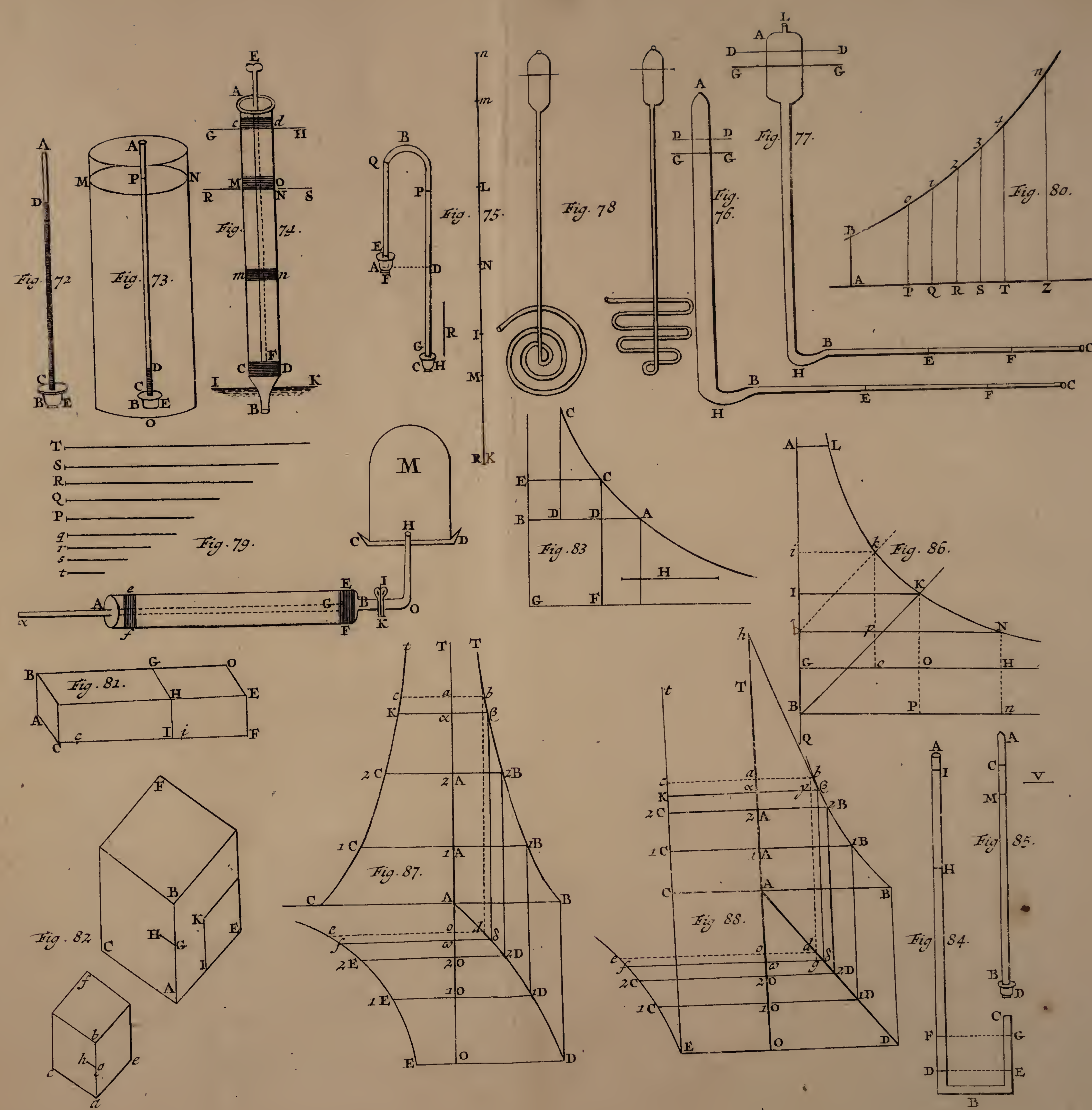
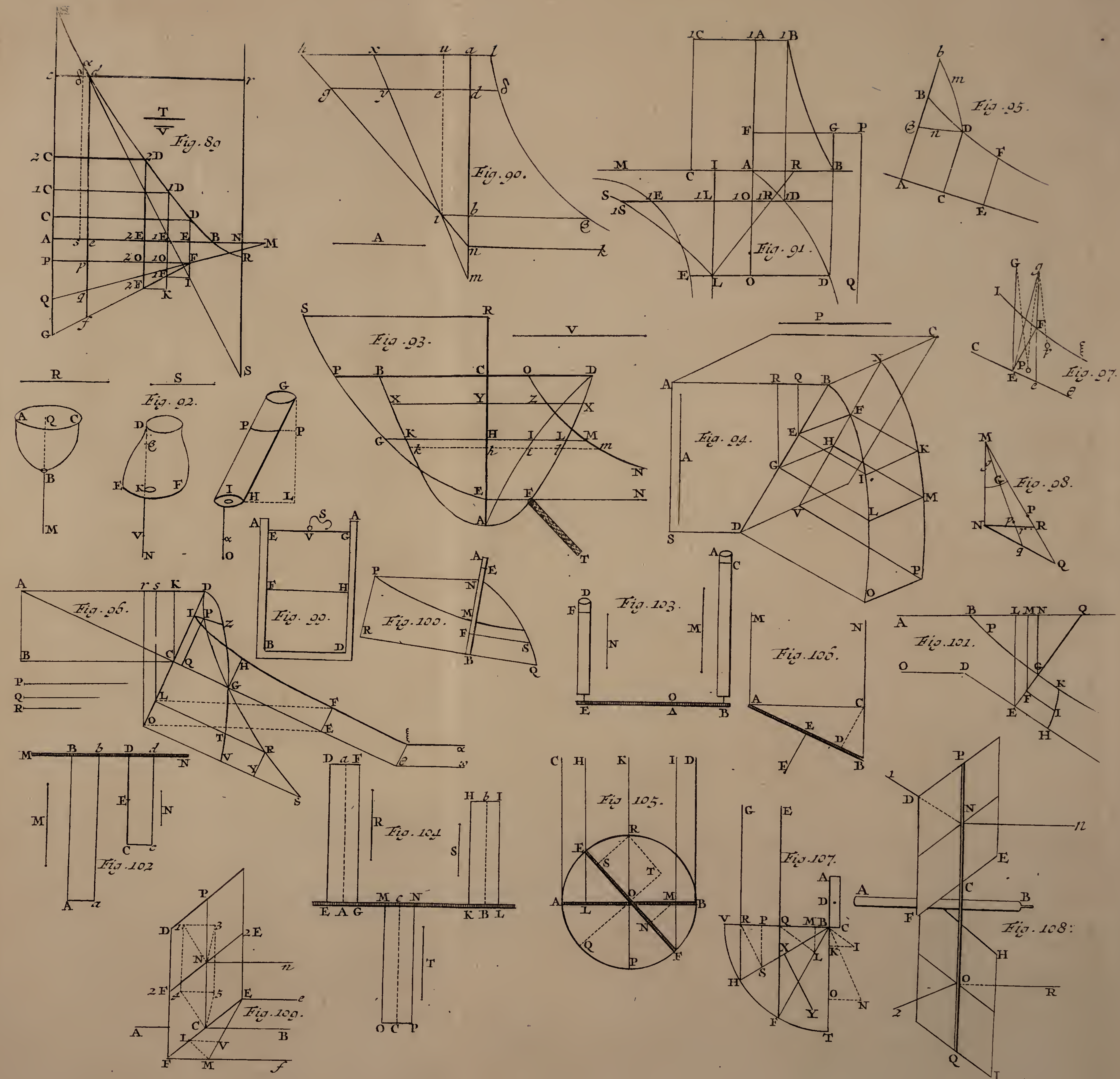


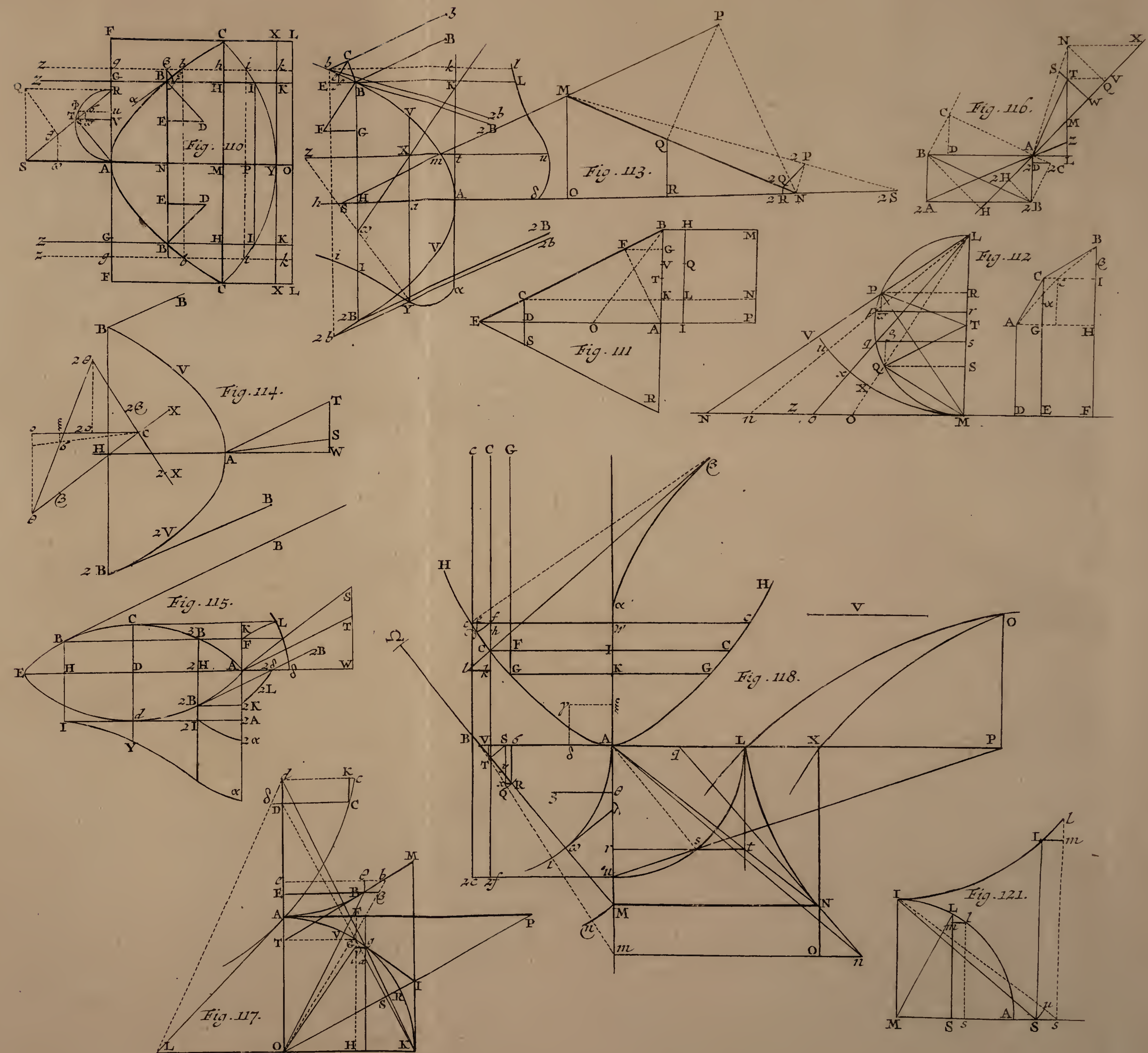
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.


Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46
Fig. 47
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54


Fig. 55.
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig 71


Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76
Fig. 77
Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88


Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.


Fig. 110.
Fig. 113.
Fig. 116.
Fig. 111
Fig. 112.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 121.

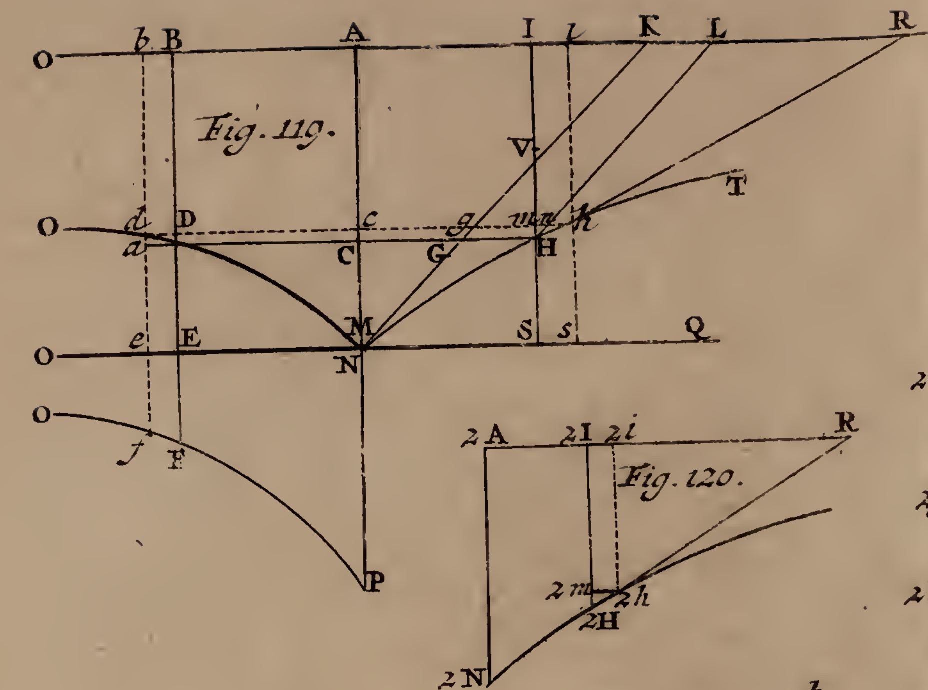
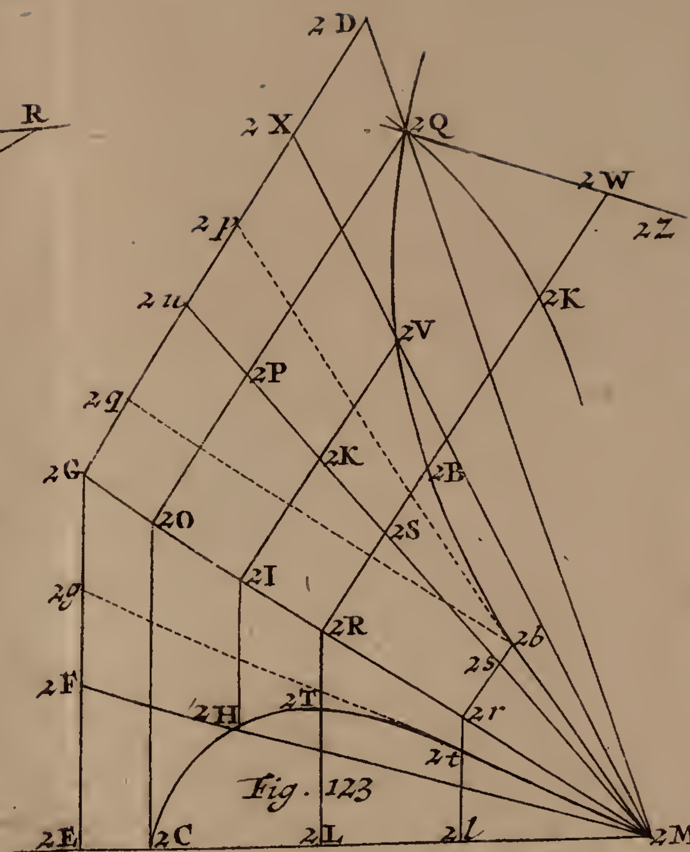
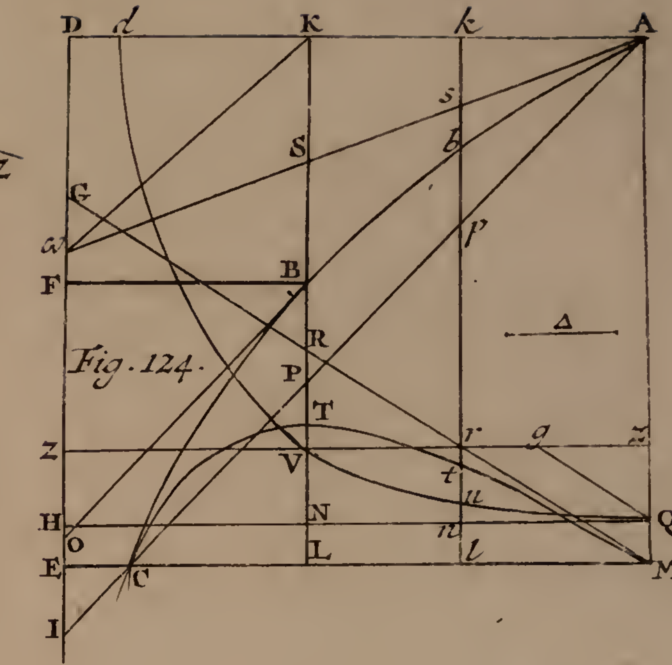
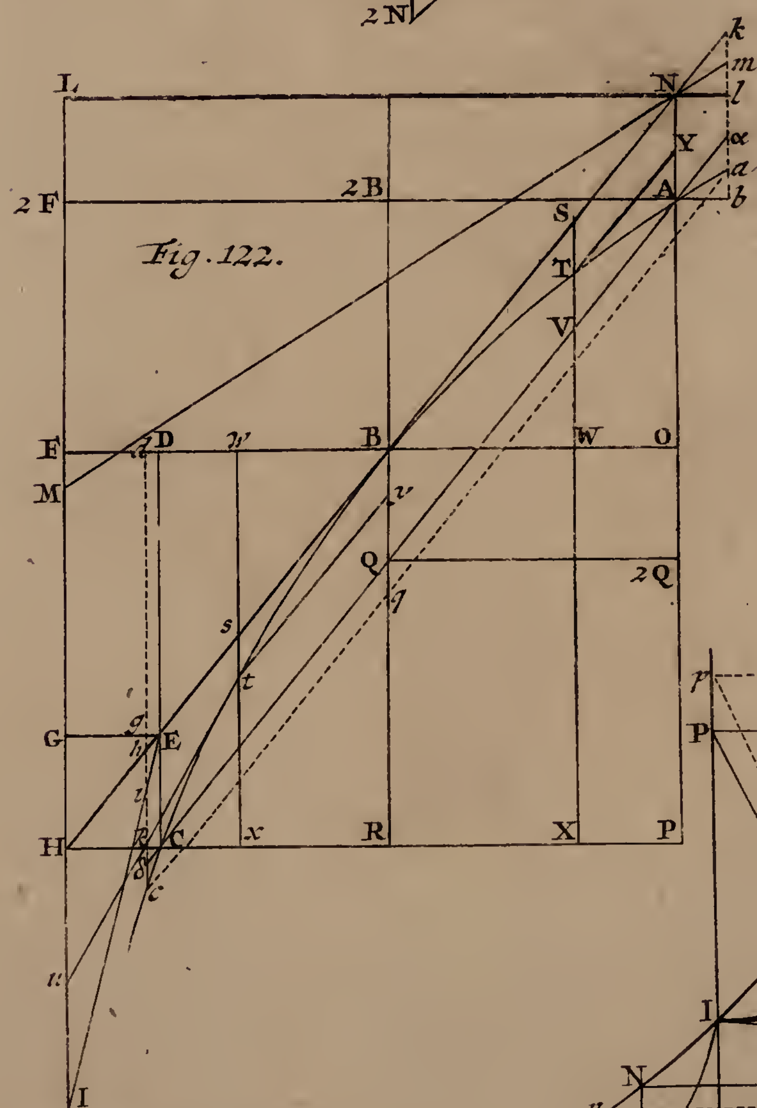
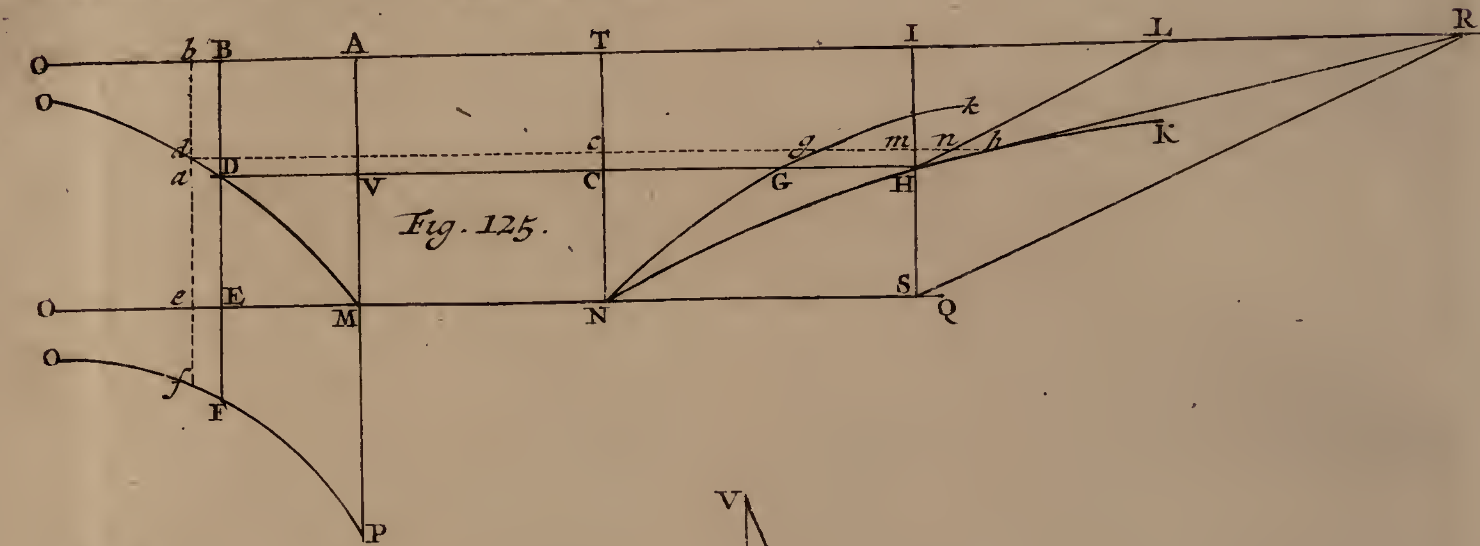

Fig. 119.

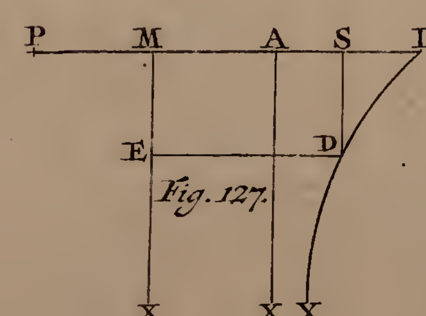
Fig. 120.

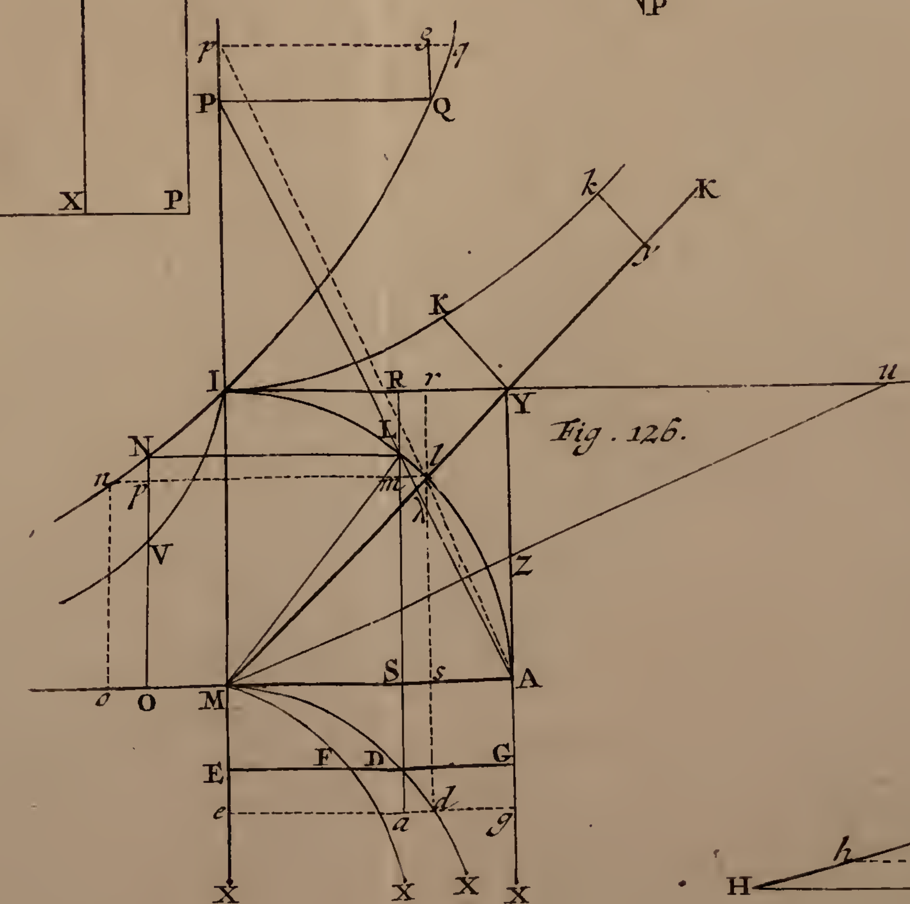

Fig. 123

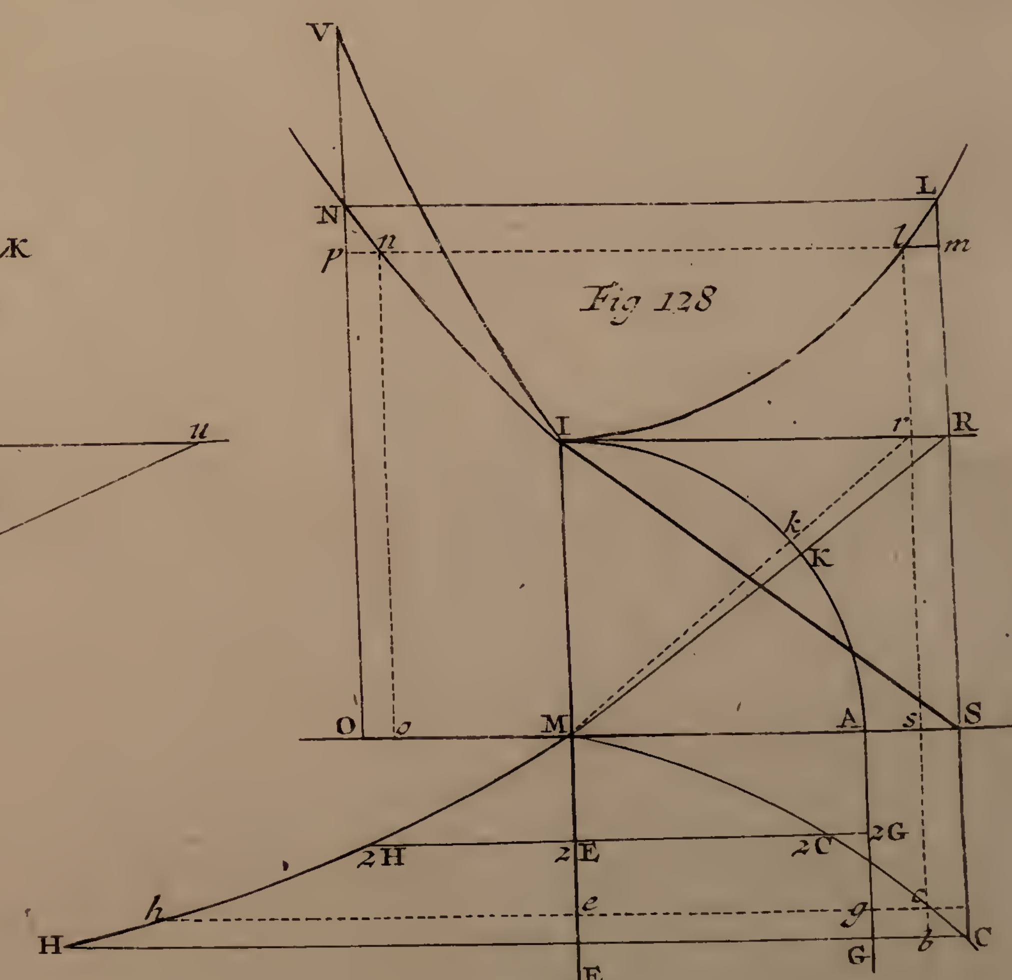

Fig. 124.


Fig. 122.


Fig. 125.


Fig. 127.


Fig. 126.


Fig 128

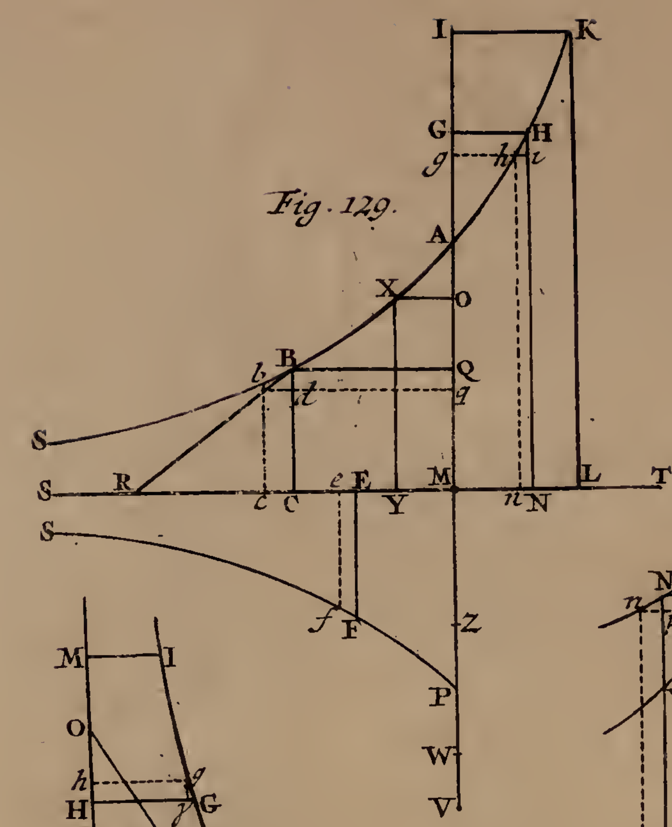


Fig. 129.

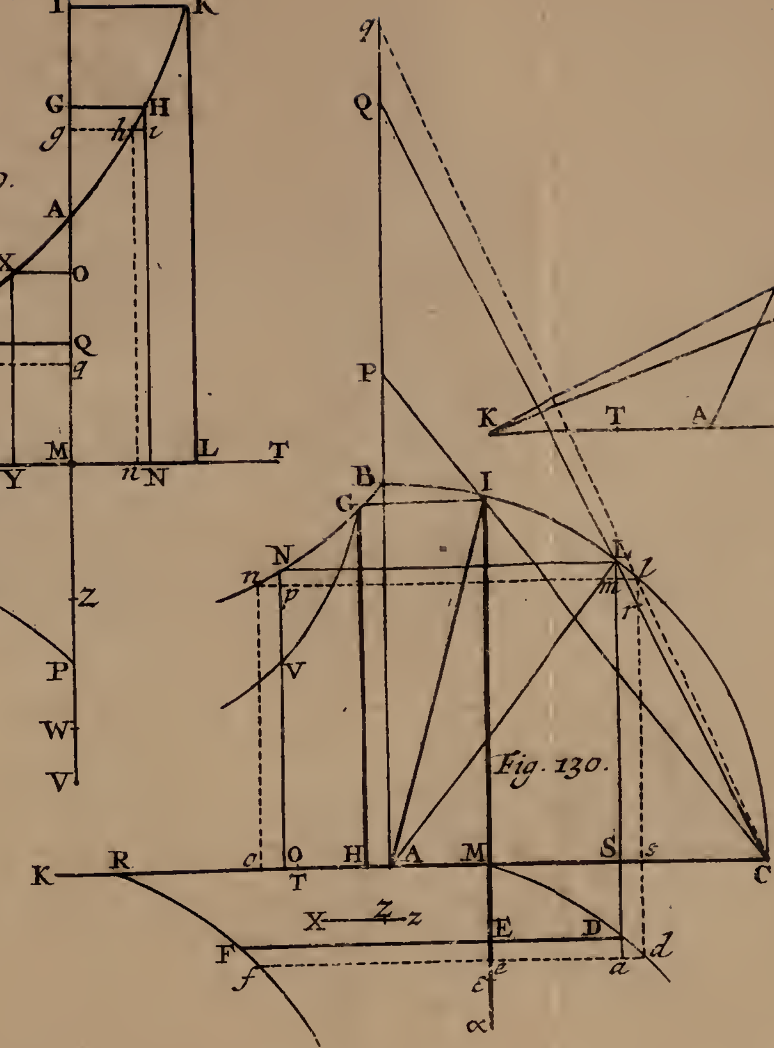


Fig. 130.

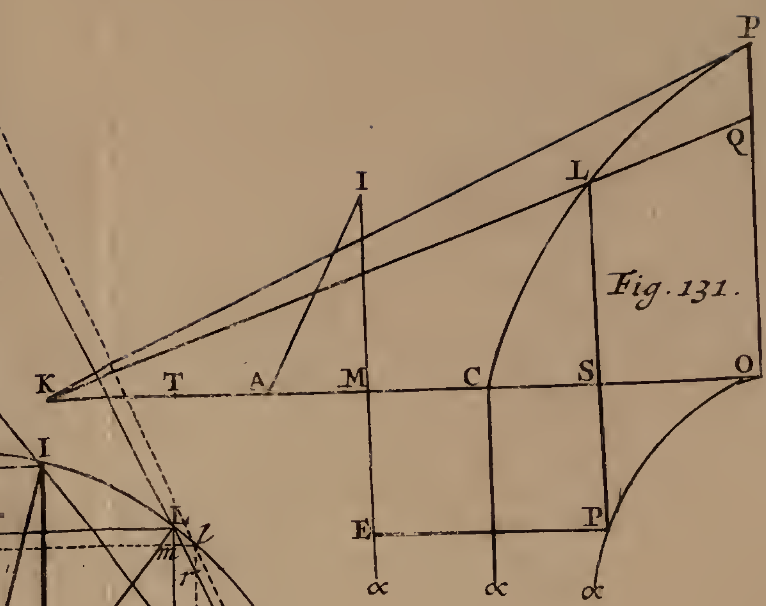


Fig. 131.

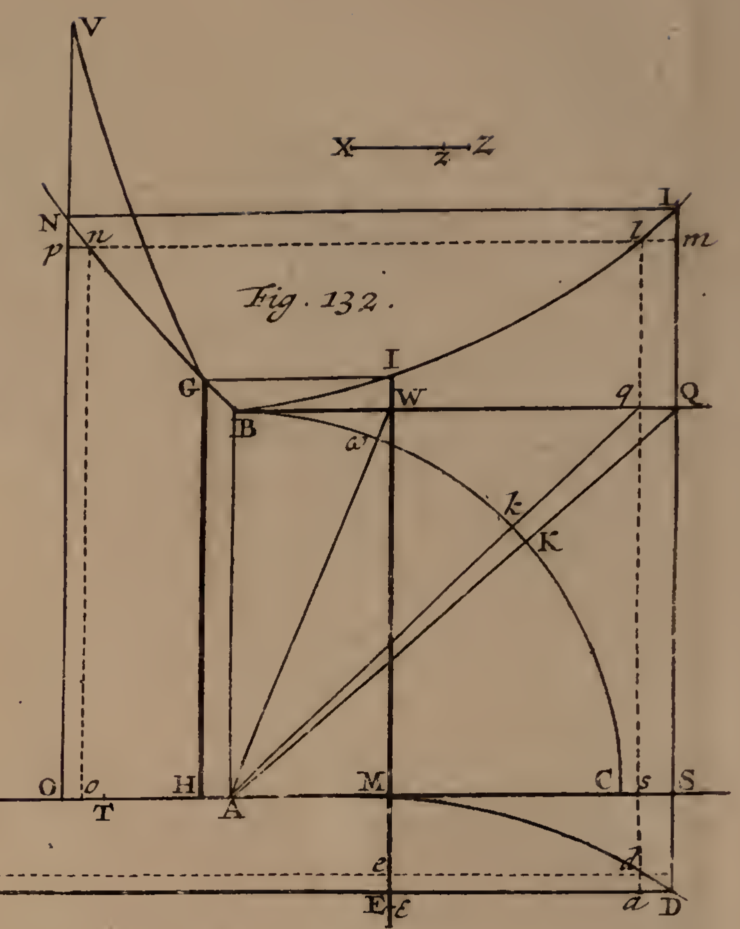


Fig. 132.

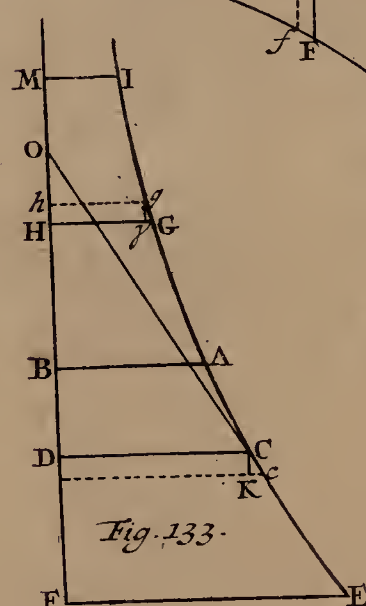


Fig. 133.

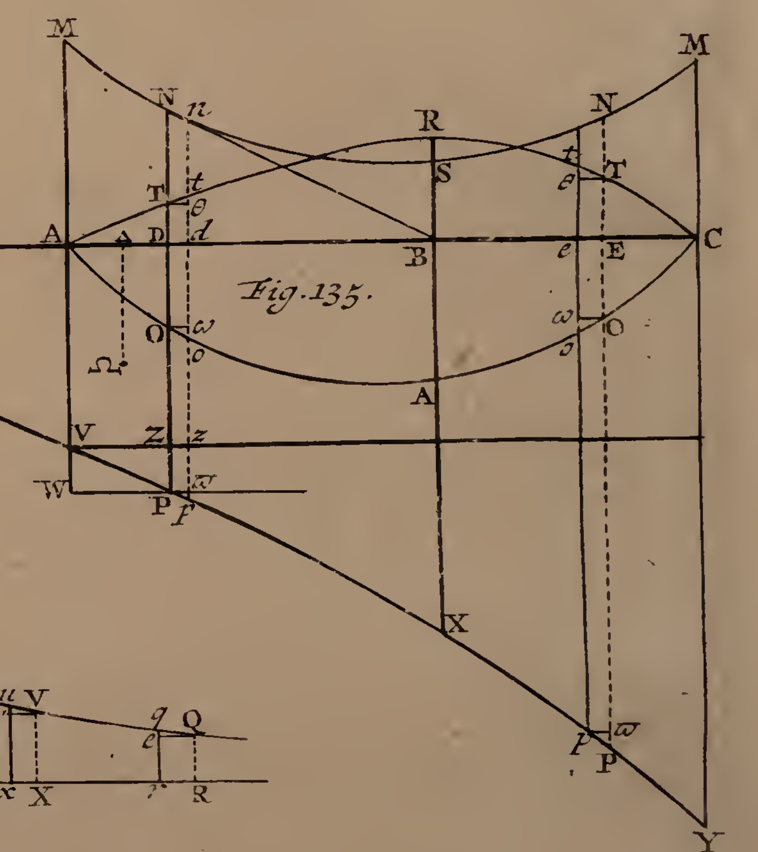


Fig. 135.

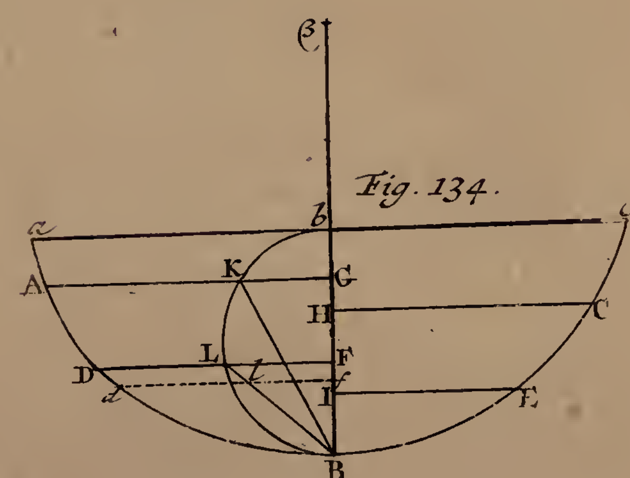


Fig. 134.

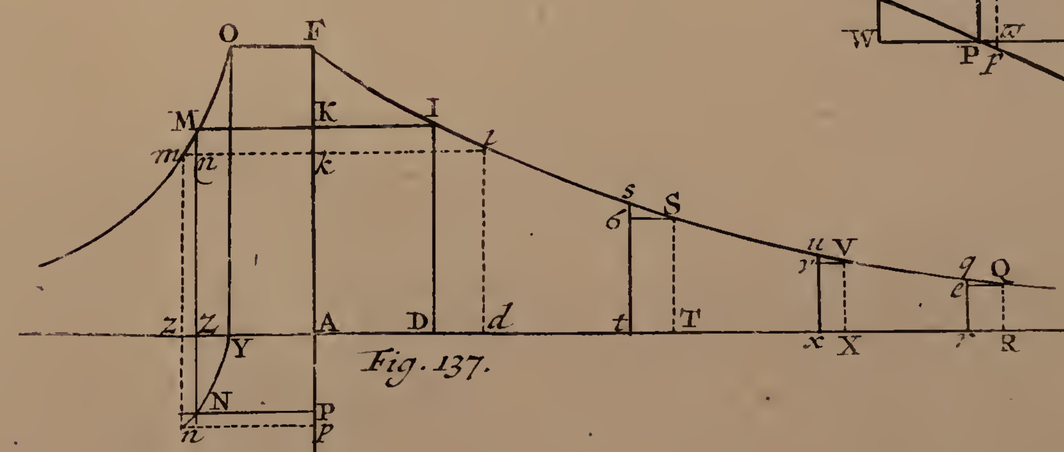


Fig. 137.

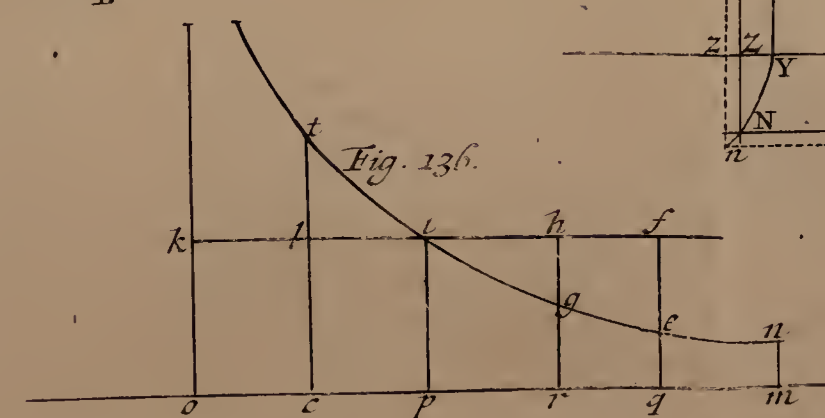


Fig. 136.

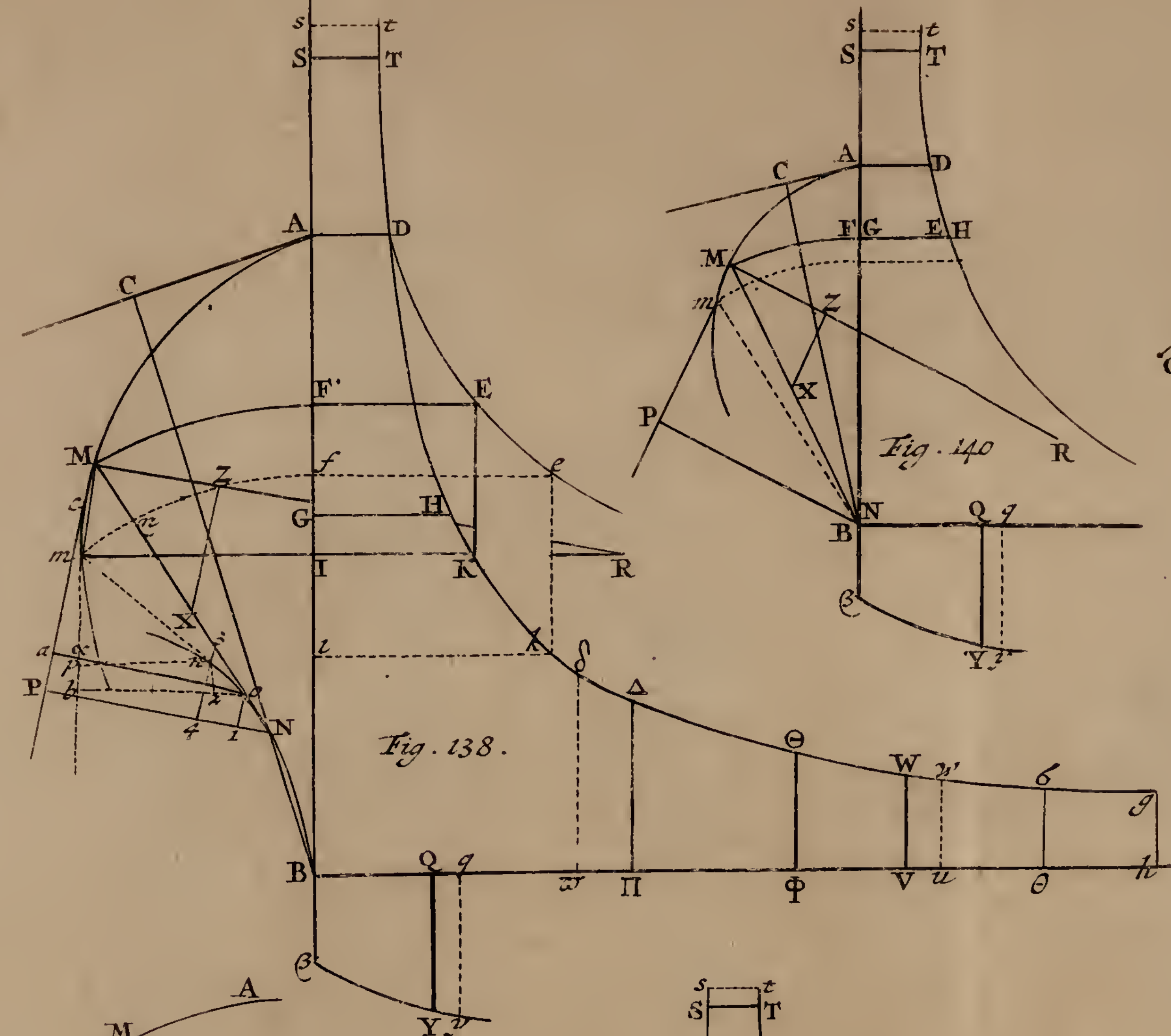
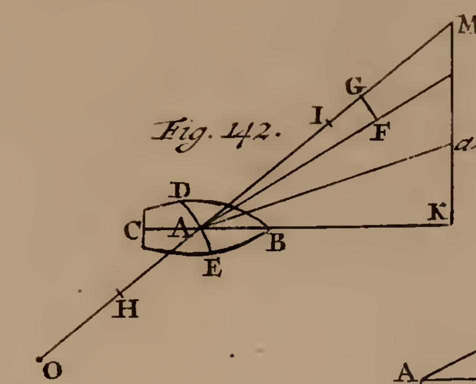
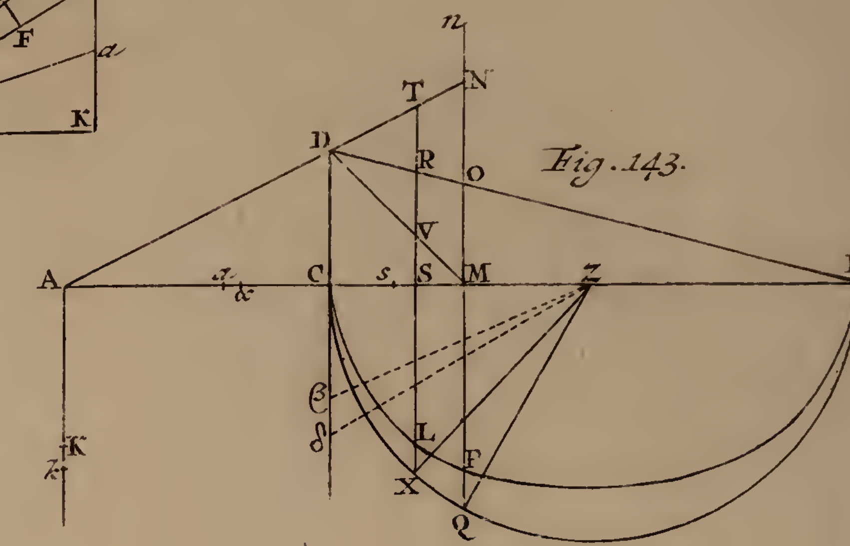
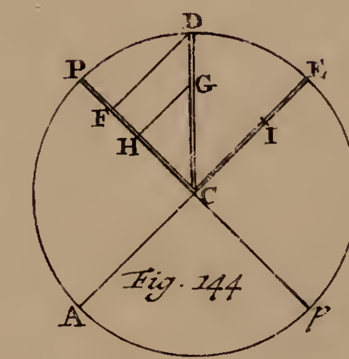
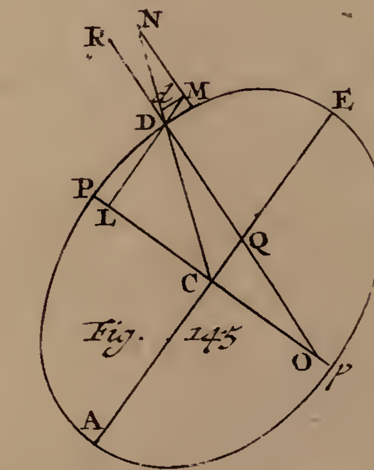

Fig. 138.

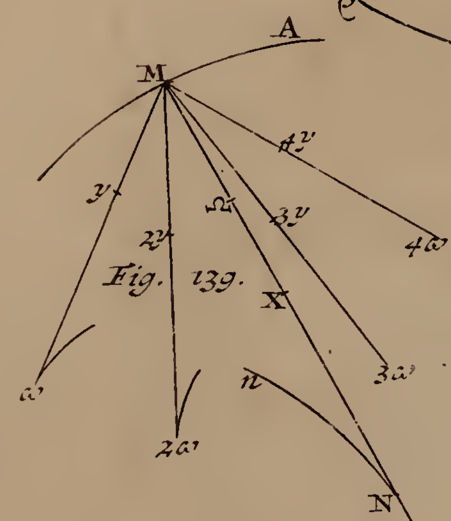
Fig. 140

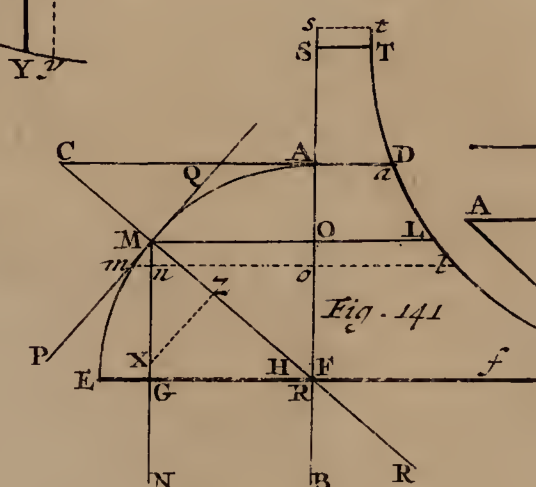

Fig. 142.

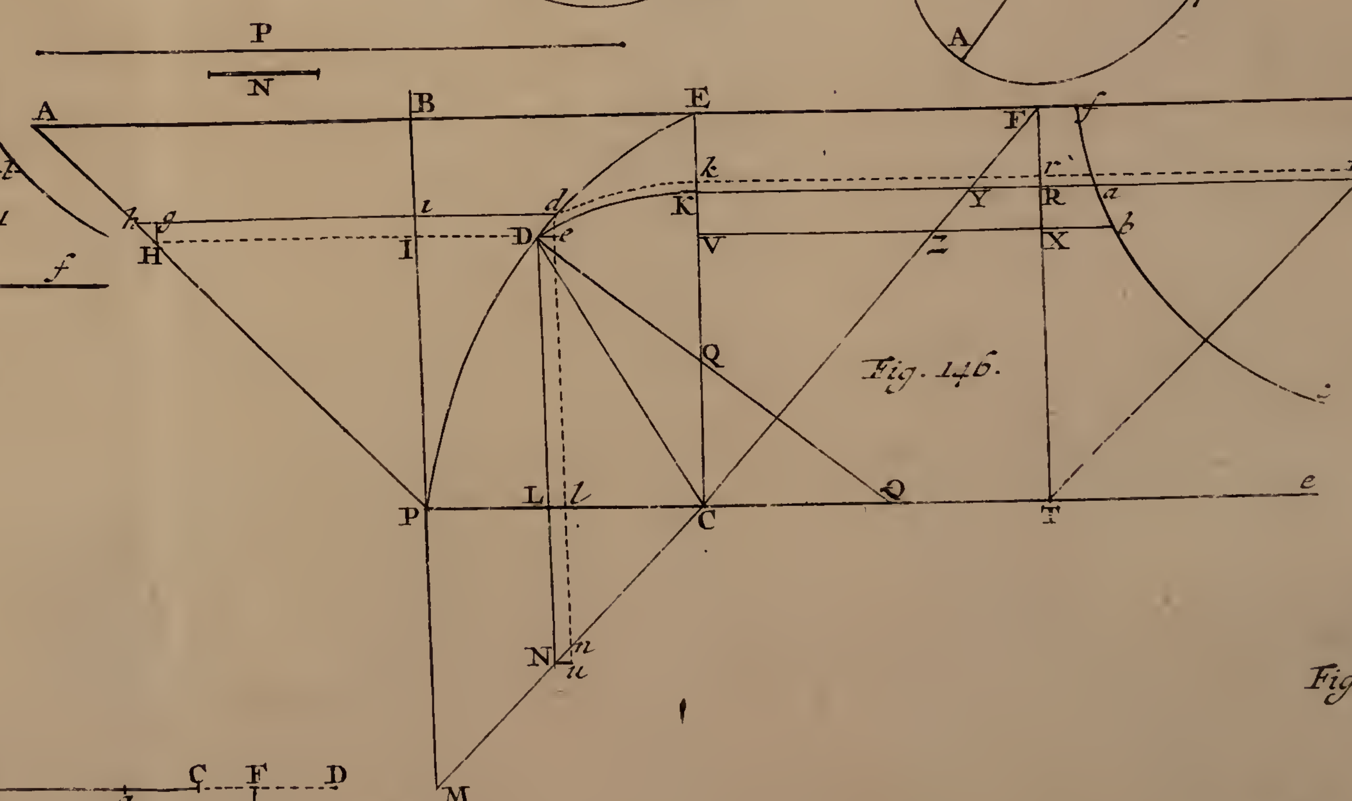

Fig. 143.

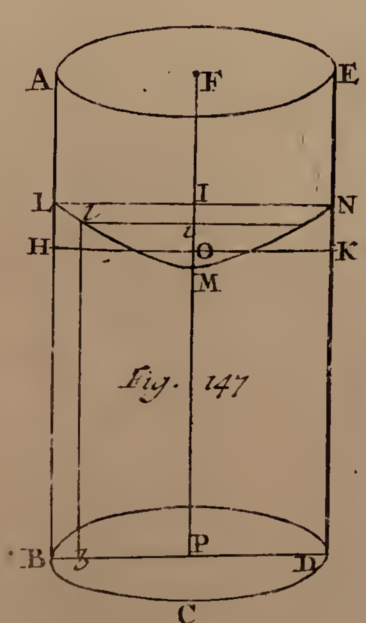

Fig. 144

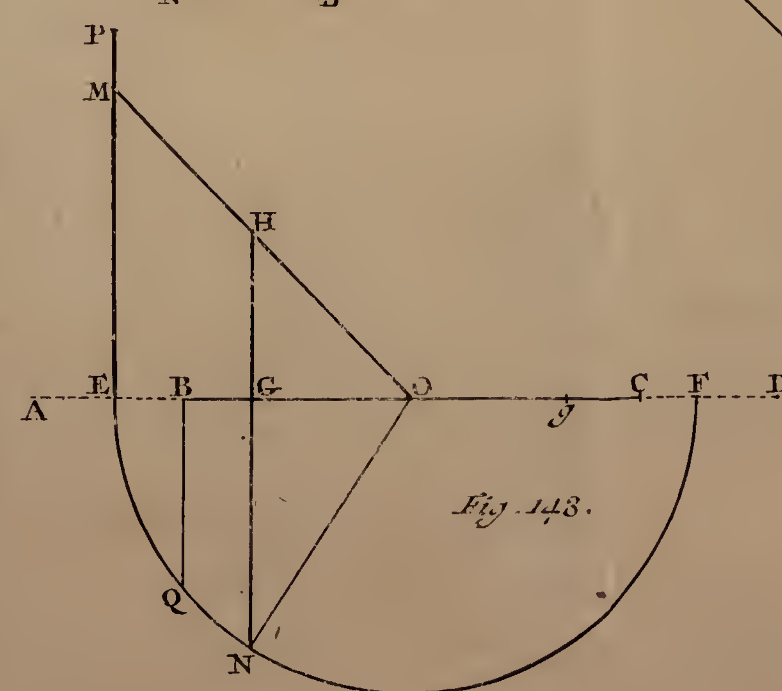

Fig. 145

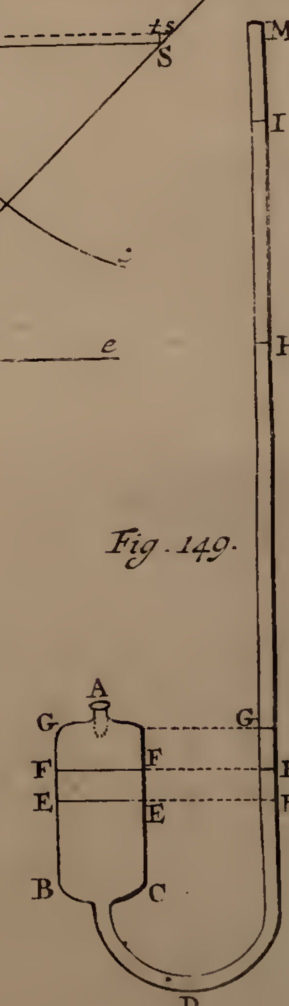

Fig. 139.

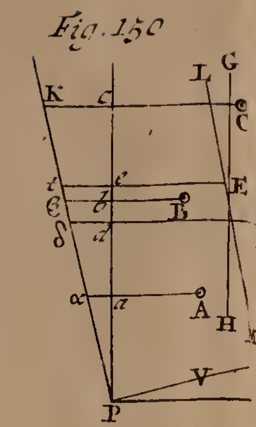

Fig. 141

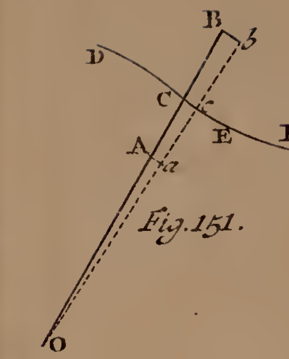

Fig. 146.

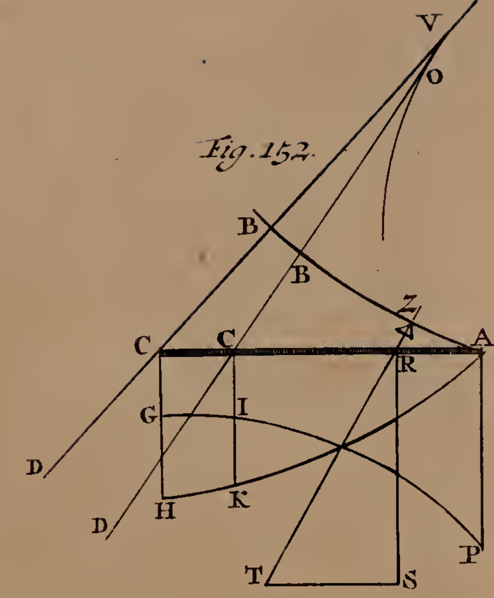

Fig. 147

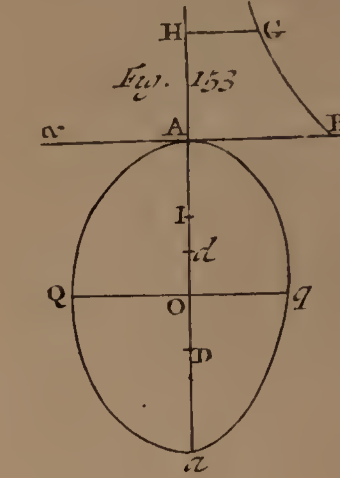

Fig. 148.

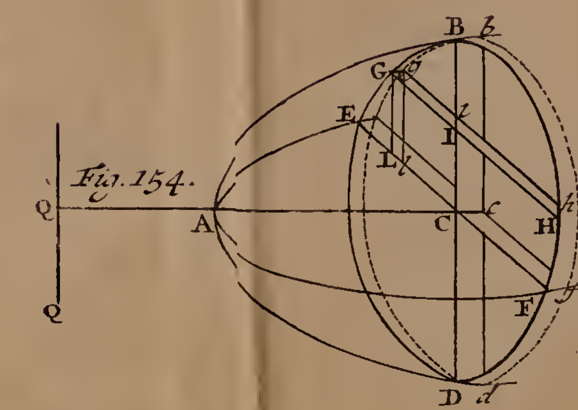

Fig. 149.

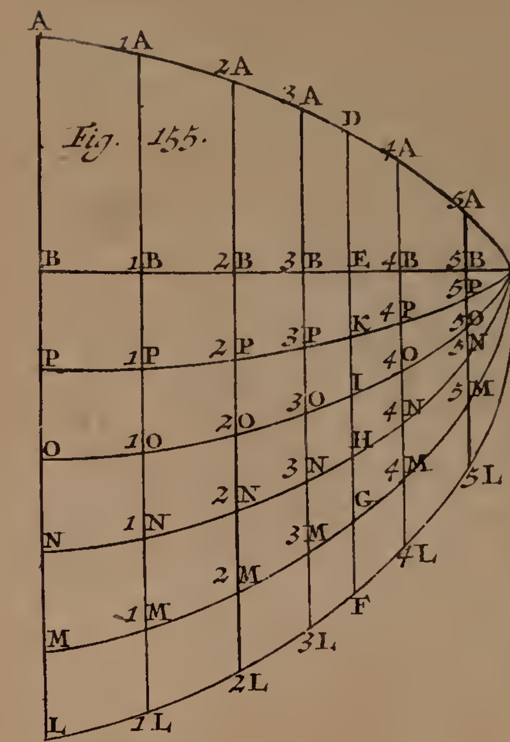

Fig. 150.

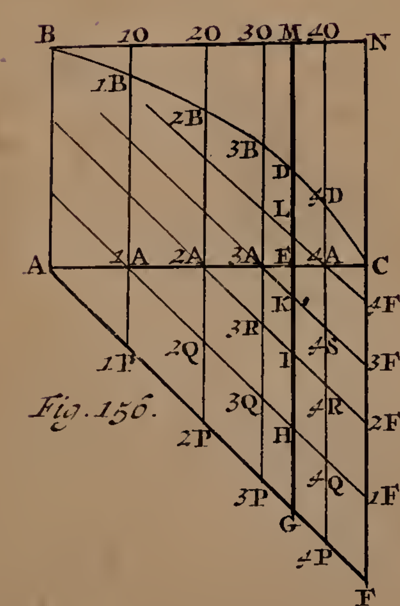

Fig. 151.

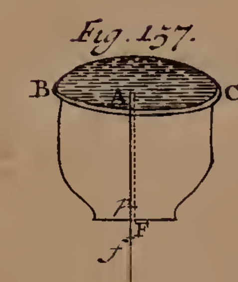

Fig. 152.

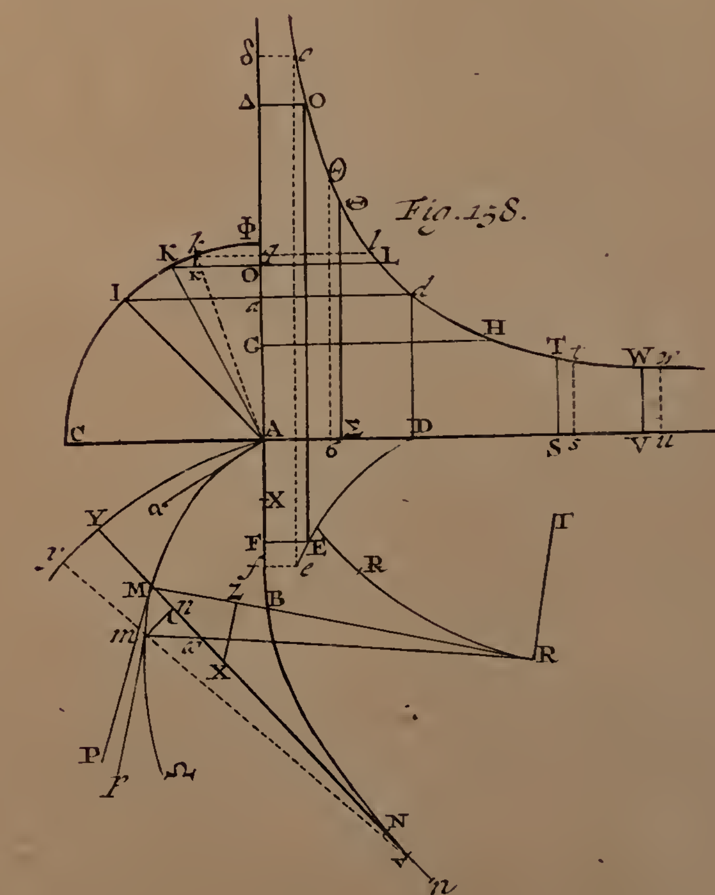

Fig. 153.

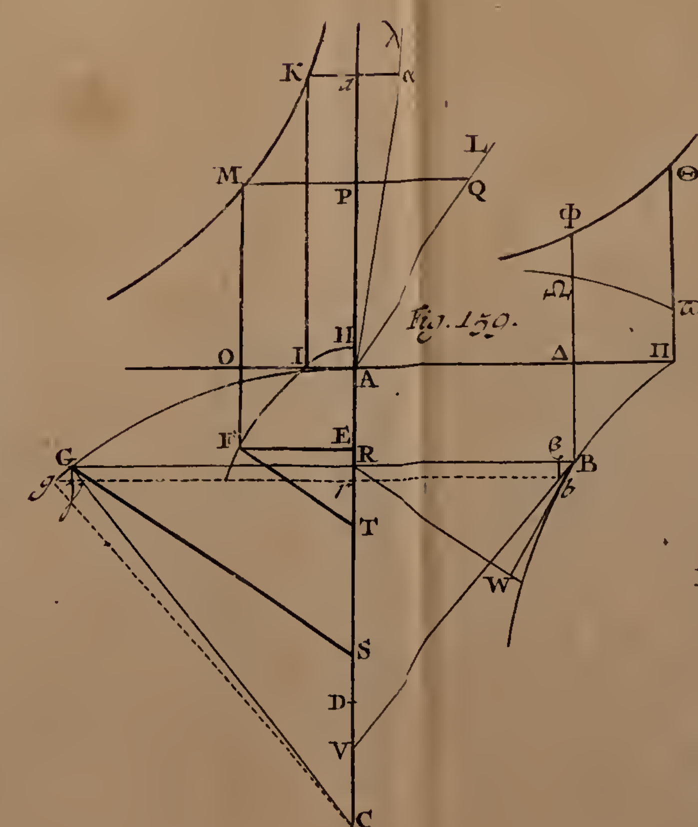

Fig. 154.

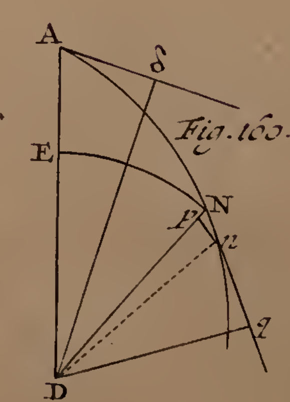

Fig. 155.


Fig. 156.


Fig. 157.


Fig. 158.


Fig. 159.


Fig. 160.